

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТОВ ВОЛН
В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ

Распространение слабых ударных волн в недиспергирующих средах рассматривалось в [3—5].

Существенно дисперсионный и диссипативный характер имеет распространение волн в реагирующих средах, уравнения коротких волн для которых получены и исследованы в [6, 9, 10]. Помимо изучения свойств решений указанных уравнений представляет интерес рассмотрение волн с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Общий метод для получения уравнений для модулированных колебаний в диспергирующих нелинейных средах предложен в [1, 2, 13].

1. В данной статье комбинированием метода [3, 5] с методом [1] выводятся уравнения для медленно изменяющихся параметров для произвольной волны в трехмерной постановке. Подобная задача, например, возникает при дифракции плоской монохроматической волны (или волны, близкой к ней) от плоского или пространственного угла, причем трехмерная (двухмерная) задача имеет место вблизи лучей, проходящих через точки или линии касания отраженных от угла волн с точечными волнами, произведенными вершиной угла, или, по принятой терминологии, на границе области дифракции [8, 15].

Для значительных расстояний от отражающего угла становятся существенными искажения профиля волны из-за дисперсии и нелинейности, и требуется вывести уравнения, описывающие слабые изменения амплитуды и фазы волны. В силу стационарности задачи имеется бесчисленное множество конфигураций фронтов волн, каждая из которых характеризуется некоторым параметром t , представляющим время, прошедшее с момента ее отражения от вершины угла.

Поэтому в качестве «основной» волны выбирается, для определенности, невозмущенная точечная волна (которая связана только со свойствами среды, а не формой отраженной или падающей волны), произведенная в момент $t = 0$ вершиной угла и рассматриваемая в момент t , уравнение которой берем в виде $\bar{r}_1 = \omega t$, $\bar{r}_1 = \omega t_1(\bar{r})$, где ω — основная частота процесса, $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки. Рассматриваются для общности те участки волны, для которых решение зависит не только от координаты x_1 по нормали к волне, но также и от координат x_2, x_3 , отсчитываемых в поверхности волны.

Величина $\tau = t_1 - t$ является эйконалом для точечной невозмущенной волны (в отсутствие нелинейного искажения). В качестве координат, отсчитываемых в поверхности волны, удобно выбрать [5] координаты

θ, ζ , где $\theta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$ дают уравнения лучей для точечной волны, причем $dx_2 = H_2 d\theta$; $dx_3 = H_3 d\zeta$; H_2, H_3 — параметры Ламе.

Вначале рассматриваются линейные уравнения. Как и в нестационарной задаче [5] без ограничения общности можно вместо линейной системы уравнений рассматривать линейное уравнение для одной из функций. Чтобы показать это, для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + b_{ij} u_j = a_{ij}^{(k)'} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (1.1)$$

для рассматриваемого движения, близкого к монохроматической волне, можно полагать $u_j = U_j(\bar{r}, t) \exp(i\bar{z}_1 - i\omega t)$, где U_j есть медленно меняющаяся функция аргументов, что с точки зрения порядков (как принято в геометрической оптике) эквивалентно предположению о больших значениях ω . Предполагая, что $b_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$, $a_{ij}^{(k)'} \sim \frac{a_{ij}^{(k)}}{\omega}$,

$C_{ij} \sim \frac{B_{ij}}{\omega}$, и порядок $a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$, $B_{ij} u_j$ одинаков, можно разрешить уравнения относительно, например, $u_1 = \Phi_1$,

$$\Phi_1 = \Psi e^{i\bar{z}} \quad (1.2)$$

и получить

$$\Delta \Phi_1 = P(u_j), \quad \Delta = \det \left\{ a_{ij}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} + B_{ij} \right\}$$

где $P(u_j) = -A_{1i} C_{ij} u_j - A_{1i} a_{ij}^{(k)'} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P'$, A_{1i} — алгебраические дополнения элементов a_{1i} в Δ ; P' есть результат действия операторов в Δ на переменные коэффициенты, который приводит к производным, по крайней мере, на порядок ниже, чем в Δ , и то же относится к A_{1i} , поэтому для больших ω , предполагая, что для основных членов имеют место порядки $\Delta \sim \omega^n$, можно найти $P \sim \omega^{n-1}$. Поскольку в окончательных уравнениях оставляются члены порядка ω^{n-1} , можно в P вместо u_j подставить их значения из характеристических уравнений

$$a_{ij}^{(k)} x_k u_j + B_{ij} u_j = 0, \quad x_k = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_k}$$

реницировать только множитель $e^{i\bar{z}}$ в Φ_1 , при этом слагаемое P будет содержать лишь множитель Ψ , и оно влияет только на лучевое решение.

Поскольку слагаемое $-\Psi \frac{d \ln K}{dt}$, где K есть линейное одномерное по нормали к волне, или лучевое, решение, включается в окончательное

чительное уравнение (1.11), учитывая все члены, содержащие Ψ в порядке ω^{n-1} , при дальнейших выкладках слагаемые с Ψ порядка ω^{n-1} можно не выписывать вплоть до окончательного уравнения, что значительно облегчает действие с операторами, позволяя производить с ними действие в порядке ω^{n-1} как с операторами с постоянными коэффициентами. При нахождении оператора от произведения $\Psi e^{i\bar{\tau}}$ можно пользоваться формулой Лейбница, согласно которой для любого линейного оператора по переменной x

$$L(f\bar{\tau}) = \bar{\tau}L(f) + L\left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x}\right) f + \frac{1}{2} L\left(\left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x}\right)^2\right) f \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} + \dots$$

то есть оператор следует записывать в виде ряда (многочлена) по оператору $\frac{\partial}{\partial x}$. Указанную формулу можно применить к оператору

Δ от $\Psi e^{i\bar{\tau}}$ по переменным x_j, t . Следует учесть, что для неплоской волны и неоднородной среды коэффициенты в Δ , а также компоненты нормали к волне $\alpha_j = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_j}$ могут зависеть от x_j, t . Тогда в указанную

