

Ա. Ա. ՄՈՎՏԻՍՅԱՆ

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Устойчивость цилиндрических оболочек с упругим наполнителем достаточно хорошо изучена при силовых воздействиях, когда начальное изгибаемое состояние однородное, устойчивость же оболочек, находящихся в произвольном температурном поле и при произвольных нагрузках, исследована недостаточно полно.

Ниже рассматривается устойчивость свободно опертой цилиндрической оболочки с наполнителем, когда внешняя нагрузка и температура на внешней поверхности цилиндра меняются произвольным образом вдоль образующей.

Решение задачи состоит из трех этапов:

- а) определение температуры в оболочке и наполнителе;
- б) определение температурных напряжений в оболочке и наполнителе (решение уравнений невозмущенного состояния);
- в) определение критических параметров (решение уравнений устойчивости).

Каждый из этих этапов рассмотрим в отдельности.

1. Пусть имеется цилиндрическая оболочка радиуса R , толщины h и длины l , которая наполнена упругим материалом. Принимается, что материал наполнителя во много раз податливее материала оболочки. Для простоты принимается, что наполнитель — сплошной (не полый).

Как обычно, предположим, что температура по толщине оболочки меняется линейно

$$t = \frac{t_1 - t_2}{2} + z \frac{t_1 - t_2}{h} \quad (1.1)$$

где t_1 — заданная температура на внешней поверхности, а t_2 — искомая температура на внутренней поверхности (на контакте).

В наполнителе температура должна быть определена из уравнения теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 t_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_0}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

и на граничных условиях

$$\begin{aligned} t_0 &= t^0(r) \quad \text{при} \quad x = 0 \\ t_0 &= t^1(r) \quad \text{при} \quad x = l \end{aligned} \quad (1.3)$$

Представим t_0 в виде ряда

$$t_0 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r) \sin i_k x, \quad C_k = \frac{2}{l} \int_0^l t_0 \sin i_k x dx, \quad i_k = \frac{k\pi}{l} \quad (1.4)$$

Умножая (1.2) на $\frac{2}{l} \sin i_k$ и интегрируя от 0 до l , при этом учитывая граничные условия (1.3), получим [2]

$$\frac{d^2 C_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dC_k}{dr} - i_k^2 C_k = \frac{2k\pi}{l^2} [(1-1)^k t^1(r) - t^0(r)] \quad (1.5)$$

Решение (1.5) при условии конечности t_0 при $r=0$ имеет вид

$$C_k(r) = c_k J_0(i_k r) + c_k^0(r) \quad (1.6)$$

где $c_k^0(r)$ — частное решение, соответствующее правой части (1.5).

Представим t_1 и t_2 в виде рядов

$$t_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin i_k x, \quad t_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin i_k x \quad (1.7)$$

Предполагая для определенности, что на поверхности контакта оболочки с заполнителем имеется идеальный тепловый контакт [1]

$$t = t_0; \quad t_2 = t_0 \quad \text{при } r = R \quad (1.8)$$

$$K \frac{\partial t}{\partial z} = K_0 \frac{\partial t_2}{\partial r}; \quad K \frac{t_1 - t_2}{h} = K_0 \frac{\partial t_2}{\partial r}$$

где K и K_0 — коэффициенты теплопроводности соответственно оболочки и заполнителя^{*}; для неизвестных коэффициентов получим

$$c_2 = \frac{a_2 - c_2^0(R) - \frac{K_0}{K} h c_2^0(R)}{J_0(i_2 R) + \frac{K_0}{K} h i_2 J_1(i_2 R)}$$

$$b_k = c_k J_0(i_k R) + c_k^0(R) \quad (1.9)$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование по r .

Сходимость ряда (1.4) можно улучшить, выделяя из него

$$\left(1 - \frac{x}{l}\right) t^0(r) + \frac{x}{l} t^1(r)$$

^{*} Здесь и в дальнейшем температурные и упругие характеристики оболочки обозначаются без индексов, а заполнителя — с нулевым индексом.

Таким образом, по (1.4), (1.6) и (1.7) определяются неизвестные температуры t_2 и t_0 .

2. Для определения докритических усилий в оболочке должны быть совместно решены уравнения равновесия оболочки и заполнителя.

