

В. Т. ГОЛОВЧАН, Н. Я. ОСТАШЕВСКАЯ

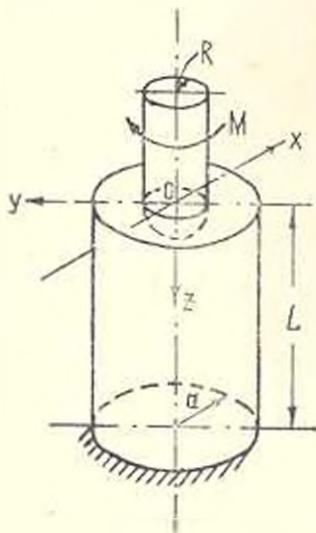
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПОЛУСФЕРИЧЕСКИМ ШТАМПОМ

Построено точное решение контактной задачи о кручении полусферическим штампом упругого цилиндра конечной длины с использованием рядов по присоединенным функциям Лежандра и цилиндрическим функциям. Произвольные постоянные удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, допускающей решение методом редукции.

Задача о кручении цилиндра конечной длины, содержащего сферическую полость, решена в [1]. Аналогичная задача в случае упругого цилиндра бесконечной длины рассматривалась в [2]. Большой теоретический материал по проблеме кручения и подробный обзор содержится в [3].

§ 1. Постановка задачи

Упругий цилиндр длиной L и радиусом поперечного сечения a на торце $z = 0$ имеет полусферическую выемку радиуса R . Торце $z = L$ закреплен неподвижно. С цилиндром через поверхность выемки жестко соединен штамп с полусферическим наконечником радиуса R . К штампу приложен внешний крутящий момент M , в результате чего цилиндр испытывает деформацию кручения. Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния цилиндра.



Фиг. 1.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет смещение точек цилиндра $u_\varphi(\varphi, z)$, в цилиндрической системе координат (φ, r, z) , соответствующей декартовым координатам (x, y, z) (фиг. 1), имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_\varphi = 0 \quad (1.1)$$

Решение уравнения (1.1) необходимо подчинить следующим краевым условиям:

$$u_\varphi|_{z=L} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} u_\varphi - \frac{1}{r} u_\varphi \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u_\varphi|_{z=0, r=R} = 0, \quad u_\varphi|_{r=R} = \psi \cdot R P_1'(\cos \psi)$$

Второе и третье условия (1.2) соответствуют отсутствию касательных напряжений на боковой поверхности цилиндра $r = a$ и на его торце $z = 0$. Четвертое условие фиксирует равенство смещений штампа и цилиндра на

поверхности контакта $r = R$. Здесь Φ — угол поворота штампа, (r, θ, φ) — сферическая система координат, P_1^i — присоединенная функция Лежандра $\left(P_n^i(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} P_n(x) \right)$.

§ 2. Периодические решения уравнения (1.1)

Сначала получим систему внешних периодических (с периодом δ) решений уравнения (1.1), допускающих путем несложных преобразований представление в сферических координатах (r, θ, φ) и в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) . С этой целью рассмотрим ряд

$$\zeta = \sum_k \frac{1}{r_k} P_1^i(\cos \theta_k) \quad (2.1)$$

где $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ — сферическая система координат с полюсом на оси z , причем $z_k = z - k\delta$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Функция ζ удовлетворяет уравнению (1.1) и является периодической с периодом δ . Поэтому она может быть еще представлена в виде

$$\zeta = B_0 \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_1(\psi_n \rho) \cos(\psi_n z), \quad \psi_n = \frac{2\pi}{\delta} n, \quad (\rho \neq 0) \quad (2.2)$$

Здесь K_1 — модифицированная цилиндрическая функция второго рода, а B_n — подлежащие определению постоянные.