формулу следует добавить слагаемые, соответствующие действию операторов $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial t}$ на переменные коэффициенты. Однако, как по-

казано ниже, в основном порядке ω^{n-1} это отразится лишь на слагаемых, содержащих Ψ , которые включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое решение. Применяя оператор Δ к произведению (1.2), учитывая медленную зависимость Ψ от x_k, t и оставляя слагаемые основного порядка ω^{n-1} (см. далее), можно получить

$$\begin{aligned} & \Delta \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_2}, \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_3}, -\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} \right) \Psi e^{i\bar{\tau}} + \left(-i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) \left(\Delta_{-i \frac{\partial}{\partial x_k}} e^{i\bar{\tau}} \right) + \\ & + \left(i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \left(\Delta_{i \frac{\partial}{\partial t}} e^{i\bar{\tau}} \right) + \frac{1}{2} \left\{ -\Delta \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_k \partial x_j} + \right. \\ & \left. + 2\Delta \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_k \partial t} - \Delta \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right\} e^{i\bar{\tau}} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Полагая $\alpha_j = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, 3$), учитывая дисперсионное уравнение линейной задачи

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega) = 0 \quad (1.4)$$

и вводя производные по $\bar{\tau}, \theta, \zeta$ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_j \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

можно (1.3) записать в виде

$$\begin{aligned} \chi &= \alpha_k \Delta_{z_k} \\ i\Delta_{z_0} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial z} - i\Delta_{z_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - i\Delta_{z_k} \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\Delta_{z_k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_k \partial x_j} - 2\Delta_{z_k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_k \partial t} + \Delta_{z_k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

В силу уравнений лучей

$$\frac{dx_k}{dz} = \Delta_{z_k}, \quad \frac{dt}{dz} = -\Delta_{z_0} \quad (1.6)$$

можно записать для производной вдоль них $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{\chi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{\Delta_{z_0}} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \chi$, где учтено, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \Delta_{z_k} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} \Delta_{z_k} = 0 \quad (1.7)$$

Из уравнения (1.5), выражая в нем производные по x_k через производные по лучевым переменным, заменяя в малых более высокого порядка вторых производных от Ψ $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\chi}{\Delta_{z_0}} \frac{\partial}{\partial z}$ и учитывая (1.7), можно получить

$$i\Delta_{z_0} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + Z - \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \theta} \Lambda + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \zeta} \Lambda_1 = 0 \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(\Delta_{z_k} \frac{\chi}{\Delta_{z_0}} - \Delta_{z_k^2} \alpha_j \right) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \\ \Gamma &= \sum_{j, k=1}^3 \alpha_k \alpha_j \Delta_{z_k \alpha_j} + \Delta_{z_0} \chi^2 \frac{1}{\Delta_{z_0}^2} - 2 \frac{\chi}{\Delta_{z_0}} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \Delta_{z_k} \\ Z &= -\frac{1}{2} \Delta_{z_k^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \Psi \end{aligned}$$

а Λ_1 получается из Λ заменой θ на ζ .

Вообще говоря, для неплоской волны в неоднородной среде при получении (1.8) из (1.2) следует учесть влияние операторов на $\alpha_k = \alpha_k(x_j)$. Однако, в основных порядках это отразится лишь на слагаемых, содержащих Ψ , которые включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде сла-

гаемого, содержащего лучевое или немодулированное решение K . В самом деле, по предположению зависимость Ψ от τ, θ, ζ, t является медленной, что с точки зрения порядков эквивалентно предположению о больших значениях эйконала τ , принимаемому в геометрической оптике. Последнее равносильно тому, что велики x_j, t или ω , причем для определенности при определении порядков считаем ω большим и порядок членов в (1.4) равным ω^0 . Кроме того, естественно, принять для медленных переменных в Ψ порядок

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \sim \frac{\Psi}{V \omega}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \sim |\sqrt{\omega} \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \sim |\sqrt{\omega} \Psi$$

при которых все члены в (1.8) имеют порядок ω^{n-1} . Тогда действие операторов на переменные коэффициенты в (1.3) дает порядок ω^{n-1} лишь в слагаемых, содержащих Ψ (при однократном действии операторов в Δ на α_k), причем члены с Ψ включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое решение, поэтому вычисления, проведенные при получении (1.8), являются обоснованными и для неоднородной среды, что также видно из иного вывода уравнений, приведенного далее. В п. 2 рассматривается задача дифракции для недиспергирующей среды, для которой $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega)$ предполагается однородной функцией. Сюда относятся идеальные сплошные среды, которые могут быть неоднородными. Тогда $\omega \Delta_{\omega} = -\lambda$, и, как видно из (2.3), $\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \sim \frac{1}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \sim \frac{\Psi}{\omega}$. В

типичной задаче дифракции и для диспергирующей среды $\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \sim \frac{\Psi}{\omega}$.

Так как $\lambda, \lambda_1 \sim \Delta_{\omega}$ в порядке ω^{n-1} , последние три слагаемых в (1.8) выпадают (кроме указанных задач, также и в случае узких пучков в диспергирующей среде зависимость Ψ от τ значительно меньше, чем от θ, ζ).