Эти задачи также решаются весьма просто. В частности, необходимые нам перемещения и напряжения в заполнителе определяются формулами

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \cos \lambda_m x, \quad W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \lambda_m x \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \sin \lambda_m x, \quad \tau = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m \cos \lambda_m x$$

$$U_m = \lambda_m \left[C_m^{(1)} I_0(\lambda_m r) + C_m^{(2)} \frac{r}{R} I_1(\lambda_m r) \right] + U_m^0(r)$$

$$W_m = \left[C_m^{(1)} I_0(\lambda_m r) + C_m^{(2)} \left[\frac{r}{R} I_1'(\lambda_m r) - \frac{3-4\nu_0}{R} I_1(\lambda_m r) \right] \right] + W_m^0(r)$$

$$\sigma_m = 2G_0 \left[C_m^{(1)} \left[\lambda_m^2 I_0(\lambda_m r) - \frac{1}{r} I_0'(\lambda_m r) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{3-2\nu_0}{R} \left[I_0(\lambda_m r) + \frac{1-2\nu_0-\lambda_m^2 r^2}{rR} I_1(\lambda_m r) \right] C_m^{(2)} \right\} +$$

$$+ 2G_0 \left\{ \frac{dU_m^0}{dr} + \frac{\nu_0}{1-2\nu_0} \left(\frac{dW_m^0}{dr} + \frac{W_m^0}{r} - \lambda_m U_m^0 \right) \right\} - 2G_0 \frac{\varepsilon_1 + \nu_0}{1-2\nu_0} \sigma_0 C_m(r)$$

$$\tau_m = 2G_0 \lambda_m \left\{ C_m^{(1)} I_0(\lambda_m r) + \left[\frac{r}{R} I_1'(\lambda_m r) - \frac{1-2\nu_0}{R} I_1(\lambda_m r) \right] C_m^{(2)} \right\} +$$

$$+ G_0 \left[\frac{dU_m^0}{dr} + \lambda_m W_m^0 \right]$$

в случае, когда на торцах отсутствуют радиальное перемещение и продольное напряжение.

Здесь U_m^0 и W_m^0 — частные решения, соответствующие заданной температуре.

Если искать решение уравнений оболочки

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dw_0}{dx} = \frac{1-\nu^2}{Eh} [X_2^0 - X_1^0] + \alpha(1+\nu) \frac{d^2 \theta_0}{dx^2}$$

$$\frac{h^2}{12} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{w_0}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{du_0}{dx} = \frac{1-\nu^2}{Eh} [Z_1^0 - Z_2^0] + \quad (2.2)$$

$$+ \frac{1}{R} \alpha(1+\nu) \theta_0 - \frac{h^2}{12} \alpha(1+\nu) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2}$$

где

$$\omega_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \omega_1 = \frac{t_1 - t_2}{h}$$

в виде рядов

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos l_m x, \quad w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin l_m x \quad (2.3)$$

и при этом неизвестные контактные нагрузки от заполнителя на оболочку также представить в виде рядов

$$X_2^0 = \sum_{m=0}^{\infty} X_m \cos l_m x, \quad Z_2^0 = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \sin l_m x \quad (2.4)$$

то вместе с контактными условиями

$$\begin{aligned} u_0 = U, \quad X_2^0 = 0 \\ w_0 = W, \quad Z_2^0 = 0 \end{aligned} \quad \text{при } r = R \quad (2.5)$$

получим шесть уравнений для определения шести неизвестных $C_m^{(1)}$, $C_m^{(2)}$, A_m , B_m , X_m и Z_m (их выражения из-за громоздкости не записываются).

В конечном итоге необходимые для решения задачи устойчивости начальные усилия можно представить в виде рядов

$$T_1^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos l_m x, \quad T_2^0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} e_m \cos l_m x \quad (2.6)$$

где в выражения d_m и e_m входят внешняя нагрузка и температура.

3. Уравнение устойчивости оболочки берем в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \\ = \frac{h^2}{12R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12} \nabla^4 w + \\ + \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(T_1^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} Z = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Как показано в многочисленных исследованиях (напр., в [4]), нагруженные члены в первых двух уравнениях несущественно влияют на значения критических параметров, поэтому они пренебрежены.