Сравнивая выражения (2.1), (2.2) и учитывая интегральное представление функции Макдональда

$$K_1(\psi_n \rho) = \frac{\rho}{\psi_n} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\psi_n z)}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} dz, \quad (n \neq 0)$$

приходим к следующим значениям постоянных B_n :

$$B_0 = \frac{2}{\delta}, \quad B_n = \frac{4\psi_n}{\delta}, \quad (n \neq 0) \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) в равенство (2.2) позволяет преобразовать его к виду

$$\zeta = \frac{4}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \psi_n K_1(\psi_n \rho) \cos(\psi_n z), \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_n = 1 \quad (2.4)$$

($\rho \neq 0$), ($n \neq 0$)

Таким образом, получены два представления периодического по z частного решения уравнения (1.1): (2.1) и (2.4). Исходя из этого решения, можно построить полную систему периодических по z решений уравнения (1.1). С этой целью действуем на ζ последовательностью операторов

$$D_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \zeta_n &= D_n \zeta = \sum_k \frac{1}{r_k^{n-1}} P_n^1(\cos \theta_k) = \\ &= \frac{4}{\delta} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \psi_s K_s(\psi_s \rho) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \cos \psi_s z \quad (2.5) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots; \rho \neq 0) \end{aligned}$$

При выводе (2.5) использовано равенство

$$\frac{1}{r^{n-1}} P_n^1(\cos \theta) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-1} \left| \frac{1}{r^2} P_1^1(\cos \theta) \right|$$

которое следует из результатов работы [4].

Выделим из системы (2.5) нечетные и четные по z решения

$$\begin{aligned} \zeta_{2n} &= \sum_k \frac{1}{r_k^{2n-1}} P_{2n}^1(\cos \theta_k) = \frac{4}{\delta} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \psi_s^{2n} K_s(\psi_s \rho) \sin(\psi_s z) \quad (2.6) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2n-1} &= \sum_k \frac{1}{r_k^{2n-1}} P_{2n}^1(\cos \theta_k) = \frac{4}{\delta} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \psi_s^{2n-1} K_s(\psi_s \rho) \cos(\psi_s z) \quad (2.7) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Функции (2.6) и (2.7) являются периодическими по z с периодом δ , на что в дальнейшем будет указывать запись $\zeta_n(\delta)$. Составим комбинации

$$\zeta_{2n} = \zeta_{2n}(2\delta) - \frac{1}{2} \zeta_{2n}(\delta), \quad \zeta_{2n-1} = \zeta_{2n-1}(2\delta) - \frac{1}{2} \zeta_{2n-1}(\delta)$$

После некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \zeta_{2n} &= \sum_m \frac{1}{r_m^{2n-1}} P_{2n}^1(\cos \theta_m) - \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{r_k^{2n-1}} P_{2n}^1(\cos \theta_k) = \\ &= \frac{2}{\delta} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \psi_{2s+1} \right)^{2n} K_s \left(\frac{1}{2} \psi_{2s+1} \rho \right) \sin \left(\frac{1}{2} \psi_{2s+1} z \right) \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2n-1} &= \sum_m \frac{1}{r_m^{2n-1}} P_{2n-1}^1(\cos \theta_m) - \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{r_k^{2n-1}} P_{2n-1}^1(\cos \theta_k) = \\ &= \frac{2}{\delta} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \psi_{2s+1} \right)^{2n-1} K_s \left(\frac{1}{2} \psi_{2s+1} \rho \right) \cos \left(\frac{1}{2} \psi_{2s+1} z \right) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Как следует из полученных соотношений

$$\psi_{2n}|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial z} \Big|_{z=\frac{\delta}{2}} = 0 \tag{2.10}$$

$$\psi_{2n-1} \Big|_{z=\frac{\delta}{2}} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{2n-1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \tag{2.11}$$

Таким образом, система функций (2.8) может быть использована при решении задачи кручения упругого цилиндра длиной $L = \frac{1}{2}\delta$ с полусферической выемкой на торце $z = 0$, если этот торец закреплен неподвижно, а торец $z = \frac{1}{2}\delta$ не нагружен. При этом внешние касательные усилия предполагаются приложенными на поверхностях $\rho = a$ и $z = R$. Система (2.9) будет использована ниже для решения задачи, сформулированной в § 1.