Для вычисления слагаемого Z в (1.8) можно, как и для нестационарной задачи при отсутствии дисперсии [5], показать, что при определении коэффициентов при производных $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial \zeta}$ в уравнениях движения среды можно совмещать оси $x_{1,2,3}$ с осями подвижного трехгранника с началом в данной точке касания волны, причем ось x_1 направлена по нормали к точечной волне. Последующие вычисления до формулы (1.11) верны также и для нестационарной задачи [5]. Обозначим через s_1, s_2 длины дуг линий пересечения волны $\tau = 0$ с поверхностями $\theta = \text{const}, \zeta = \text{const}$ соответственно. Тогда $\theta = \theta(s_1), \zeta = \zeta(s_2)$, и имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s_2} = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s_1} = \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \Delta x_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s_1} = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s_2} = \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = \frac{1}{H_2}, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \Delta x_j = 0$$

Поскольку ось x_2 направлена по нормали к волне, $\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = 0$, $\frac{\partial x_1}{\partial s_2} = 0$ и тогда получится

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= \frac{\Delta_1 \frac{\partial x_2}{\partial s_1} - \Delta_2 \frac{\partial x_2}{\partial s_2}}{H_2 D}, & \eta_{22} &= \frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_2} \Delta_1}{H_2 D}, & \eta_{23} &= -\frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_2} \Delta_2}{H_2 D} \\ \zeta_{21} &= -\frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \Delta_1 - \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \Delta_2}{H_3 D}, & \zeta_{22} &= \frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \Delta_2}{H_3 D}, & \zeta_{23} &= -\frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \Delta_1}{H_3 D} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$D = \Delta_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} - \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \right)$$

где для удобства обозначено $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$. Следует также учесть соотношения, получаемые из (1.5) при $\omega = \text{const}$, $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$

$$\begin{aligned} \Delta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \Delta_3 &= 0, & \Delta_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_1 &= 0 \\ \Delta_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \right)^2 + 2\Delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \Delta_{\beta\beta} + \Delta_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} &= 0 \\ \Delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \Delta_{\alpha\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_{\beta\gamma} + \Delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} &= 0 \\ \Delta_{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \right)^2 + 2\Delta_{\alpha\gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + \Delta_{\gamma\gamma} + \Delta_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

С учетом (1.10) слагаемое Z в (1.8) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{2D^2}{\Delta_1^3} Z &= \frac{1}{H_2^2} \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial s_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial s_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1}{H_3^2} \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \sigma^2} + \\ &+ \frac{2}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \right\} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial \sigma} \end{aligned}$$

Теперь можно выбрать оси x_2 , x_3 по касательным к линиям s_1 , s_2 . Тогда (1.8) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & i\Delta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_0 - \frac{1}{2} \Gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \Lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \beta \partial z} + \Lambda_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma \partial z} + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta_0 \left(\frac{1}{H_2^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + 2 \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \gamma} \right) \Psi - \\
 & - i\Delta_0 \Psi \frac{d \ln K}{dt} = 0 \tag{1.11}
 \end{aligned}$$

где K есть одномерное по нормали к волне линейное решение без дифракционных эффектов, даваемых $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$ или лучевое решение для Ψ , причем последнее слагаемое в (1.11) добавлено взамен отброшенных производных низшего порядка. Проведенные вычисления особенно наглядны для недиспергирующей среды, для которой производные α по β и γ имеют тот же смысл, что и коэффициенты в уравнениях вблизи нестационарных слабых ударных волн [5], а искажение профиля волны, то есть отличие функции Ψ в (1.2) от K , для указанной среды происходит из-за нелинейности, причем в следующем параграфе рассматривается характерная задача для нелинейной среды без дисперсии. Для диспергирующей среды связь более сложная, а для диссипативной среды уравнения (1.6) становятся комплексными, и полученные далее уравнения для амплитуд и фаз требуют уточнения. Имеет смысл уточнить коэффициенты в (1.11) для уравнений, описывающих окрестность слабых ударных волн [3—6, 10]. Имеет место [5, 10] в окрестности волны Σ

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \frac{H_1}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \beta'^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \gamma'^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \beta' \partial \gamma'} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \\
 & - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{d \ln A}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda + 1}{H_1} u \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{H_1^2 \partial z^2} + k \frac{\partial^4 u}{H_1^3 \partial z^4} = 0 \\
 & dz = \frac{dx_1}{H_1}
 \end{aligned}$$

причем последние слагаемые характеризуют диссипацию и дисперсию, штрихи поставлены для различия с α, β, γ в осредненных уравнениях (1.11).

Записывая $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0 = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} V_i$, где $V_i = \Delta \frac{dx_i}{dt}$ есть групповая скорость точек волны Σ и отбрасывая нелинейный член, можно получить дисперсионное уравнение (1.4) в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta = \omega + V_i \beta_i - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \beta'^2} \beta_i^2 + \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \gamma'^2} \beta_i^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \beta' \partial \gamma'} \beta_i^2 \right) - \nu \Delta^2 + k \omega^3 \\
 \approx \Delta_0 \approx 1
 \end{aligned}$$

что, после подстановки в (1.10), позволяет определить коэффициенты в (1.11), причем при малых ν и k получается указанное выше совпадение

производных Δ' по α и Δ по α, β, γ . Кроме того, имеет место [7] $\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2}\right)_k = \frac{1}{24x^2k}$. В свою очередь можно записать [7] $\Psi = ae^{i\varphi}$, где a, φ — медленно меняющиеся значения амплитуд и возмущенной фазы (эйконала) решения в окрестности волны $\bar{\tau}_2 = \omega t$. Подставляя Ψ в (1.11) и отделяя действительную и мнимую части, можно получить уравнения в линейной задаче

$$\begin{aligned} & \varphi_{tt} + \frac{1}{2} \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \varphi_y^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \varphi_z^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \varphi_y \varphi_z \right) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\Delta_\alpha}{\alpha \Delta_\omega} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} a_{yy} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} a_{zz} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} a_{yz} \right) + \\ & + \frac{1}{2\alpha \Delta_\omega} \Gamma(a^2 \bar{\tau}_1^2 - a_{zz}) + \frac{1}{\alpha \Delta_\omega} \Lambda H_2(a \varphi_z \varphi_y - a_{yz}) + \\ & + \frac{1}{\alpha \Delta_\omega} \Lambda_1 H_2(a \varphi_z \varphi_x - a_{xz}) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} (a^2)_{tt} - a^2 \frac{d \ln K^2}{dt} + \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega} \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} (a^2 \bar{\tau}_y)_y + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} (a^2 \bar{\tau}_z)_z + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} (a^2 \varphi_y)_z + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} (a^2 \bar{\tau}_z)_y \right\} - \frac{1}{\Delta_\omega} \Gamma(a^2 \bar{\tau}_1)_t + \\ + \frac{1}{\Delta_\omega} \Lambda H_2 \{ (a^2 \bar{\tau}_1)_y + (a^2 \varphi_y)_z \} + \frac{1}{\Delta_\omega} \Lambda_1 H_2 \{ (a^2 \bar{\tau}_1)_z + (a^2 \bar{\tau}_z)_y \} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь $x_2 = y, x_3 = z$.

