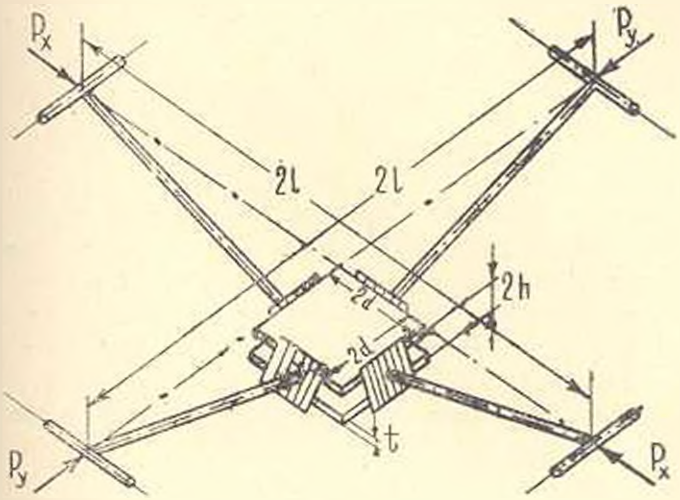
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

А. Г. ПОПОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СИНГУЛЯРНОМ ЗАКОНЕ ПЛАСТИЧНОСТИ

Существует мнение, что использование теорий пластичности с конической особенностью поверхности нагружения в работах по устойчивости пластин за пределом упругости связано с большими математическими трудностями. Эти опасения основаны на том, что при сингулярном законе пластичности существует область, где соотношения между приращениями напряжений и деформаций дифференциально-нелинейные. Однако, при определенных путях нагружения эти дифференциально-нелинейные соотношения при расчетах на устойчивость пластин не используются. Это и будет показано на примере устойчивости идеализированной пластинки при пропорциональном нагружении.

1. *Описание модели пластинки.* Все дальнейшие рассуждения будут проводиться на основе модели идеализированной пластинки (фиг. 1), предложенной в работе [1].



Фиг. 1.

Идеализированная пластинка представляет собой четыре равные жесткие штанги, составляющие в плане прямоугольный координатный крест, которые опираются своими плоскими и перпендикулярными к их осям основаниями на торцы двух параллельных квадратных пластинок. Эти пластинки сделаны из упруго-пластического материала и могут деформироваться лишь в своей плоскости.

В начальном состоянии оси штанг лежат в одной исходной плоскости, размеры пластинок одинаковы и модель медленно нагружается плоской системой сил P_x и P_y, приложенных к концам штанг вдоль их осей.

В качестве критерия устойчивости рассматривается критерий бифуркации процесса деформирования, обоснованность которого проверена прямым анализом свойств возмущенного движения [1].

Система уравнений, описывающая возникающие дополнительные напряжения и деформации при внешних догрузках δP_x и δP_y имеет вид [1]

$$\delta\sigma_x = \delta\sigma_x^+ + \delta\sigma_x^-, \quad \delta\sigma_y = \delta\sigma_y^+ + \delta\sigma_y^-$$

$$(\sigma_x + \sigma_y)\frac{ld}{h^2}\varkappa = \delta\sigma_x^+ + \delta\sigma_y^+ - (\delta\sigma_x^- + \delta\sigma_y^-)$$

$$\varkappa = \frac{1}{4}\left[\delta\varepsilon_x^+ + \delta\varepsilon_y^+ - (\delta\varepsilon_x^- + \delta\varepsilon_y^-)\right] \tag{1.1}$$

$$\delta\varepsilon_x^+ - \delta\varepsilon_y^+ = \delta\varepsilon_x^- - \delta\varepsilon_y^-$$

где индексом «+» отмечены величины, относящиеся к верхней (фиг. 1) пластинке, а индексом «—» к нижней, и обозначено

$$\delta\sigma_i = \frac{\delta P_i}{2dt}, \qquad \sigma_i = \frac{P_i}{2dt}, \qquad i = x,\ y$$

Линейные размеры l, d, h, t указаны на фиг. 1.