§ 3. Решение задачи

Представим решение рассматриваемой контактной задачи в виде

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \psi_{2n-1} + \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i-1} I_1 \left(\frac{1}{2} \psi_{2i-1} \rho \right) \cos \left(\frac{1}{2} \psi_{2i-1} z \right) \tag{3.1}$$

где I_1 — модифицированная цилиндрическая функция первого рода. Смещение (3.1) удовлетворяет первому и третьему граничным условиям (1.2) для $\delta = 2L$. Произвольные постоянные A_{2n-1} и B_{2i-1} должны быть определены в результате выполнения второго и четвертого условий (1.2).

Решение (3.1) легко преобразуется к цилиндрическим координатам с помощью равенства (2.9). В итоге получаем

$$u_i(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} [B_{2i-1} I_1(x_{2i-1}\rho) + Q_{2i-1} K_1(x_{2i-1}\rho)] \cos(x_{2i-1}z) \tag{3.2}$$

$$\rho > 0$$

$$Q_{2i-1} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p-1} \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-2)!} (x_{2i-1})^{2p-2}$$

$$x_{2i-1} = \frac{1}{2} \psi_{2i-1} = \frac{\pi}{2L} (2i-1)$$

Подставив (3.2) во второе граничное условие (1.2), приходим к следующим алгебраическим соотношениям:

$$B_{2i-1} I_2(x_{2i-1}a) - K_2(x_{2i-1}a) Q_{2i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \tag{3.3}$$

Для выполнения четвертого условия (1.2) преобразуем смещение (3.1) к сферическим координатам r, θ, φ . Это можно сделать, используя равенство

$$I_1(x_{2i-1}) \cos(x_{2i-1} z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} (x_{2i-1} r)^{2p-1}}{(2p)!} P_{2i-1}^1(\cos \theta) \quad (3.4)$$

и соответствующие теоремы сложения для внешних решений уравнения Лапласа в сферических координатах [5]. Разложение (3.4) может быть получено, если записать его с неопределенными коэффициентами в точке $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ и сравнить ряды по степеням r .

После некоторых преобразований имеем

$$u_i(r, \theta) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1}{r^{2i}} + (L_{2i-1} + S_{2i-1}) r^{2i-1} \right] P_{2i-1}^1(\cos \theta) \quad (3.5)$$

где введены следующие обозначения:

$$S_{2i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{(2i)!} \sum_{p=1}^{\infty} (x_{2p-1})^{2i-1} B_{2p-1}$$

$$L_{2i-1} = \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p-1} \left[L_{2i-1}^{(p)}(4L) - \frac{1}{2} L_{2i-1}^{(p)}(2L) \right] \quad (3.6)$$

$$L_{2i-1}^{(p)}(x) = 2 \frac{(2i+2p-2)!}{(2p-2)! (2i)!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mx)^{2i-2p+1}}$$

Смещение (3.5) будет удовлетворять четвертому краевому условию (1.2), если

$$\frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1}{R^{2i}} + (L_{2i-1} + S_{2i-1}) R^{2i-1} = \gamma_{2i-1}^1 4R \quad (3.7)$$

$$(\gamma_{2i-1}^1 - 1), \quad \gamma_{2i-1}^1 = 0 \quad \text{при } i \neq 1; \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом, в результате выполнения условий (1.2) получены две группы алгебраических соотношений (3.3) и (3.7), которые представляют собой замкнутую бесконечную систему алгебраических уравнений с неизвестными A_{2i-1} и B_{2i-1} . Данная система заменой неизвестных

$$B_{2i-1} I_1(x_{2i-1} a) = -\gamma_{2i-1}^1, \quad \frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1}{R^{2i}} = \gamma_{2i-1}^1$$

преобразуется в систему нормального типа, если $R < a$. Это легко доказывается с использованием результатов работы [1]. Благодаря этому система уравнений (3.3) и (3.7) может быть решена с требуемой степенью точности методом редукции.