Значения производных α по β, γ в задаче магнитной газодинамики для недиспергирующей среды конкретизированы в [5]. Можно рассмотреть ту же задачу в приближении нелинейной геометрической оптики. Пусть $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$ есть дисперсионное уравнение нелинейной задачи [1], причем $\omega \approx \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right) a^2$, где $\omega = \omega_0$ есть линейное уравнение дисперсии волн. Тогда фаза или эйконал $F(\bar{r}, t) = \bar{\tau}(\bar{r}, t) + \varphi(\bar{r}, t)$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_2 - \omega_0^{(0)} t$, $\omega_0^{(0)} = \omega_0(x_0, \beta_0, \gamma_0)$ есть фигурирующая в (1.1) в роли ω невозмущенная частота [1]. Имеет место для медленно меняющихся величин

$$\omega(\bar{r}, t) = - \frac{\partial F}{\partial t} = \omega_0^{(0)} - \varphi_t, \quad \bar{k}(\bar{r}, t) = \nabla F(\bar{r}, t) = \bar{k}_0 + \Delta \varphi$$

$$\bar{k}_0 = (x_0, \beta_0, \gamma_0), \quad a = x_0 + \varphi_x, \quad \beta = \beta_0 + \varphi_y, \quad \gamma = \gamma_0 + \varphi_z$$

* При $k=0$ следует учитывать кубичную нелинейность.

Отсюда получится

$$\begin{aligned}
 -\varphi_t = & \bar{V}\nabla\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2} \varphi_x^2 + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial \beta^2} \varphi_y^2 + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial \gamma^2} \varphi_z^2 + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x\partial\beta} \varphi_x\varphi_y + 2 \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x\partial\gamma} \varphi_x\varphi_z + 2 \frac{\partial^2\omega_0}{\partial \beta\partial\gamma} \varphi_y\varphi_z \right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2} \right)_0 a^2 \quad (1.12')
 \end{aligned}$$

где $\bar{V} = \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x}, \frac{\partial\omega_0}{\partial \beta}, \frac{\partial\omega_0}{\partial \gamma} \right)$ дает лучевую скорость.

В силу (1.9) имеет место $\partial\theta/\partial x = -\Delta_2/\Delta_3 H_2$, $\frac{\partial\tau}{\partial x} = -\Delta_1/\Delta_3 H_3$, и

тогда $\varphi_x = \varphi_{,x} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \varphi_y + \frac{\partial x}{\partial \gamma} \varphi_z$. Учитывая, что (1.10) имеет место также и при замене Δ на $\omega = \omega_0(x, \beta, \gamma)$, можно получить соотношения, в силу которых (1.12') примет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_z = & \frac{\partial\omega_0}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \varphi_y^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} \varphi_z^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta\partial\gamma} \varphi_y\varphi_z \right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2} \right)_0 a^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega_0}{\partial a^2} x^2 z^2 + x \left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial^2\omega_0}{\partial a\partial\beta} \right) \varphi_x \varphi_y + \\
 & + x \left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x\partial\gamma} \right) \varphi_x \varphi_z = 0
 \end{aligned}$$

При указанном выборе осей имеет место $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$, поэтому можно значения Γ из (1.6) и Λ , Λ_1 из (1.8) записать в виде

$$\begin{aligned}
 \Gamma = & x^2 \left(\Delta_{22} + \Delta_{33} \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} - 2 \frac{\Delta_2}{\Delta} \Delta_{23} \right) = -\Delta_{22} x^2 \frac{\partial^2\omega_0}{\partial a^2} \\
 \Lambda = & -\frac{x}{H_2} \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial x} \Delta_{22} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \Delta_{23} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial\omega_0}{\partial x} \Delta_{33} + \Delta_{33} \right) = \\
 = & \frac{x}{H_2} \Delta_{22} \left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x\partial\beta} \right) \\
 \Lambda_1 = & \frac{x}{H_3} \Delta_{33} \left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial x\partial\gamma} \right)
 \end{aligned}$$

Тогда можно видеть, что вышенаписанное уравнение для φ , после отбрасывания нелинейного члена, совпадает с (1.12), в котором отброшены дифракционные члены, и окончательно получится

$$\begin{aligned}
 \varphi_t + & \frac{1}{2} \frac{\Delta_0}{\Delta_0} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \varphi_y^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} \varphi_z^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta\partial\gamma} \varphi_y\varphi_z \right) - \\
 - & \frac{1}{2} \frac{\Delta_0}{a\Delta_0} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} a_{yy} + \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} a_{zz} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta\partial\gamma} a_{yz} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Lambda H_2}{a \Delta_0} (a \varphi_z \varphi_y - a_{zy}) + \frac{\Lambda_1}{a \Delta_0} H_3 (a \varphi_z \varphi_x - a_{zx}) + \\
 & + \frac{1}{2a \Delta_0} \Gamma (a_{zz} - a z^2) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 a^2 = 0
 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) получено из общих рассмотрений работы [5], а также сравнением полученных различными способами уравнений (1.12) и (1.12') для φ . Что касается уравнения (1.13), то слагаемое K , фигурирующее в нем, должно получаться из закона сохранения возмущенной энергии волны, имеющем место в одномерной постановке [14] $\rho_0 \sum v^2 \frac{H_i^2}{c_n} = \text{const}$, где Σ — площадь волны внутри заданной лучевой трубки, c_n — нормальная скорость волны относительно частицы, ρ — плотность среды, v — возмущенная скорость частиц, причем K определится через v из условий совместности на волне. Коэффициент $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0$ в (1.14) должен определяться из нелинейного дисперсионного уравнения $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$. Общий способ определения такого уравнения дается методом Витема [1]. Пусть уравнения движения среды получаются вариацией лагранжиана $\int L(\Phi'_i, \Phi'_{x_j}, \Phi') dx dt$, где $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для малых амплитуд можно за основное решение выбрать $\Phi' = a \cos \psi$, $\psi = \alpha x_j - \omega t$. Подставляя указанное решение в функционал, вводя затем осредненный лагранжиан