По предположению на торцах оболочки имеются условия свободного опирания, следовательно, перемещения, удовлетворяющие этим условиям, будут иметь вид

$$\begin{aligned} u &= \cos n\theta \sum_{q=0}^{\infty} u_q \cos \lambda_q x \\ v &= \sin n\theta \sum_{q=1}^{\infty} v_q \sin \lambda_q x \\ w &= \cos n\theta \sum_{q=1}^{\infty} w_q \sin \lambda_q x \end{aligned} \quad (3.2)$$

Нормальное давление Z определяется из решения трехмерной задачи для заполнителя с учетом контактных условий с оболочкой $r_{,0} = r_{,z} = 0$, $w = W$; $r_r = Z$ для возмущенного состояния. Выражение для нормального давления можно представить в виде

$$Z = \cos n\theta \sum_{q=1}^{\infty} z_{qn} \sin \lambda_q x \quad (3.3)$$

Коэффициенты z_{qn} довольно громоздкие и сложные, но они сильно упрощаются, если воспользоваться их асимптотическим представлением для больших q и n [5, 6]

$$z_{qn} = \frac{G_n}{1-\nu_0} \sqrt{\lambda_q^2 + \frac{n^2}{R^2}} \quad (3.4)$$

Как показано в [5, 6], такое приближение дает вполне приемлемые результаты.

Учитывая (3.2)—(3.4), для w_q получим следующую бесконечную систему [7]:

$$\begin{aligned} Q_{qn} w_q - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^q \left(\lambda_p^2 e_{q-p} + \frac{n^2}{R^2} d_{q-p} \right) w_p + \right. \\ \left. + \sum_{p=q}^{\infty} \left(\lambda_p^2 e_{p-q} + \frac{n^2}{R^2} d_{p-q} \right) w_p - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\lambda_p^2 e_{p+q} + \frac{n^2}{R^2} d_{p+q} \right) w_p \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где через Q_{qn} обозначено

$$Q_{qn} = \frac{h^2}{12} \left(\lambda_q^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 + \frac{(1-\nu^2) \lambda_q^4}{R^2 \left(\lambda_q^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} + \frac{z_{qn} (1-\nu^2)}{Eh}$$

$$\frac{h^2 n^2}{12R^4} \frac{n^2}{R^2} + (2 + \nu) \lambda_0^2 \quad (3.6)$$

$$\lambda_0^2 + \frac{n^2}{R^2}$$

Критические параметры (нагрузка и температура, при которой происходит потеря устойчивости) определяются из (3.5), как наименьшие собственные значения матрицы этой системы.

4. Рассмотрим два примера. В обоих примерах принято, как наиболее интересный случай [6], что нагревается только оболочка и что она теплоизолирована от заполнителя (получается как частный случай (1.8) — а именно: $t_1 = t_2$, $t_0 = 0$).

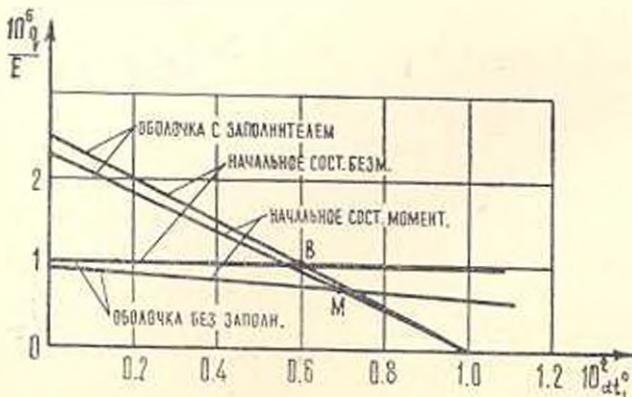
Пусть на оболочку действует внешнее синусоидальное давление и такая же температура на внешней поверхности

$$Z_1^0 = q \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.1)$$

$$t_1 = t_1^0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

Расчеты проводились для оболочки $R/h = 302.1$; $\pi R/l = 10$; $\nu = 0.3$; $\nu_0 = 0.5$; $E/E_0 = 10^4$ как с заполнителем, так и без заполнителя в предположении безмоментности и моментности начального напряженного состояния*).

Изменение критического давления в зависимости от температуры показано на фиг. 1.



Фиг. 1.

Как видно из фиг. 1, при отсутствии воздействия температуры расчет на устойчивость в предположении безмоментности начального состояния

*) Были рассмотрены определители третьего и четвертого порядков. Результаты практически совпадают.