§ 4. Численные результаты

Напряжения кручения на поверхности контакта цилиндра со штампом находим с учетом выражения (3.5)

$$\frac{1}{\mu} \tau_{\varphi r} = \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\varphi} \right) \Big|_{r=R} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} A_{2i-1} \frac{1+2i}{R^{2i+1}} + (2i-2) (L_{2i-1} + S_{2i-1}) R^{2i-2} \right] P_{2i-1}^1(\cos \theta) \quad (4.1)$$

Условие равновесия штампа имеет вид

$$M = -2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \tau_{\varphi r} d\theta = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} P_i^1(\cos \theta) \tau_{\varphi r} d \cos \theta \quad (4.2)$$

Подставив в (4.2) напряжение (4.1), получаем с учетом условия ортогональности присоединенных функций Лежандра следующее равенство:

$$M = 2\pi \mu A_1 \quad (4.3)$$

Таким образом, момент, который передается на штамп со стороны цилиндра, зависит лишь от одной неопределенной постоянной решения (3.1).

Напряжения во внутренних точках упругого цилиндра определяются следующими равенствами:

$$\frac{1}{r} \tau_{\varphi z} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \frac{\partial}{\partial z} \xi_{2n-1} - \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1} B_{2i-1} I_1(x_{2i-1} \rho) \sin(x_{2i-1} z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi_{2n-1} = \frac{\partial}{\partial z} \zeta_{2n-1} (4L) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \zeta_{2n-1} (2L)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \zeta_{2n-1}(x) = -(2n-1) \sum_k \frac{1}{r_k^{2n-1}} P_{2n}^1(\cos \theta_k)$$

$$\frac{1}{\rho} \tau_{\varphi r} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \xi_{2n-1} + \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1} B_{2i-1} I_2(x_{2i-1} \rho) \cos(x_{2i-1} z) \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \xi_{2n-1} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \zeta_{2n-1} (4L) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \zeta_{2n-1} (2L)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \right) \zeta_{2n-1}(x) = -\sum_k \frac{1}{r_k^{2n-1}} P_{2n}^2(\cos \theta_k)$$

Таким образом, все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние цилиндра, могут быть найдены по формулам (3.1), (4.3) и (4.4) после решения системы алгебраических уравнений, получающейся путем усечения бесконечной системы (3.3) и (3.7). В процессе вы-

числений рассматривалась система восьмого порядка, то есть предполагалось, что $A_{2j-1} = B_{2j-1} = 0$ при $j \geq 5$. При этом геометрические параметры цилиндра изменялись в пределах:

$$1.5R < a \leq 3.0R, \quad \Delta a = 0.5R, \quad 1.5R \leq L \leq 3.0R, \quad \Delta L = 0.5R$$

$$\text{и } 5R \leq L < 1.5R, \quad \Delta L = 2R$$

После определения неизвестных A_{2j-1} и B_{2j-1} производились вычисления безразмерного смещения $u_z = \frac{u_z}{R\Phi}$ и безразмерных напряжений

$\tau_{rz} = \frac{1}{R\Phi} \tau_{rz}$ и $\tau_{\theta z} = \frac{1}{R\Phi} \tau_{\theta z}$ в следующих интервалах изменения координат:

$$0 < z < L, \quad \Delta z = 0.25R; \quad 0 < r < a, \quad \Delta r = 0.25R$$

$$\text{при } L > 5R, \quad 0 < z < R$$

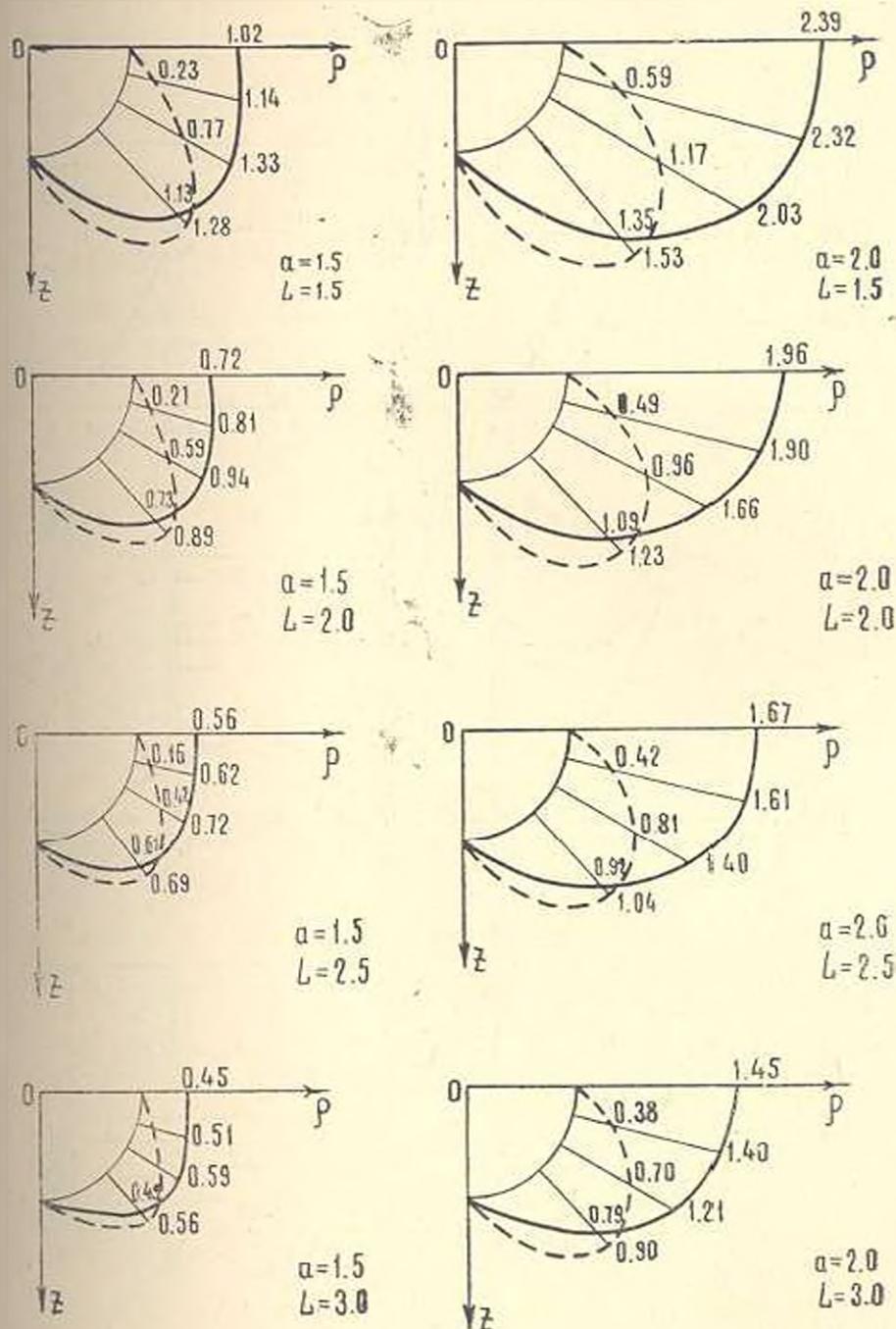
Результаты вычислений представлены на фиг. 2—5, причем сплошной линией соответствует напряжение τ_{rz} , пунктирной — напряжение $\tau_{\theta z}$, и штрихпунктирной — смещение u_z .

На фиг. 2 приведены графики распределения напряжений в точках на поверхности контакта цилиндра со штампом. Характерной особенностью показанных распределений является то, что максимальным является напряжение τ_{rz} , причем для $a = 1.5R$ этот максимум достигается внутри интервала $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, а для $a = 2.0R$ — в точке $\theta = \frac{\pi}{2}$. С увеличением L уровень контактных напряжений понижается.

На фиг. 3—4 показаны смещение и напряжения в различных поперечных сечениях короткого цилиндра (фиг. 3) и в два раза более длинного (фиг. 4). Как следует из этих графиков, с увеличением z преобладающими становятся напряжения τ_{rz} , причем кривые τ_{rz} и u_z все более распрямляются.

