ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В РАДИАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе [1] на основе гипотез магнитоупругости тонких тел [2, 3] (в предположении, что влиянием токов смещения можно пренебречь) получены двумерные уравнения магнитоупругости сферической оболочки, находящейся в произвольном неоднородном магнитном поле. Там же, с помощью указанных уравнений, решена задача колебаний сферической оболочки в стационарном радиальном магнитном поле.

В данной работе рассматривается та же задача на основе трехмерных линеаризованных уравнений магнитоупругости. Совместным решением уравнений магнитоупругости оболочки и уравнений электродинамики для среды, окружающей оболочку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред и условиях на бесконечности, определена нормальная компонента индуцированного магнитного поля во всем пространстве. Приведено характеристическое уравнение относительно частоты упругих колебаний оболочки. Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля определены в случае осесимметричных колебаний. Полученные результаты сопоставляются с соответствующими результатами работы [1] и оценивается точность гипотез магнитоупругости тонких тел для данной задачи.

1. Изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса R, изготовленная из материала с конечной электропроводностью σ, находится в стационарном неоднородном магнитном поле $\vec{H}_0(\gamma)$, вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности.

Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости материала оболочки и окружающей среды равны единице ($\mu=\varepsilon=1$).

Ортогональная система координат (α, β, γ) выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам α, β (α — угол долготы, β — угол широты), а γ направлена по нормали к срединной поверхности. Тогда для коэффициентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь $A=R$, $B=R\sin\alpha$, $k_1=k_2=R^{-1}$. В последующем ради сохранения симметричной структуры получаемых выражений приведенные выше значения A и B в расшифрованном виде не будем подставлять, однако будем помнить, что A — величина постоянная, а B не зависит от β [4, 5].

В отношении тонкой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

Задача решается в предположении, что для среды, окружающей оболочку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума.

Вектор напряженности невозмущенного магнитного поля $\vec{H}_0$ определяется следующим образом:

$$\vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1+\gamma/R)^2}\,\vec{n}_\gamma \tag{1.1}$$

удовлетворяет уравнениям магнитостатики $\mathrm{rot}\,\vec{H}_0 = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H}_0 = 0$ и условиям непрерывности на поверхностях оболочки.

В (1.1) H_0 — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ($\gamma = 0$), $\vec{n}_\gamma$ — единичный вектор в направлении координатной линии γ.

Принимая упругие и электромагнитные возмущения малыми, после линеаризации для рассматриваемой задачи получим следующие исходные уравнения и соотношения [1].

Уравнения магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой ($-h < \gamma < h$)

$$\begin{gathered}
\mathrm{rot}\,\vec{h}^{(i)} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\vec{e}^{(i)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(i)}}{\partial t} \\
\mathrm{rot}\,\vec{e}^{(i)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(i)}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{h}^{(i)} = 0
\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\Delta+2)\,w\right] - (1-\nu)\frac{1}{B}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + \\
+\frac{1-\nu}{R}\left(\frac{u}{R} - \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(q_1 + \frac{m_1}{R}\right) \\
\frac{1}{B}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - \frac{h^2}{3R^3}\frac{\partial}{\partial\beta}(\Delta+2)\,w\right] + (1-\nu)\frac{1}{A}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \\
+\frac{1-\nu}{R}\left(\frac{v}{R} - \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{2Eh}\left(q_2 + \frac{m_2}{R}\right) \\
\left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta - \frac{1+\nu}{R}\right)\theta - \frac{h^2}{3R^4}(\Delta+1-\nu)(\Delta+2)\,w - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\
= -\frac{1-\nu^2}{2Eh}\left\{q_3 + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bm_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Am_2)\right]\right\}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{h}^{(i)}$ и $\vec{e}^{(i)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей, $\vec{U}(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещения частиц оболочки, u, v, w — тангенциальные и нормальные перемещения точек срединной поверхности, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, c — электродинамическая постоянная. $\vec{Q}(q_1, q_2, q_3)$, $\vec{m}(m_1, m_2, m_3)$ — силы и моменты электромагнитного происхождения

$$q_1 = \int_{-h}^{h} R_1 d\gamma, \quad q_2 = \int_{-h}^{h} R_2 d\gamma, \quad q_3 = \int_{-h}^{h} R_3 d\gamma$$

$$m_1 = \int_{-h}^{h} \gamma R_1 d\gamma, \qquad m_2 = \int_{-h}^{h} \gamma R_2 d\gamma$$

$$\vec{R}(R_1, R_2, R_3) = \frac{\sigma}{c}\left[\vec{e}^{(i)} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0\right] \times \vec{H}_0 \tag{1.4}$$

$$\theta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Av)\right] + \frac{2w}{R}$$

$$\chi = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bv) - \frac{\partial}{\partial\beta}(Au)\right]$$

$$\Delta = \frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] \tag{1.5}$$

Уравнения электродинамики для вакуума в областях $(-R < \gamma < -h,\ \gamma > h)$

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{e}^{(e)} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \tag{1.6}$$

где $\vec{h}^{(e)}$ и $\vec{e}^{(e)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей, причем индекс $e = 1$ относится к области $\gamma > h$, а $e = 2$ — к области $\gamma < -h$.