Система (1.1) допускает тривиальное решение

$$\delta\sigma_x^+ = \delta\sigma_x^- = \frac{1}{2}\delta\sigma_x, \qquad \delta\sigma_y^+ = \delta\sigma_y^- = \frac{1}{2}\delta\sigma_y$$

$$\delta\varepsilon_x^+ = \delta\varepsilon_x^-, \qquad \delta\varepsilon_y^+ = \delta\varepsilon_y^- \tag{1.2}$$

Это решение соответствует основному продолжению процесса деформирования, при котором центр модели находится в исходной плоскости. Задача заключается в отыскании таких минимальных параметров нагружения, при которых возможно отличное от тривиального решение системы (1.1). Это решение будет соответствовать побочному продолжению процесса деформирования, при котором центр модели отклоняется от исходной плоскости, а полученные значения внешних параметров будут критическими для данной модели.

Материал пластинок считаем несжимаемым.

Каждая пластинка модели находится в условиях плоско-напряженного состояния типа двуосного растяжения-сжатия ($\tau_{xy} = 0$). Как видно, все процессы протекают в одной девиаторной плоскости

$$S_x + S_y + S_z = 0, \quad S_{xy} = S_{xz} = S_{yz} = 0$$

Сделаем замену переменных, аналогичную предложенной в [2]. Введем в этой плоскости орт i в направлении, противоположном проекции оси S_z и перпендикулярный к нему орт j — в сторону оси S_x. Тогда вектор напряжений S в девиаторном пространстве может быть представлен в виде: $S = S_1 l + S_2 j$. Это отвечает следующей замене переменных:

$$S_x + S_y = \sqrt{\frac{2}{3}} S_1, \quad S_x - S_y = \sqrt{2}\, S_2 \tag{1.3}$$

Аналогично для деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l + \varepsilon_2 j$$

где

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_x - \varepsilon_y = \sqrt{2}\, \varepsilon_2 \tag{1.4}$$

Все дальнейшие рассуждения будут вестись в совмещенной девиаторной плоскости $S_1 \sim S_2$. Отметим, что на ней первоначальная поверхность нагружения $\sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \text{const}$ принимает вид

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2} = S_0$$

то есть просто окружность.

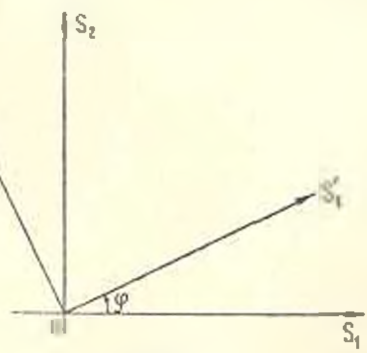
Ниже будут рассматриваться такие процессы нагружения, при которых отношение $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ остается постоянным (пропорциональное нагружение), причем, не нарушая общности, можно считать $\sigma_x \geqslant \sigma_y$. Таким процессам на плоскости $S_1 \sim S_2$ соответствует нагружение по лучу, исходящему из начала координат под некоторым углом φ к оси S_1, $(0 \leqslant \varphi < \pi/_2)$. Запишем систему (1.1) в проекциях на оси, повернутые на угол φ относительно первоначальной системы координат $S_1 o S_2$ (фиг. 2) и выделим обратимые части деформаций:

$$\mu S_1 (\delta p_1^+ - \delta p_1^-) =$$

$$= (\delta S_1^+ - \delta S_1^-)\left(\cos^2\varphi - \mu S_1 \frac{1}{2G}\right) -$$

$$- (\delta S_2^+ - \delta S_2^-) \cos\varphi \sin\varphi \tag{1.5}$$

$$\delta S_1^+ + \delta S_1^- = 2\delta S_1, \quad \delta S_2^+ + \delta S_2^- = 2\delta S_2$$



Фиг. 2.

$$(\delta p_1^+ - \delta p_1^-) \sin\varphi + (\delta p_2^+ - \delta p_2^-) \cos\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2G} \left[(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) \sin\varphi + (\delta S_2^+ - \delta S_2^-) \cos\varphi\right]$$

где обозначено $\mu = \frac{ld}{h^2}\sqrt{\frac{6}{12}}$, δp_i — приращения пластических деформаций, G — модуль упругого сдвига.