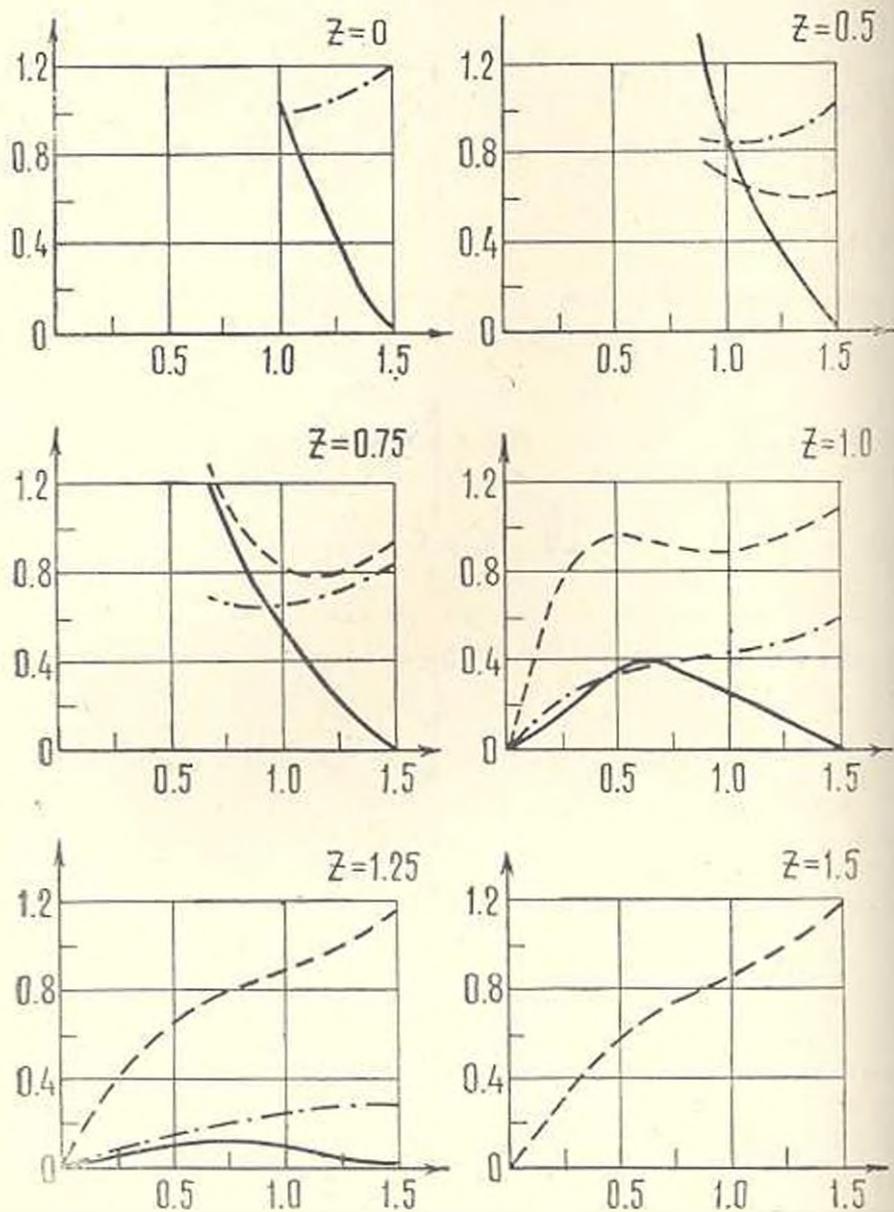
Последнее в большей мере проявляется для более длинного цилиндра, и для $z \geq 1.75R$ графики τ_{rz} и u_z практически прямолинейны. Однако максимальные смещение и напряжения на $\sim 12\%$ превосходят смещение и напряжения в точках на боковой поверхности цилиндра, вычисленные по теории Сен-Венана кручения длинных стержней. Напряжение же $\tau_{\theta z}$ для указанных z является весьма незначительным (теория Сен-Венана не учитывает этих напряжений).