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний сферической оболочки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.2), (1.3) и (1.6), решения которых должны удовлетворять следующим граничным условиям на колеблющихся поверхностях оболочки:

$$\vec{h}^{(i)} = \vec{h}^{(e)}, \qquad \vec{e}_\tau^{(i)} = \vec{e}_\tau^{(e)} \quad \text{при} \quad \gamma = \pm h \tag{1.7}$$

а также условиям затухания возмущений на бесконечности и условиям ограниченности в области $\gamma < -h$. В (1.7) $\vec{e}_\tau$ — векторная составляющая вектора $\vec{e}$, параллельная касательной плоскости к поверхности оболочки в рассматриваемой точке.

2. Подставляя (1.1) в уравнения движения (1.3) и пренебрегая тангенциальными составляющими сил инерции, с учетом (1.4), после некоторых преобразований получим

$$(\Delta + 1 - \nu)\theta - \frac{1}{R}\left(\frac{h^2}{3R^2}\Delta + 1 - \nu\right)(\Delta + 2)w -$$

$$-\frac{\sigma H_0^2 R^2}{\rho c^2 c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta - \frac{2w}{R} + \frac{h^2}{R^3}\Delta w\right) - \frac{\sigma H_0 R^2}{2\rho h c^2 c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h} h_1^{(i)} d\gamma = 0$$

$$\left(\frac{h^2}{3R^3}\Delta - \frac{1+\nu}{R}\right)\theta - \frac{h^2}{3R^4}(\Delta + 1 - \nu)(\Delta + 2)w - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+\frac{\sigma h^2 H_0^2}{\rho c^2 c_0^2 R}\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta - \frac{2w}{R} + \frac{1}{3R}\Delta w\right) - \frac{\sigma H_0 R}{2\rho h c^2 c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}\frac{\gamma}{r} h_1^{(i)} d\gamma = 0 \qquad (2.1)$$

Здесь $c_0 = [E/\rho(1 - \nu^2)]^{1/2}$ — скорость звука в материале оболочки, $r = R + \gamma$.

В систему (2.1) входит только нормальная компонента индуцированного магнитного поля. Это означает, что для решения задачи магнитоупругих колебаний оболочки из компонентов индуцированного электромагнитного поля необходимо иметь лишь $h_1^{(i)}$. Из уравнений (1.2), (1.6) для определения нормальной компоненты индуцированного магнитного поля во всем пространстве легко получить следующие уравнения:

в области, занимаемой оболочкой,

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta\Phi^{(i)} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{4\pi\sigma H_0 R^2}{c^2 r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta w + r\left(\theta - \frac{2w}{R} - \frac{1}{R}\Delta w\right)\right] \qquad (2.2)$$

в области вне тела оболочки

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta\Phi^{(e)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.3)$$

с поверхностными условиями [6]

$$\Phi^{(i)} = \Phi^{(e)}, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = R + h \qquad (2.4)$$

где

$$\Phi = r h_1 \qquad (2.5)$$

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля определяются из уравнений электродинамики (1.2) и (1.6) при условиях (1.7).

Таким образом, задача магнитоупругих колебаний оболочки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (2.1)—(2.3), решения которых должны удовлетворять граничным условиям (2.4), условиям однозначности на сфере и условиям ограниченности в области $|\gamma| > h$.