$$L(\omega, \alpha_j, a^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(-\omega \Phi'_i, \alpha_j \Phi'_i, \langle \Phi' \rangle) d\psi$$

где все a выражены через одну из них из условий совместности, можно для малых a записать $L = a^2 L_0(\alpha_j, \omega) + \frac{a^4}{2} G(\alpha_j, \omega)$. Оставляя только первое слагаемое в правой части и варьируя по a^2 , можно получить [1] $L_0(\alpha_j, \omega) = 0$, то есть дисперсионное уравнение в линейной постановке, $L_0 = \Delta$. Варируя L по a^2 , можно найти $L_0(\alpha_j, \omega) + \frac{1}{2} a^2 G(\alpha_j, \omega) = 0$, что даст искомое соотношение $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$.

Как и в работе [7] (Приложение А), можно показать, что из соотношения $\omega = \omega(\alpha_j, a^2)$ получается уравнение (1.12) или более общее соотношение (1.14) с дифракционными членами. Подставляя a^2 из (1.14) в равенство $L = -\frac{a^4}{2} G(\alpha_j, \omega)$, где в G можно вместо ω , α_j подставить их невозмущенные значения, затем подставляя L в уравнение $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_j} \right) = 0$, в которых

по j проводится суммирование от 1 до 3, $x_1 = z$, можно показать, что слагаемые, содержащие старшие производные в указанном уравнении, совпадут с соответствующими слагаемыми в (1.13), а недифференцируемые члены вида $\text{const } a^2$ дадут слагаемое $-a^2 \frac{d \ln K^2}{dt}$ в (1.13). Та-

ким образом, как и в [7], где рассмотрена плоская волна в однородной среде, показано, что вариация L по z приводит к уравнению (1.13) для a^2 .

В плоской задаче $z_z = a_z = \Lambda_1 = 0$ условие действительности характеристик $F = 0$ уравнений (1.12), (1.15) без вторых производных a^2

$$J = a^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} n_z^2 + 2\Lambda n_z H_x n_y + \Delta_x \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} n_y^2$$

$$J \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right) > 0; \quad n_z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad n_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

первое слагаемое в J дает условие продольной устойчивости волны, а последнее слагаемое в J дает условие поперечной устойчивости

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 \left(-\frac{\partial^2 a}{\partial \beta^2} \right) > 0$, и для вогнутой части медленной магнитозвуковой

волны, для которой $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} > 0$, должно быть $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 < 0$, то есть чем больше a^2 , тем меньше скорость волны, и вогнутость сохраняется.

Указанное условие $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 < 0$ требует проверки вычислением.

Учет вторых производных a увеличивает область устойчивости до

$$-Y^2 < 4a_0^2 J \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 < 0$$

В двумерной задаче при отсутствии дисперсионных эффектов, заменяя $\alpha(\beta, \omega)$, β на $\beta(\alpha, \omega)$, α из (1.11) можно найти

$$i\Delta_\omega \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_z + \frac{1}{2} \Delta H_2^{-2} \beta''(\alpha, \omega) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - i\Delta_\omega \Psi \frac{d \ln K}{dt} = 0 \quad (1.15)$$

где $\Gamma = 0$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \theta} \approx 0$, штрихом обозначены производные по α .

* В пространственной задаче условие устойчивости записывается

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 \left(a^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial a^2} n_z^2 + 2\Lambda n_z H_x n_y + 2\Lambda_1 n_z H_1 n_x + \Delta_x K_1 \right) > 0$$

$$K_1 = \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} n_y^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial \gamma^2} n_z^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \gamma} n_y n_z$$

2. Уравнение (1.15) соответствует линейной периодической во времени задаче, решение которой можно получить из решения нестационарной задачи в окрестности касания разрывной полпы произвольной формы S точечной волной для произвольной линейной недиссипативной среды при отсутствии дисперсионных эффектов, имеющего вид при $\theta > 0$. [5]

$$u = \frac{1}{\pi} \frac{A}{|k_1 - k_2|} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)(t - \tau_1)}}{\theta - \theta_0} \quad (2.1)$$

$$t > \tau_1; \quad u = 0, \quad t < \tau_1$$

с помощью преобразования Лапласа по t в виде ($s = -i\omega$)

$$u = \frac{1}{\pi} \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}} \int_0^\infty e^{-st} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)(t - \tau_1)}}{\theta - \theta_0} dt \quad (2.2)$$

Здесь преобразование Лапласа берется по «быстрой» переменной, входящей в эйконал $(t - \tau_1)$. A есть величина лучевого решения на точечной волне, кривизны k_1, k_2 [5] точечной волны и начальной волны, из которой получилась данная волна S , считаются постоянными (они вычисляются на волне $t = \tau_1$, поэтому их можно считать функциями $\tau_1 \approx t$), c_0 есть значение нормальной проекции к волне групповой скорости в начальной точке. θ — угловая координата, θ_0 — значение θ в точке касания волн [5].