Здесь для удобства записи все приращения даны в повернутой системе координат, а значение S_1 — в первоначальной.

Для процесса пропорционального нагружения в системе (1.5) нужно положить $\delta S_2 = 0$.

2. *О соотношениях между напряжениями и деформациями для плоских путей нагружения.* Для полной постановки задачи к системе (1.1) необходимо добавить связь между напряжениями и деформациями. В работе [3] сравниваются выводы некоторых теорий пластичности (теории скольжения Батдорфа и Будянского, теории Сандерса, соотношений «напряжение—деформация», предложенных Клюшниковым В. Д. и модельного представления Работнова Ю. Н.). В этой работе показано, что для плоских путей нагружения при догрузке из конца простого нагружения все названные теории совпадают, а при определенных ограничениях на направление догрузки их соотношения переходят в деформационную теорию. Дальнейшие рассуждения будут проводиться на основе теории Сандерса, однако полученный результат, в силу вышесказанного, будет справедлив для любой из этих теорий.

Основные предположения теории Сандерса для плоских путей нагружения заключаются в следующем [3]. Роль поверхности нагружения играет замкнутая кривая нагружения, которая представляет собой огибающую плоского семейства прямых (прямые пластичности). Эти прямые в процессе пластического деформирования могут перемещаться лишь в противоположную от начала координат сторону и только поступательно (самопараллельно), причем перемещаются только те прямые, которые имеют с вектором напряжений S общую точку. При перемещении данной прямой пластичности на величину δh возникает единичное приращение пластической деформации δp_n, определяемое соотношением

$$\delta p_n = g(h)\, n \delta h$$

где g — функция расстояния h данной прямой от начала координат, n — единичный вектор нормали к этой прямой в плоскости нагружения.

Полное приращение пластической деформации δp, вызываемое догрузкой δS, находится суммированием единичных приращений

$$\delta p = \int g(h)\, n \delta h\, d\eta \tag{2.1}$$

где η — угол между нормалью n и направлением вектора напряжений S, интегрирование ведется по всем углам η, соответствующие прямые которых перемещаются при догрузке δS.

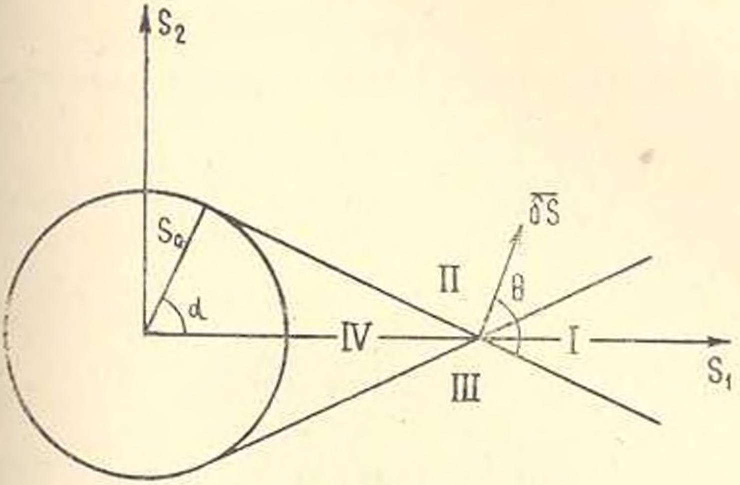
Рассмотрим следующий путь нагружения, когда из начала координат на плоскости $S_1 \sim S_2$ нагружение происходит по оси S_1. Для приращения напряжения δS можно выделить следующие четыре зоны, где соотношения „$\delta p \sim \delta S$" записываются различным образом (фиг. 3).