3. Решения уравнений (2.1), (2.2) и (2.3) представим в виде разложения

$$w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} w_n Y_n(\alpha, \beta), \qquad \mathfrak{h} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{h}_n Y_n(\alpha, \beta)$$

$$\Phi^{(i)} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(i)}(r)\, Y_n(\alpha, \beta), \qquad \Phi^{(e)} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(e)}(r)\, Y_n(\alpha, \beta) \tag{3.1}$$

$$Y_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n} (A_{nk} \cos k\beta + B_{nk} \sin k\beta)\, P_n^k(\cos\alpha)$$

где ω — частота колебаний, A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{\| Y_n^k \|^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos\alpha) \cos k\beta \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$B_{nk} = \frac{1}{\| Y_n^k \|^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\alpha, \beta)\, P_n^k(\cos\alpha) \sin k\beta \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$\| Y_n^k \|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_k}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad \varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k = 0 \\ 1 & \text{при } k > 0 \end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \text{ — полиномы Лежандра.}$$

Подставляя (3.1) в уравнения (2.2) и (2.3), для определения $\Phi_n^{(i)}(r)$, $\Phi_n^{(e)}(r)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\Phi_n^{(i)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_n^{(i)}}{dr} - \left(\nu_1^2 + \frac{\lambda_n}{r^2} \right) \Phi_n^{(i)} = f_n(r) \\ &\frac{d^2\Phi_n^{(e)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_n^{(e)}}{dr} - \left(\nu_0^2 + \frac{\lambda_n}{r^2} \right) \Phi_n^{(e)} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь

$$\nu_0^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \nu_1^2 = \nu_0^2 + \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}, \qquad \lambda_n = n(n+1)$$

$$f_n(r) = \frac{4\pi\sigma H_0 R^2\omega}{c^2 r^2}\left[\left(\theta_n - \frac{\lambda_n - 2}{R} w_n\right) r - \lambda_n w_n\right]$$

Уравнения (3.2) интегрируются в функциях Бесселя чисто мнимого аргумента [7]

$$\Phi_n^{(i)} = r^{-1/2}\left[A_n^{(i)} I_{n+1/2}(\nu_1 r) + B_n^{(i)} K_{n+1/2}(\nu_1 r) + F_n(r)\right]$$

$$\Phi_n^{(e)} = r^{-1/2}\left[A_n^{(e)} I_{n+1/2}(\nu_0 r) + B_n^{(e)} K_{n+1/2}(\nu_0 r)\right] \tag{3.3}$$

$$F_n(r) = \int\limits_{R-h}^{r} s^{3/2} f_n(s)\left[I_{n+1/2}(\nu_1 r) K_{n+1/2}(\nu_1 s) - K_{n+1/2}(\nu_1 r) I_{n+1/2}(\nu_1 s)\right] ds$$

Известно, что функция K_ν в начале координат имеет особенность, а функция I_ν неограниченно возрастает при $r \to \infty$, поэтому следует положить $A_n^{(1)} = B_n^{(2)} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (2.4), определяем остальные постоянные интегрирования и, следовательно, интересующие нас величины $\Phi_n^{(i)}$, $\Phi_n^{(e)}$. Выражения постоянных интегрирования и указанных величин ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Принимая $|\nu_1 R| \gg 1$, $|\nu_0 R| \ll 1$ и используя асимптотические формулы функций Бесселя, выражения для $\Phi_n^{(i)}$, $\Phi_n^{(e)}$ упрощаются и принимают вид

$$\Phi_n^{(i)} = \frac{H_0\lambda_n}{r\delta_n}\left[a_n(r) w_n + b_n(r)\theta_n\right]$$

$$\Phi_n^{(1)} = \frac{H_0\lambda_n}{r_1\delta_n}\left[a_n(r_1) w_n + b_n(r_1)\theta_n\right]\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1} \tag{3.4}$$

$$\Phi_n^{(2)} = \frac{H_0\lambda_n}{r_2\delta_n}\left[a_n(r_2) w_n + b_n(r_2)\theta_n\right]\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n}$$

где введены обозначения

$$\delta_n = (\lambda_n + \nu_1^2 r_1 r_2)\,\mathrm{sh}\,2\nu_1 h + [n\nu_1 r_2 + (n+1)\nu_1 r_1]\,\mathrm{ch}\,2\nu_1 h$$

$$a_n(r) = \frac{2\delta_n R}{\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda_n\gamma}{2R}\right) - \delta_{1n}(r)\left[n^2 r_2 - (\lambda_n + 2)R\right] +$$

$$+ \delta_{2n}(r)\left[(n+1)^2 r_1 - (\lambda_n + 2)R\right], \quad r_1 = R + h, \quad r_2 = R - h$$

$$b_n(r) = R^2\left[\delta_{2n}(r) - \delta_{1n}(r) - \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right] \tag{3.5}$$

$$\delta_{1n}(r) = \mathrm{sh}\,\nu_1(r - r_1) - \frac{\nu_1 r_1}{n}\,\mathrm{ch}\,\nu_1(r - r_1)$$

$$\delta_{2n}(r) = \mathrm{sh}\,\nu_1(r - r_2) + \frac{\nu_1 r_2}{n+1}\,\mathrm{ch}\,\nu_1(r - r_2)$$