Вычисляя интеграл, можно получить широко известную из теории [8, 11, 15] отражения акустических волн от угла формулу при $\theta > \theta_0$.

$$\bar{u} = \frac{e^{-s\tau_1}}{2\sqrt{k_1 - k_2}s} A e^{\frac{s(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)}} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{1}{k}\sqrt{s}\right) \right\}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}} \quad (2.3)$$

где $\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-x^2} dx$ есть интеграл Френеля. Следует отметить,

что формула для u дает решение в окрестности касания волн для периодической задачи в произвольной среде. Отождествляя \bar{u} с $\Phi_2 e^{-i\omega t}$, из (1.1) можно получить в линейной задаче

$$\Psi = \frac{A}{2\sqrt{k_1 - k_2}s} \lambda_1\left(\frac{1}{k}\sqrt{s}\right), \quad \lambda_1(\xi) = e^{\xi^2} [1 - \Phi(\xi)] \quad (2.4)$$

причем, как видно из решения, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} \approx \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \approx 0$. Подставляя Ψ в (1.15) и учитывая формулу, связывающую k_1 с уравнением кривой нормалей к волне $\mathfrak{F}(\alpha, \omega)$ [5]

$$\frac{dk_1}{dt} = - \frac{\omega \Delta_3}{\Delta_{\omega}} \frac{\beta''}{H_2 c_0} \quad (2.5)$$

можно убедиться, что уравнение (1.15) удовлетворится при выполнении соотношения $K = A$, что еще раз подтверждает тот факт, что K есть значение лучевого решения для точечной волны.

При $\theta < \theta_0$ имеет место (2.1) для $t > \tau_1$, причем выбирается ветвь арктангенса $\arctg(-x) = \pi - \arctg x$; при $t < \tau_1 - \frac{1}{k^2}$, то есть впереди волны S , $u = 0$, а между волной и точечной волной ($\tau_1 = t$) $u = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$ [5]. Тогда можно получить, подобно (2.2),

$$\frac{\sqrt{k_1 - k_2}}{A} u = \frac{e^{-s\tau_1}}{2s} e^{\frac{s}{k^2}} \left\{ 1 + \Phi\left(\frac{1}{-k} \sqrt{s}\right) \right\} \quad (2.6)$$

причем $\Psi = e^{s\tau_1} u$ так же, как и (2.4), удовлетворяет уравнению (1.15). Используя асимптотические представления для функции $\Phi(x)$

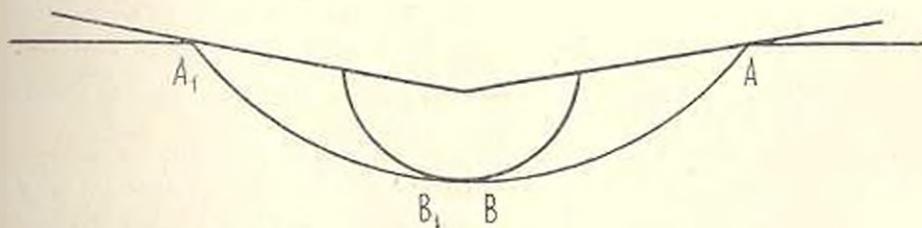
$$\Phi\left(\frac{1}{|k|} \sqrt{s}\right) \approx 1 - \frac{|k|}{\sqrt{\pi} \sqrt{s}} e^{-\frac{s}{k^2}}, \quad \left| \frac{\sqrt{s}}{|k|} \right| \gg 1$$

можно получить из (2.3) вблизи точечной волны

$$\Psi_p = a_p e^{i \frac{3\pi}{4}}, \quad a_p = A x, \quad x = \frac{\sqrt{c_0 \frac{1}{2\pi}}}{\omega^2 (\theta - \theta_0)}$$

что дает решение на точечной волне вдали от точки касания волн. То же решение можно получить из решения (2.1) в указанной области. Поскольку в линейной задаче вблизи точечной волны $\tau_p = \frac{3\pi}{4}$ естественно в нелинейной задаче также считать, что в основном порядке Φ_p , а не зависят от θ , тогда (1.14), (1.15) дают

$$a_p = A x, \quad \tau_p = - \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 A^2 x^2 dt + \frac{3\pi}{4} \quad (2.7)$$



Фиг. 1.

Что касается окрестности точки B фиг. 1 касания волн, то в ней имеет место

$$\begin{aligned}
 (a^2)_t|_z - a^2 \frac{d \ln A^2}{dt|_z} + \frac{\Delta_3 \beta''}{\Delta_m} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) &= 0 \\
 \varphi_t|_z + \frac{1}{2} \frac{\Delta_3 \beta''}{\Delta_m} \frac{1}{H_2^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta_3 \beta''}{a \Delta_m} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 a^2 &= 0
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $\theta_0 - \theta \sim 1$, $\theta < \theta_0$, линейное решение (2.6) дает $\Psi = \frac{A \exp\left(\frac{s}{k^2}\right)}{c_0 \sqrt{k_1 - k_2} s}$ а решение нелинейных уравнений (2.8) имеет вид

$$a = \frac{A}{c_0 \sqrt{k_1 - k_2} \omega}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)} - \int_0^t \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 \frac{A^2}{c_0^2(k_1 - k_2)\omega^2} dt \quad (2.9)$$

В окрестности B линейное решение по (2.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \Psi e^{i\varphi} &= p + iq, \quad p = \frac{A}{\sqrt{\pi} \sqrt{k_1 - k_2} \omega} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \cos T d\tau_1 \\
 q &= \frac{A}{\sqrt{\pi} \sqrt{k_1 - k_2} \omega} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \sin T d\tau_1
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

причем $T = \tau_1^2 - \frac{\omega}{k^2} + \omega\tau_1 + \frac{\pi}{4}$; $a = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}$, $\varphi = \arctg \frac{q_0}{p_0}$; p_0 , q_0 — значения p , q при $\tau = 0$. Если отбросить дифракционный член в уравнении для φ , система уравнений (2.8) может быть записана в виде

$$\varphi_t + \frac{c_2}{2\omega} \frac{dk_2}{dt} \varphi_0^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 A^2 b^2 = 0, \quad (b^2)_t + \frac{c_0}{\omega} \frac{dk_1}{dt} A^2 (b^2 \varphi_0)_t = 0 \quad (2.11)$$