приводит к незначительным погрешностям в значении критического давления, независимо от того, есть или нет заполнитель. При наличии же температурного воздействия, если расчет оболочки без заполнителя должен был вестись, исходя из моментности начального состояния, то уже оболочку с заполнителем вполне можно рассчитывать, исходя из безмоментной теории.

Интересно отметить еще то, что существуют критические значения внешнего давления и температуры, которые одинаковы для оболочек без заполнителя и с заполнителем (точки *B* и *M*).

Теперь изучим случай, когда на поверхности оболочки заданы постоянное давление и постоянная температура. Тогда вместо бесконечной системы (3.5) получится одно уравнение, которое после упрощения [3] принимает вид

$$\frac{T_2^0}{Eh} = \frac{h^2 n^2}{12(1-\nu^2)R^2} + \frac{-1R^4}{l^2 n^2} + \frac{G_0}{E(1-\nu_0)} \frac{R}{h} \frac{1}{n} \quad (4.2)$$

$$T_2^0 \left[1 + \frac{E_0(1-\nu^2)}{E(1-\nu_0)} \frac{R}{h} \right] = Rq + \frac{E_0 R(1+\nu)}{1-\nu_0} \alpha l_1^2$$

Критические параметры и формы потери устойчивости определяются весьма просто.

Для параметров $\nu = 0.3$; $\nu_0 = 0.5$; $E = 10^4 E_0$ критические значения для выражений $10^5 q/E + 20 \alpha l_1^2$ при различных R/h и R/l приведены в табл. 1.

Таблица 1

$$\frac{q}{E} 10^5 + 20 \alpha l_1^2$$

l, R	R/h	100	300	500		
1	0.9578	1.696	0.05936	0.4928	0.01642	0.3056
1.5	0.6322	1.520	0.05651	0.4928	0.01104	0.3056
2	0.4601	1.460	0.02945	0.4928	0.008227	0.3056
2.5	0.3885	1.429	0.02369	0.4928	0.006592	0.3056
3	0.3059	1.419	0.01737	0.4928	0.005634	0.3056

В первых столбцах для каждого R/h помещены значения критического давления для оболочки без заполнителя ($E_0=0$).

Из таблицы видно, как при наличии заполнителя критические параметры очень быстро достигают своего асимптотического значения (оболочка «становится» длинной) и, во-вторых, чем длиннее оболочка, тем большее влияние оказывает температура.

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԼՅՈՒՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ
ՈՒԺԱՅԻՆ ԵՎ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո ւ փ ո լ մ

Դիտարկվում է ազատ հենված լրիվ լցոնած դաշնային թաղանթի կայունությունը, երբ նրա արտաքին մակերևույթի վրա արված են բևռ և ջերմութուն, որոնք կամայական ձևով են փոխվում ըստ թաղանթի ծնիշխ: Զերմության բաշխումը, ինչպես և նախնական լարումները թաղանթում և լցոնում արվում են շարքերի տեսքով: Լցոնի ազդեցությունը հաշվի է առնվում միայն որպես նորմալ ճնշում: Կրիտիկական պարամետրերի որոշումը բերված է անվերջ մատրիցի ամենափոքրադույն սեփական արժեքի գտնելուն:

Դիտարկված են հրկու օրինակներ:

THE STABILITY OF CYLINDRICAL SHELLS WITH AN
ELASTIC CORE UNDER TEMPERATURE AND
STRESS EFFECTS

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The stability of cylindrical shells with an elastic complete core is investigated, where axially symmetrical temperature and normal pressure on the external surface are given.

Two examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнс Д. Теория температурных напряжений, Изд. «Мир», 1964.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд. АН СССР, 1948.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
4. Яо. Устойчивость длинных центрально сжатых цилиндрических оболочек с упругим подкрепляющим слоем. ПМ (Тр. американского общества инженеров-механиков), сер. E, 1962, т. 29, № 2.
5. Иванов В. А. К определению коэффициента «постели» в задачах устойчивости оболочки вращения с упругим наполнителем. ПМ, 1974, т. X, вып. 5.
6. Мовсисян Л. А. Устойчивость кольца с наполнителем при силовых и температурных воздействиях. Докл. АН АрмССР, 1976, т. 64, № 2.
7. Мовсисян Л. А. Устойчивость цилиндрических оболочек при быстрых нагружениях. Докл. АН АрмССР, 1972, т. 55, № 4.