Подставляя (3.4) в (2.5), с учетом (3.1), найдем величину нормальной компоненты напряженности индуцированного магнитного поля во всем пространстве

$$h_r = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(r)\,Y_n(\alpha,\beta)\exp(\omega t) \tag{3.6}$$

В силу (3.1) и (3.6) из системы (2.1) получим характеристическое уравнение относительно частоты колебаний оболочки

$$\Omega_n^2 - \omega^2 + \frac{\varepsilon_0\beta_0^2 R^2\omega^2}{\mathrm{ch}\,(\lambda_n - 1 + \nu)}\left(1 + \frac{\lambda_n a_{2n}}{2h\delta_n}\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0^2 c_0^2 \beta_0^4 \lambda_n Q_{1n}}{3c^2(\lambda_n - 1 + \nu)}\omega^2 + \frac{\varepsilon_0\beta_0^2 c_0^2 Q_{2n}}{\mathrm{ch}\,(\lambda_n - 1 + \nu)}\omega = 0 \tag{3.7}$$

где

$$Q_{1n} = 1 + \frac{3}{2h\delta_n}\left[a_{1n} + 2a_{2n}\left(1 + \frac{\lambda_n}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{3n}R^2}{h^2} + \frac{2a_{4n}R^2}{h^2}\left(1 + \frac{\lambda_n h^2}{2R^2}\right)\right]$$

$$Q_{2n} = \frac{h^2}{3R^2}(\lambda_n - 1 + \nu)(\lambda_n - 2)\left(1 + \frac{\lambda_n a_{2n}}{2h\delta_n}\right) + \frac{\lambda_n a_{3n}}{2h\delta_n}(\lambda_n - 1 + \nu) +$$

$$+ \frac{\lambda_n h^2}{3R^2}(\lambda_n - 2) + 2\left(1 + \nu + \frac{2\lambda_n h^2}{R^2}\right) - \frac{\lambda_n a_{4n}}{2h\delta_n}(\lambda_n - 2)\left(\frac{\lambda_n h^2}{3R^2} - 1 + \nu\right) -$$

$$- \frac{\lambda_n a_{1n}}{2h\delta_n}\left(1 + \nu + \frac{\lambda_n h^2}{3R^2}\right) \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi\sigma h}{c}, \quad \beta_0 = \frac{V_A}{c_0}, \quad V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

$$a_{1n} = R\int_{r_1}^{r_2}\frac{a_n(r)}{r^2}\,dr, \qquad a_{2n} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{b_n(r)}{r^2}\,dr$$

$$a_{3n} = R\int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma a_n(r)}{r^3}\,dr, \qquad a_{4n} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma b_n(r)}{r^3}\,dr$$

Определение остальных компонент индуцированного электромагнитного поля в общем случае весьма затруднительно. Их определение существенно облегчается в случае осесимметричных колебаний (возмущения не зависят от координаты β, $u_\beta = h_\beta = e_r = e_z = 0$). В этом случае из уравнений электродинамики (1.2), (1.6) в силу (3.6) найдем

$$
\begin{aligned}
e_\beta &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{\lambda_n}\Phi_n(r)\,Y_n^0(\alpha)\exp \omega t \\
h_\alpha &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r}{\lambda_n}\Phi_n(r)\,Y_n^0(\alpha)\exp(\omega t)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Здесь $Y_n^0(\alpha) = Y_n(\alpha, \beta)|_{\beta=0}$.

4. Рассмотренная здесь задача на основе гипотез магнитоупругости тонких тел была решена в работе [1]. Получены формулы для определения компонент индуцированного электромагнитного поля и характеристическое уравнение относительно частоты упругих колебаний оболочки. Выражение компоненты h_γ и характеристическое уравнение, полученные в работе [1], имеют вид

$$
\begin{gathered}
h_\gamma^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n, \qquad h_\gamma^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+2} Q_n, \qquad h_\gamma^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n+1} Q_n \\
Q_n = -\frac{4\pi\sigma\omega H_0 R^2}{\nu_n^2 c^2}\left(\theta_n - \frac{2w_n}{R}\right) Y_n(\alpha, \beta)\exp(\omega t)
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$$
1 + b_1\omega_n + b_2\omega_n^2 + b_3\omega_n^3 = 0 \tag{4.2}
$$