I зона: $-\frac{\pi}{2}+\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}-\alpha$ — зона полного нагружения (ПН)

$$\begin{aligned}\delta p_1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_2\\ \delta p_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $h=|s|\cos\eta$, углы α и θ определяются соотношением

$$\cos\alpha=\frac{S_0}{|S|};\quad \cos\theta=\frac{\delta S_1}{\sqrt{\delta S_1^2+\delta S_2^2}};\quad \sin\theta=\frac{\delta S_2}{\sqrt{\delta S_1^2+\delta S_2^2}} \tag{2.3}$$



Фиг. 3.

II зона: $\frac{\pi}{2}-\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}+\alpha$ — зона неполного нагружения (НН)

$$\begin{aligned}\delta p_1 &= \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_2\\ \delta p_2 &= \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2\end{aligned} \tag{2.4}$$

III зона: $-\frac{\pi}{2}-\alpha<\theta<-\frac{\pi}{2}+\alpha$ — зона неполного нагружения (НН)

$$\delta p_1 = \int\limits_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int\limits_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_2$$

$$\delta p_2 = \int\limits_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int\limits_{-\alpha}^{\theta+\frac{\pi}{2}} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2 \qquad (2.5)$$

IV зона: происходит упругая разгрузка.

При δS, направленном в зону I, соотношения (2.2) — дифференциально-линейные, голономные и, следовательно, определяются деформационной теорией пластичности. При δS, направленном в зоны II и III, соотношения (2.4) и (2.5) — дифференциально-нелинейные.

Введем в рассмотрение следующие две функции, определенные при $\delta S_2 \geqslant 0$:

$$f_1(\delta S_1, \delta S_2) = \int\limits_{\gamma}^{\theta} g(h)\cos^2\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int\limits_{\gamma}^{\theta} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_2$$

$$f_2(\delta S_1, \delta S_2) = \int\limits_{\gamma}^{\theta} g(h)\cos\eta\sin\eta\, d\eta\, \delta S_1 + \int\limits_{\gamma}^{\theta} g(h)\sin^2\eta\, d\eta\, \delta S_2 \qquad (2.6)$$

где

$$\gamma = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 - \alpha \\ \theta - \pi/2, & \text{если } \pi/2 - \alpha < \theta < \pi/2 + \alpha \end{cases} \qquad (2.7)$$

и θ определяется (2.3).

Тогда, учитывая (2.2) и (2.4), при $\delta S_2 \geqslant 0$ (то есть при $\theta \geqslant 0$) можно записать

$$\delta p_1 = f_1(\delta S_1, \delta S_2), \quad \delta p_2 = f_2(\delta S_1, \delta S_2) \qquad (2.8)$$

Сделаем функцию $\gamma(\theta)$ дифференцируемой функцией своего аргумента. Для этого заменим недифференцируемую особенность (угол) в точке $\theta = \pi/_2 - \alpha$ дугой окружности, и затем радиус этой окружности устремим к нулю. Тогда получим, что при переходе через точку $\theta = \pi/_2 - \alpha$ производная $\dfrac{d\gamma}{d\theta}$ плавно меняется от 0 слева до 1 справа от этой точки. Так измененные функции f_1 и f_2, определенные (2.6), будут теперь дифференцируемыми функциями своих аргументов, а соотношения (2.8) при этом останутся в силе.

Выполним некоторые вспомогательные вычисления, которые понадобятся в дальнейшем.