где $a^2 = A^2 b^2$. Обозначая $\varphi_t = u$, $\varphi_0 = v$ и дифференцируя первое уравнение по u , можно привести (2.11) к системе уравнений первого порядка по u , v , b^2 , которую можно решать методом характеристик, взяв в качестве начальных условий линейное решение (2.10). Нелинейное уравнение для Ψ дается (1.15), где в левой части добавлено $-\Delta_m |\Psi|^2 \Psi \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0$. Отметим, что указанное простое решение (2.3)

получено для недиспергирующей среды. Впрочем, и при наличии дисперсии можно показать, повторяя вычисления [5, 12] для периодической волны, что (2.3) имеет место в дифракционной области. Только значения A , c_0 , $k_{1,2}$ есть уже функции ω . Для этого следует уравнение движения среды [12] $A_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + A_3 \bar{u} = A_4 U$, где $A_{1,2,3}$ — ма-

трицы, зависящие от ω , U — значение вектора \bar{u} за начальной волной с уравнением $\tau_0 = 0$ или $y_0 = y_0(x_0)$, решать методом Фурье, причем, как и в [12], можно записать для постоянных коэффициентов

$$a(x - x_0) + \beta(a, \omega)(y - y_0) = -\tau_2 - \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{2c_0(k_1 - k_2)} + \\ + \frac{k_1 - k_2}{2c_0} \left(\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} - x_0 \right)^2$$

причем в отличие от нестационарной задачи и в соответствии с методом, используемым в дифракции Френеля, следует интегрировать в пределах $-\tau_0 < \tau < \infty$, $0 < x_1 < \infty$ в области позади волны $\tau_0 = 0$, тогда получается решение (2.3). Те же результаты методом [5] распространяются на переменные коэффициенты, для которых снова выполняется (2.3), (1.15), (2.5). Типичным примером являются уравнение Клейна-Гордона, а также вышенаписанное уравнение для u при $\nu = 0$. Следует отметить, что в нелинейной задаче при отсутствии дисперсии в периодической волне образуются, начиная с некоторого расстояния, ударные волны, что ограничивает для такой среды применение уравнений (2.11), выведенных для плавно-меняющихся амплитуд. Уравнение же для u при $k \neq 0$ имеет непрерывный профиль решения [7], что тем более верно для произвольной диспергирующей среды с сильной дисперсией.

3. Можно получить также уравнения для медленных изменений параметров вблизи каустики, вблизи которой решение определяется переменными

$$\bar{x}_i = (\bar{x} - \bar{x}^0) \bar{k}, \quad y_1 = (\bar{x} - \bar{x}^0) \bar{N}, \quad \bar{x} = \{x_i\}, \quad \bar{k} = \{k_i\}, \quad i=1, 2, 3 \quad (3.1)$$

\bar{x} — радиус-вектор точки A касания выбранного луча с каустикой, y_1 — расстояние по нормали от точки $\{x_i\}$ до каустики, x_1 — время пробега волны вдоль луча от A до основания нормали на каустике.

В силу линейного решения имеют место порядки $y_1 \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, $x_1 \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}}$.

$$\omega \sim \frac{1}{x_1}. \quad \text{Записывая} \quad p_i = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad p_i = \tau_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + N_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} =$$

$$= -1 + (\bar{x} - \bar{x}^0) \frac{\partial \bar{k}}{\partial t}, \quad \text{можно, разлагая } \Delta(ip_1, -ip_1, \bar{x}) \text{ по степеням}$$

малых операторов и удерживая величины порядка $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, получить

$$e^{-i\omega t} \Delta(ip_1, -ip_1, \bar{x}) \Phi_1 = -\Gamma_{01} \Delta_{01}(\bar{x}, -x^0) \left(\frac{\partial x_1^1}{\partial t} - \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} \quad (3.2)$$

где учтено уравнение лучей « $\Delta_{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = \Delta_{x_i}$ » и введены величины $\bar{\alpha}_i$, α_i вместо α_i , α_i' п. 1, причем $\bar{\alpha}_i = \omega \alpha_i$, α_i' есть значение α_i в A . Обозначая $\lambda_1 y_1 = -\omega \Delta_{\alpha_i} (x_i - x_i^0) \left(\frac{\partial \alpha_i^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right)$, из уравнения $\Delta \Phi_1 = 0$ можно получить в линейной задаче

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} - \lambda_1 \Psi = 0, \quad x = \frac{\lambda_1}{\frac{1}{2} \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j} \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.3) линейной задачи есть функция Эйри

$$\Psi = v(y_1 \sqrt[3]{-\lambda_1}) \quad (3.4)$$

Для уравнения (3.3) можно искать решение в виде медленно меняющихся амплитуд и фаз волны $\Psi = a e^{i\varphi}$. Тогда после отделения действительной и мнимой части получится

$$a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2} + \lambda_1 a = 0, \quad a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial a}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0 \quad (3.5)$$

Отбрасывая $\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}$ или дифракционное слагаемое [6], можно найти решение уравнений (3.5) в виде

$$a = \frac{\text{const}}{\sqrt{\partial \varphi / \partial y_1}}, \quad \partial \varphi / \partial y_1 = \mp \sqrt{-\lambda_1}, \quad \varphi = \pm \sqrt{-\lambda_1} \frac{2}{3} (-y_1)^{3/2} \quad (3.6)$$