Представляют интерес также приведенные на фиг. 5 кривые зависимости между $\beta = \frac{D}{D_1}$ и L . Здесь D — коэффициент при $\frac{\Phi}{L}$ в формуле для крутящего момента (4.3), а D_1 — жесткость цилиндра на кручение по теории Сен-Венана. С увеличением L параметр β стремится к единице сперва для $a = 1.5R$ и снизу для $a = 2.0R$ и $a = 2.5R$.



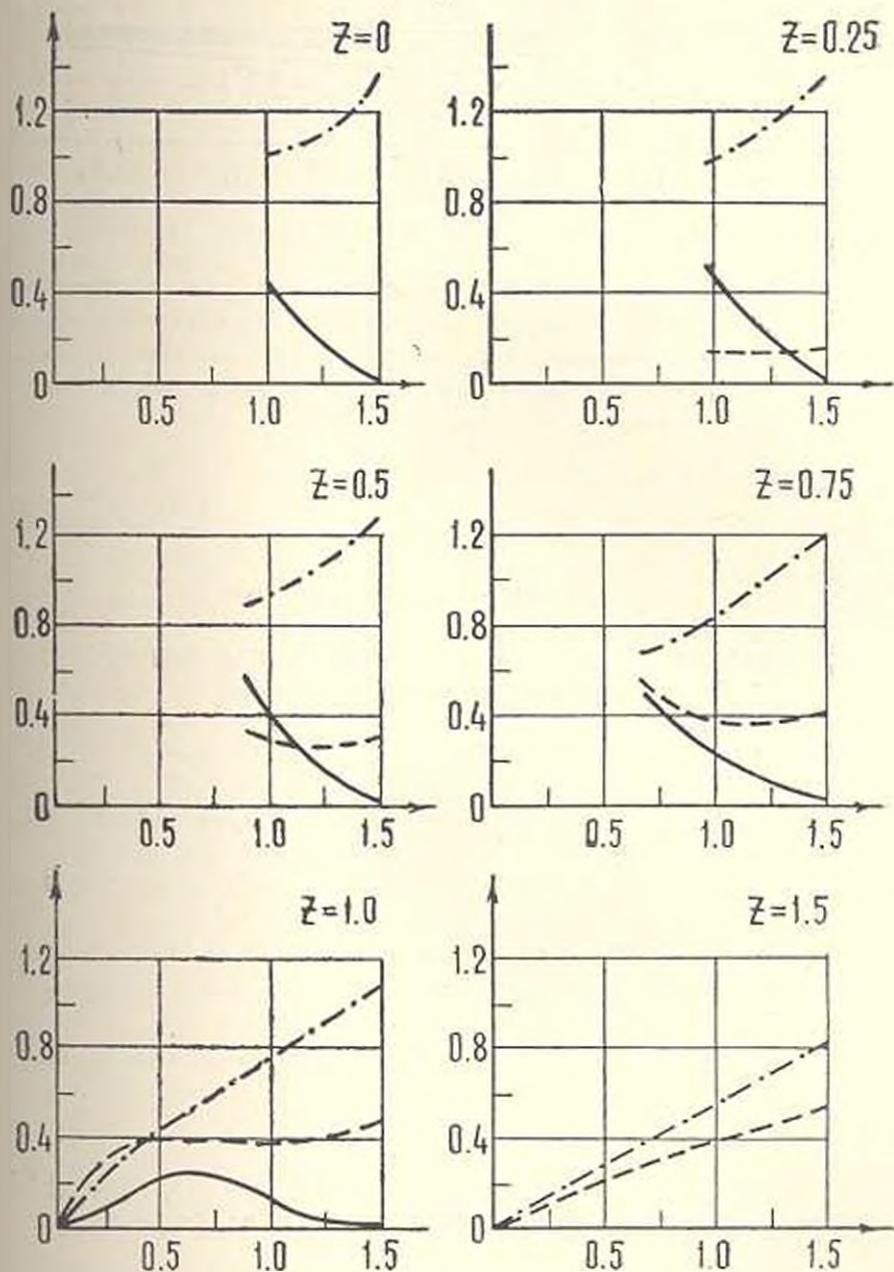
Фиг. 2.