Рассмотрим два вектора δS^+ и δS^-, компоненты которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\delta S_1^+ + \delta S_1^- > 0; \quad \delta S_2^+ + \delta S_2^- = 0; \quad \delta S_2^+ > 0 \tag{2.9}$$

Тогда, учитывая (2.4) и (2.7), можно записать

$$\begin{aligned} &\delta p_1^+ = f_1(\delta S_1^+, \delta S_2^+), \quad \delta p_2^+ = f_2(\delta S_1^+, \delta S_2^+) \\ &\delta p_1^- = f_1(\delta S_1^-, -\delta S_2^-), \quad \delta p_2^- = f_2(\delta S_1^-, -\delta S_2^-) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим следующую разность и применим теорему о среднем

$$\delta p_1^+ - \delta p_1^- = f_1(\delta S_1^+, \delta S_2^+) - f_1(\delta S_1^-, -\delta S_2^-) =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\Big|_* (\delta S_1^+ - \delta S_1^-) + \frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\Big|_* (\delta S_2^+ + \delta S_2^-)$$

здесь и ниже * означает, что взято значение в некоторой средней точке.

Учитывая условие (2.9), получим

$$\delta p_1^+ - \delta p_1^- = \frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\Big|_* (\delta S_1^+ - \delta S_1^-) \tag{2.11}$$

Аналогично по второй оси:

$$\delta p_2^+ - \delta p_2^- = f_2(\delta S_1^+, \delta S_2^+) + f_2(\delta S_1^-, -\delta S_2^-) =$$

$$= 2f_2(\delta S_1^-, -\delta S_2^-) + \frac{\partial f_2}{\partial(\delta S_1)}\Big|_* (\partial S_1^+ - \delta S_1^-) \tag{2.12}$$

Для входящих сюда производных имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial(\delta S_1)}\Big|_* = \int_{\gamma^*}^{\alpha} g(h)\cos^2\gamma_i\, d\gamma_i = k_1 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial(\delta S_1)}\Big|_* = \int_{\gamma^*}^{\alpha} g(h)\cos\gamma_i \sin\gamma_i\, d\gamma_i = k_2 \tag{2.14}$$

Так как $\gamma^* \geqslant -\alpha$, имеем два следующих неравенства:

$$k_1 \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos^2\gamma_i\, d\gamma_i = g_1 \tag{2.15}$$

$$k_2 \geqslant 0 \tag{2.16}$$

Если вектор δS^- направлен в зону ПН, то, учитывая (2.2) и условие (2.9), можно записать

$$2f_2(\delta S_1^-, -\delta S_2^-) = g_2(\delta S_2^+ - \delta S_2^-)$$

где обозначено

$$g_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta_1 d\eta$$

Если вектор δS^- направлен в зону III (фиг. 3), то представим

$$2f_2(\delta S_1^-, \quad \delta S_2^-) = k_3(\delta S_2^- - \delta S_2^-) \tag{2.17}$$

Выше показано, что f_2 есть неубывающая функция от δS_1 при фиксированном δS_2, следовательно, справедливо неравенство

$$k_3 \leqslant g_3 \tag{2.18}$$

Окончательно (2.11) и (2.12) принимают вид

$$\delta p_1^+ - \delta p_1^- = k_1(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) \tag{2.19}$$

$$\delta p_2^+ - \delta p_2^- = k_2(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) + k_3(\delta S_2^+ - \delta S_2^-)$$

где k_1, k_2, k_3 удовлетворяют неравенствам (2.15), (2.16), (2.17).

Эти соотношения получены для случая, когда нагружение происходило по оси S_1. Они, очевидно, будут верны и для любого нагружения по лучу из начала координат, если считать компонентами векторов приращений напряжений и деформаций их значения в повернутой системе координат, в которой ось абсцисс совпадает с лучом нагружения.

3. *Определение критических нагрузок.* Покажем, что наименьшая нагрузка, при которой происходит разветвление форм равновесия для путей пропорционального нагружения, соответствует случаю, когда приращения напряжений направлены в зону ПН, где зависимость между приращениями напряжений и деформаций определяется деформационной теорией пластичности.