верхний знак соответствует падающей на каустику, нижний — отраженной волнам. Решение (3.6) является асимптотикой (3.4) на некотором удалении от каустики. Оно имеет особенность на каустике, то есть при $y_1 = 0$, а то время как (3.4) аналитично. Следует отметить, что учет квадратичной нелинейности для медленно меняющихся амплитуд в недиспергирующей среде не дает отличных от нуля добавок в (3.3), поскольку при осреднении соответствующие члены выпадают из функционала $\int L dx dt$. Поэтому для учета нелинейных слагаемых следует [6] записать нелинейное дисперсионное соотношение (где эйконал $\omega, x_i + \varphi \omega$, φ зависит лишь от y_1),

$$\omega \approx \omega_0(\bar{k}_0, \bar{x}^0) + \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) + \\ + \frac{\partial \omega_0}{\partial k} (\bar{k} - \bar{k}^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^0) (x_j - x_j^0) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2} \right)_0 a^2$$

что после сравнения с (3.2) даст в нелинейной задаче

$$\frac{1}{2} \Delta_{a_i^2} N_i N_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} - \lambda_1 y_1 \Psi' + \Delta_{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 |\Psi'|^2 \Psi = 0 \quad (3.7)$$

Принимая, что $-\lambda_1^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 > 0$, ($\lambda_1 < 0$), обозначая $\Psi = \mu \Psi'$, $y_1 = \chi y'$,

$\chi = \frac{1}{\lambda_1^2}$, $\mu = \sqrt{-\frac{\lambda_1 y}{\Delta_{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0}}$, можно записать (3.7) в виде

$$\frac{d^2 \Psi'}{dy'^2} - y' \Psi' - |\Psi'|^2 \Psi' = 0 \quad (3.8)$$

С другой стороны, полагая $\Psi' = a' e^{i-\Phi}$, получим из (3.8)

$$a' \left(\frac{d\Phi}{dy'} \right)^2 - \frac{d^2 a'}{dy'^2} + y' a' + a'^3 = 0, \quad a' = \frac{c}{\sqrt{\frac{d\Phi}{dy'}}}, \quad C = \text{const} \quad (3.9)$$

Для $\frac{d^2 a'}{dy'^2} = 0$ (3.9) можно решить аналитически.

Задавая начальные условия для некоторого y' согласно линейному решению (3.4) или (3.6), можно численно решить (3.9) и найти значения a' , Φ вблизи каустики. В электродинамике тонких пучков можно записать уравнение для напряженности электрического поля

$$\nabla^2 \vec{E} + \nabla \left(\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{E} \right) + k^2 (1 + \epsilon_2 |\vec{E}|^2) \vec{E} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, и тогда получится дисперсионное уравнение

$$-\Delta = \epsilon_0 \frac{1}{c^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \omega, \quad \Delta_{a_i^2} N_i N_j = -\frac{c^2}{\epsilon_0 \omega}, \quad \text{откуда } \lambda_1 = -\frac{\omega c}{\sqrt{\epsilon_0} R}$$

и уравнение (3.7) $\frac{1}{2} \frac{c^2}{\epsilon_0 \omega} \frac{d^2 \Psi}{\partial y_i^2} - \omega y_1 \frac{1}{R} \Psi + \frac{\omega}{2} \epsilon_2 |\Psi'|^2 \Psi = 0$, $\frac{1}{R}$ — есть разность кривизны каустики и луча.

При $\chi \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 < 0$ получится вместо (3.8) $\mu = \sqrt{\frac{\lambda_1 y}{\Delta_{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0}}$,

$\frac{d^2 \Psi'}{dy'^2} - y' \Psi' + |\Psi'|^2 \Psi' = 0$ и в (3.9) стоит „-“ перед a'^3 .

* Разделение на падающую и отраженные волны возможно вдали от каустики, вблизи нее следует решать (3.7) при начальном условии, взятом из (3.4).

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՃԱԿԱՏՆԵՐԻ
ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Բերվում է ոչ զծային ցրող միջավայրում տարածվող կամայական ալիքի համար դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդային և Ֆազային հավասարումների արտածումը: Վերջնական հավասարումը նկարագրում է լուծման եռչափ կաղմվածքը կամայական դանդաղ փոփոխվող ալիքի համար: Որոշվում է տիպիկ դիֆրակցիոն խնդրի ժամանակակից կախված պարբերական լուծումը ցրող միջավայրի համար:

DETERMINATION OF THE VICINITY OF WAVE FRONTS
IN A THREE-DIMENSIONAL PROBLEM

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The equations for slowly-varying amplitudes and phases of an arbitrary shape wave in non-homogeneous dispersive non-linear medium are derived. The final equation describes the three-dimensional structure of the solution for an arbitrary wave of slowly-varying parameters. The periodic in time solution of the typical diffraction problem in dispersive linear medium is determined, the statement of the problem on determination of non-linear solution is given and the conditions for longitudinal and transversal stability of the wave are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitham G. B.* A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. *J. Fluid Mech.* 1965, vol. 22, No. 2, 273-284.
2. *Lighthill M. J.* Some special cases treated by the Whitham theory. *Proceed. Roy. Soc.*, A299, 28 (1967).
3. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. *Прикл. матем. и механ.*, 1958, т. 22, № 5.
4. *Нитул У. К., Энгельбрехт.* Нелинейные переходные волновые процессы деформаций термоупругих и упругих тел. Таллин. Изд-во АН Эст. ССР, 1972.
5. *Багдоев А. Г., Дюпоин Э. П.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, 1972, т. XII, № 6.
6. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. *ПММ*, 1971, т. 35, в. 6.
7. *Карлман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Изд. «Наука», 1973.
8. *Бабич В. И., Булдырь В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.

9. Озаян Г. Г. Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1973, т. 26, № 6.
10. Bagdov A. G., Gurgentan A. A. On the definition of simplified nonlinear equations. Instituto di meccanica applicata del politecnico di Torino, nota tecnica 113, 1976.
11. Баравиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Мир», 1966.
12. Багдоев А. Г. Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 1.
13. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Метод усреднения для неспускоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.
14. Bretherton F. P., Garret C. Y. R. Wavetrains in inhomogenous moving media. Proc. Roy. Soc., A302, 1968, 529—554.
15. Петрашень Г. И., Николаев Б. С., Коузов Д. П. О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. записки ЛГУ, 1958, в. 32.