где

$$
b_1 = \frac{\sigma_0\Omega_n R^2}{d_n c h} + \frac{\sigma_0 h c_0^2\beta_0^2}{3c\Omega_n R^2(\lambda_n - 1 + \nu)}\left[\lambda_n^2 + (\lambda_n - 2)(\lambda_n - 1 + \nu) + \frac{6R^2(1+\nu)}{h^2}\right]
$$

$$
b_2 = 1 + \frac{\lambda_n\sigma_0^2 c_0^2\beta_0^2}{3d_n c^2(\lambda_n - 1 + \nu)}(\lambda_n\beta_0^2 + \lambda_n - 2)
$$

$$
b_3 = \frac{\sigma_0\Omega_n R^2}{d_n c h(\lambda_n - 1 + \nu)}(d_n\beta_0^2 + \lambda_n - 1 + \nu)
$$

$$
d_n = \lambda_n + \frac{R}{h}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \omega_n = \frac{\omega}{\Omega_n}
$$

$$
\Omega_n^2 = \frac{gE}{\gamma_0 R^2}(\lambda_n - 2)\frac{1 + \beta^2(\lambda_n - 1)^2}{\lambda_n - 1 + \nu}, \quad \frac{\gamma_0}{g} = \rho, \quad \beta^2 = \frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)}
$$

$$
\nu_n^2 = \lambda_n + \frac{4\pi\sigma\omega R^2}{c^2} + \frac{(2n+1)R}{2h}
$$

Здесь γ_0 — удельный вес материала оболочки, g — ускорение силы тяжести, Ω_n — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

Приведем также выражения остальных компонент индуцированного электромагнитного поля в случае осесимметричной деформации

$$e_\beta^{(i)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\lambda_n}Q_n^0$$

$$e_\beta^{(1)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\lambda_n}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1}Q_n^0$$

$$e_\beta^{(2)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\lambda_n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n}Q_n^0$$

$$h_\alpha^{(i)} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{2\lambda_n}\left|1-(2n+1)\frac{1}{h}\right|Q_n^0$$

$$h_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n+1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+2}Q_n^0$$

$$h_\alpha^{(2)} = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R}{n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{n-1}Q_n^0$$

$$Q_n^0 = Q_n|_{\gamma=0}$$

Принимая $|\nu_1^2 h^2| \ll 1$, формулы (3.6), (3.9) и уравнение (3.7) совпадают соответственно с формулами (4.1), (4.3) и с уравнением (4.2).

Таким образом, точность гипотез магнитоупругости тонких тел для рассматриваемой задачи характеризуется условиями

$$\left|\frac{\omega R}{c}\right| \ll 1, \qquad |\nu_1 R| \gg 1, \qquad |\nu_1^2 h^2| \ll 1$$

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 19 I 1977

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Գ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳՆԴԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՃԱՌԱՎԻՂԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում մագնիսաառաձգականության եռաչափ գծայնացված հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրվում է գնդային թաղանթի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը ստացիոնար մագնիսական դաշտում, երբ մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթին ուղղահայաց։ Համատեղ լուծելով թաղանթի մագ-

նիսաառաձգականության հավասարումները նրան շրջապատող միջավայրի էլեկտրոդինամիկայի հավասարումների հետ, որոշվում է ինդուկցված մագնիսական դաշտի նորմալ բաղադրիչը։ Թաղանթի առաձգական տատանումների հաճախականության որոշման համար բերվում է խարակտերիստիկ հավասարում։ Ինդուկցված էլեկտրոմագնիսական դաշտի մյուս բաղադրիչները որոշվում են առանցքասիմետրիկ տատանումների դեպքում։

Բերված արդյունքները համեմատվում են այն արդյունքների հետ, որոնք ստացվում են նույն խնդիրը բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի օգնությամբ լուծելիս և գնահատվում է նշված հիպոթեզի ճշտությունը դիտարկվող խնդրի համար։

VIBRATION OF ELECTROCONDUCTING SPHERICAL SHELL IN THE RADIAL MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The problem of magnetoelastic vibration of a spherical shell in the stationary radial magnetic field is considered. The normal component of the induced magnetic field is determinated all over the space by means of a simultaneous solving both the magnetoelasticity equations of shell and the equations of electrodynamics for environment of the shell. The characteristic equation of the shell elastic vibration modes is derived. The other components of the induced electromagnetic field are obtained for the case of axisymmetric vibration. The results obtained are compared with the similar ones of the same problem solved by means of the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies, and the accuracy of that hypothesis is estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* Об уравнениях магнитоупругости тонких сферических оболочек. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949, 265—275.
5. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974, 128—132.
6. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962, 82—89.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971, 398—403.