Пусть продолжения δS^+ и δS^- направлены в зону ПН. Тогда из (2.2) имеем следующую связь:

$$\delta p_1 = g_1\delta S_1, \quad \delta p_2 = g_3\delta S_2 \tag{3.1}$$

где обозначено

$$g_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\cos^2\eta d\eta, \qquad g_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(h)\sin^2\eta d\eta$$

Подставляя (3.1) в систему уравнений (1.5), получим следующее уравнение для определения критического значения S_1:

$$\left(\mu S_1 g_1 + \mu S_1\frac{1}{2G} - \cos^2\varphi - \frac{1+2Gg_1}{1+2Gg_3}\sin^2\varphi\right)(\delta S_1^+ - \delta S_1^-) = 0 \tag{3.2}$$

из которого видно, что побочные продолжения возможны при

$$S_1 = \frac{\cos^2 \varphi}{\mu\left(\dfrac{1}{2G} + g_1\right)} + \frac{\sin^2 \varphi}{\mu\left(\dfrac{1}{2G} + g_3\right)} \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь случай, когда хотя бы одно из побочных продолжений направлено в зону НН. Заметим, что система (1.5) не меняется при замене индексов «+» и «—». Поэтому, не нарушая общности, для продолжений δS^+ и δS^- достаточно рассмотреть ситуацию, удовлетворяющую условиям (2.9). Тогда выполняются соотношения (2.19) и (2.20). Используя их, для критического значения S_1 получим

$$S_1 = \frac{\cos^2 \varphi + \dfrac{1+2Gk_1}{1+2Gk_3}\sin^2 \varphi + \dfrac{2Gk_2}{1+2Gk_3}\cos\varphi \sin\varphi}{\mu\left(\dfrac{1}{2G} + k_1\right)} \tag{3.4}$$

Сравнивая значения критических параметров (3.3) и (3.4) и учитывая неравенства (2.15), (2.16) и (2.18), получаем, что наираннее разветвление форм равновесия происходит при побочных продолжениях, направленных в зону ПН.

На основании этого можно сделать вывод, что при пропорциональном нагружении ветвление процесса (потеря устойчивости) происходит при приращениях напряжений, направленных в зону, где соотношения «напряжение—деформация» являются дифференциально-линейными. Именно эти соотношения и надо использовать при расчетах на устойчивость пластин.

Дифференциально-нелинейные соотношения, которые и представляли основную трудность при использовании сингулярного закона пластичности при вычислении критических нагрузок для путей пропорционального нагружения не участвуют. По всей видимости, такого результата можно ожидать и для более широкого класса путей нагружения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 24 VI 1976

Լ. Դ. ՊՈՊՈՎ

ԻԴԵԱԼԱԿԱՆԱՑՎԱԾ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ՕՐԵՆՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է իդեալականացված սալի դեֆորմացիայի ընթացքի բիֆուրկացիան բեռնավորման մակերևույթի վրա եզակիություններով պլաստիկության տեսության շրջանակներում։

Ցույց է տրվում, որ որոշակի պայմանների դեպքում ոչ գծային դիֆերենցիալ առնչությունները լարումների և դեֆորմացիաների աճերի միջև սալերի կայունության ուսումնասիրության համար կատարվող հաշվարկնե-

թում չեն օգտագործվում և կայունությունը որոշվում է պլաստիկության դե-
ֆորմացիոն տեսության հիման վրա։

STABILITY OF AN IDEALIZED PLATE UNDER THE SINGULARITY LAW OF ELASTICITY

L. G. POPOV

Summary

The problem of bifurcation of the deformation process for an idealized plate with a loading surface singularity is considered in terms of the plasticity theory.

It is shown that under certain conditions at least, the differential nonlinear relation between stress and strain increments is not used when the plate's stability is calculated and the stability is estimated in terms of the deformation theory of plasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюшников В. Д.* Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластинки. МТТ, 1968, № 4.
2. *Клюшников В. Д.* О зависимости критических нагрузок от истории нагружения упруго-пластических пластин. Сб. «Механика деформируемых тел и конструкций», М., 1975.
3. *Клюшников В. Д.* Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, 1956, т. XXIII, вып. 4.