$$\alpha=1.5; L=1.5$$

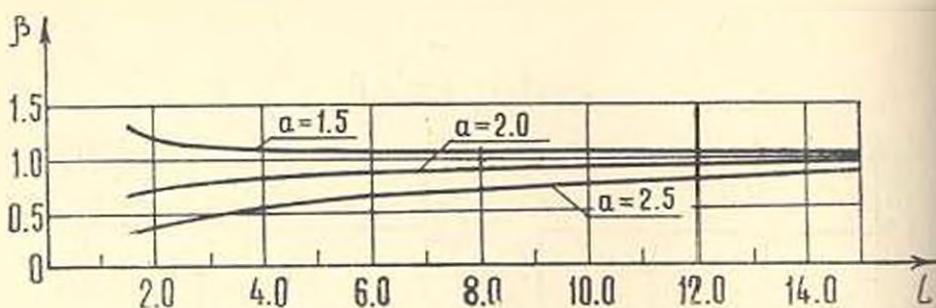


Фиг. 3.

$$a=1.5; L=3.0$$



Фиг. 4.



Фиг. 3

Заметим наконец, что усечение бесконечной системы алгебраических уравнений (3.3) и (3.7) до восьмого порядка для рассмотренных геометрических параметров цилиндра обеспечивает достаточную точность результатов. Так, например, погрешность выполнения краевых условий во всех случаях составляет лишь доли процента.

Украинский научно-исследовательский институт гидротехники и мелиорации

Поступила 15 VI 1976

Վ. Տ. ԳՈՒՎՉԱՆ, Ն. ԵՄ. ՕՍՏԱՇԵՎՍԿԱՅԱ

ԿՐՍԱԳՆԳԱՅԻՆ ԳՐՈՇՄՈՎ ԱՌԱՋՊԱԿԱՆ ԳՎԱՆԻ ՈՂՈՐՄԱՆ
ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Կառուցվել է կիսաղեղաչին դրոշմով վերջավոր երկարություն ունեցող առավելագույն դրանի սլորման կոնտակտային խնդրի ճշգրիտ լուծումը:

Օգտագործվել են բոլոր կետանդրի միազգիված ֆունկցիաների և գլանային ֆունկցիաների շարքերը:

Ինտեգրման կամավոր հաստատունները որոշվում են հանրահաշվական դժային համասարումների անփերջ սխառեմից, որը լուծվում է սեղուկցիայի եղանակով:

Ինքված րապմաթիվ դժադրերում հաշվումների արդյունքները ցույց են տրվում խնդրի պարամետրի կոնկրետ արժեքների համար:

THE CONTACT PROBLEM ON TORSION OF AN ELASTIC
CYLINDER BY A SEMI-SPHERICAL DIE

V. T. GOLOVCHAN, N. Y. OSTASHEVSKAYA

S u m m a r y

An accurate solution is suggested for a contact problem on torsion of a finite length elastic cylinder by a semi-spherical die, using

the series of Legendre associated functions and cylindrical functions. The arbitrary constants obey the infinite system of linear algebraic equations permitting the solution by the reduction method. The results of calculations for concrete values of the problem parameters are shown in numerous diagrams.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Головачев В. Т. Кручение цилиндра конечной длины со сферической полостью. Прикладная механика, 1972, т. 8, вып. 3.
- 2 Chih-Bing Ling. Torsion of a circular cylinder having a spherical cavity. Quart. of Appl. Mathem., 1952, 10, 2.
- 3 Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
- 4 Erdelyi A. Zur Theorie der Kugelwellen. Physica, 1937, 4, 2.
- 5 Гузь А. Н., Головачев В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. К., «Наукова думка», 1972.