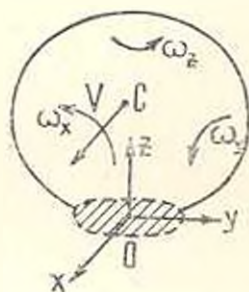


А. А. СПЕКТОР

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ КАЧЕНИЯ

1. Рассматривается пространственная контактная задача качения упругого тела по основанию из того же материала. Считается, что движение происходит в режиме, когда области сцепления отсутствуют на площадке контакта. В работе найдены условия существования и единственности нелинейной задачи определения напряжений и скоростей проскальзывания на границе тела и основания; построено ее решение в виде степенного ряда. Коэффициенты ряда определяются последовательно. Рассматриваемые режимы качения реализуются, когда общая сила трения, действующая со стороны основания на тело, близка к предельному значению, определяемому законом Амонтона—Кулона. Следует отметить, что такое движение принципиально отличается от макроскальзывания, или «буксования», так как скорость проскальзывания на площадке контакта много меньше скорости качения, и их отношение имеет порядок упругих деформаций.



Фиг. 1.

Различные приближенные методы исследования пространственных задач качения имеются в работах [1—3].

2. Пусть тело катится по основанию со скоростью V . Обозначим ω ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) абсолютную угловую скорости катящегося тела. Движение будем считать квазистатическим и установившимся по отношению к системе координат $Oxyz$ жестко связанной с площадкой контакта. Начало системы координат O совпадает с точкой, касания тела и основания тела в недеформированном состоянии, ось Oz является внешней нормалью к основанию, ось Ox направлена в сторону качения.

На границе тела и основания, которые аппроксимируются полупространствами $z > 0$ и $z < 0$, ставятся следующие граничные условия [4]:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\mu \sigma_z \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \\ \tau_{yz} &= -\mu \sigma_z \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \text{ в области контакта } E \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z &= 0 \text{ вне области } E \end{aligned} \quad (2.1)$$

Условия (2.1) означают, что величины касательного τ (τ_{xz}, τ_{yz}) и нор-

мального τ , напряжений в точках области E связаны законом Амонтона-Кулона с коэффициентом трения ρ . Направление вектора τ совпадает с направлением скорости проскальзывания тела относительно основания $\bar{s}(s_x, s_y)$.

Как известно [3, 4], из-за равенства упругих постоянных тела и основания для определения нормальных напряжений получается то же уравнение, что и в статической задаче без трения, которое удовлетворяется, если

$$\sigma_z = -\sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad E - \text{эллипс с полуосями } a, b. \text{ Если}$$

рассматривать качение нашего тела как абсолютно твердого со скоростью V и угловой скоростью ω , то поле его скоростей проскальзывания $\bar{v}(v_x, v_y)$ в окрестности точки O имеет вид $v_x = V - \omega_y l - \omega_z y$; $v_y = \omega_x l + \omega_z x$. Здесь $l = OC$. Обозначим через (u^+, v^+) проекции вектора упругих касательных смещений тела в точке (x, y) площадки E . Обозначим через (u^-, v^-) те же величины для основания. Тогда скорости проскальзывания $\bar{s}$ выражаются следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} s_x &= V \left(\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} \right) + v_x \\ s_y &= V \left(\frac{\partial v^-}{\partial x} - \frac{\partial v^+}{\partial x} \right) + v_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. Получим систему интегральных уравнений, которой удовлетворяют функции s_x, s_y . После ее решения касательные напряжения определяются, исходя из граничных условий (2.1). Для получения уравнений следует выразить упругие смещения u, v в (2.2) через граничные напряжения [5], а затем касательные напряжения с помощью (2.1) выразить через проекции скорости проскальзывания и известное нормальное давление. В итоге получим систему

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{\rho \sigma_0 V}{G} \int_E \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \left(B_{11} \frac{s_{x'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + B_{12} \frac{s_{y'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} \right) + v_x \\ s_y &= \frac{\rho \sigma_0 V}{G} \int_E \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \left(B_{21} \frac{s_{x'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + B_{22} \frac{s_{y'}}{\sqrt{s_{x'}^2 + s_{y'}^2}} \right) + v_y \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ядра B_{ij} имеют вид

$$B_{11} = \frac{\cos \theta}{\pi m R^2} (3 \sin^2 \theta - m), \quad B_{12} = \frac{\sin \theta}{\pi m R^2} (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

$$B_{21} = B_{12}, \quad B_{22} = \frac{\cos \theta}{\pi m R^2} (1 - m - 3 \sin^2 \theta)$$

θ — угол между вектором $(x - x', y - y')$ и осью Ox , G — модуль сдвига, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, $\frac{1}{m}$ — коэффициент Пуассона материалов. Интегралы в (3.1) понимаются в смысле главного значения.

Исследуем полученную систему. Рассмотрим семейство последовательных приближений, задаваемых формулами

$$\bar{s}_0 = \bar{v}, \quad \bar{s}_n = \frac{\gamma_0 V}{G} \int_E B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} dx' dy' + \bar{v}$$

Здесь и далее для краткости систему (3.1) будем записывать как одно векторное уравнение с матричным ядром B .

Приближения $\bar{s}_n$ будем рассматривать в пространстве ограниченных функций, определенных на E и удовлетворяющих условию Липшица с показателем $1/2$. Норма в этом пространстве задается равенством

$$|\bar{s}_n| = \max_E |\bar{s}_n| + \sqrt[4]{ab} \max_E \frac{|\bar{s}_n(P) - \bar{s}_n(Q)|}{\sqrt{R}}$$

Сингулярный интегральный оператор с ядром B переводит множество функций этого пространства, обращающихся в нуль на границе E , в функции того же пространства и является ограниченным оператором. Обозначим через C_1 соответствующую постоянную. В дальнейшем мы будем использовать ограниченность этого оператора в пространстве L_1 . Через C_2 будем обозначаться соответствующая постоянная. Упомянутые свойства многомерных сингулярных интегральных операторов исследовались в работах [6, 7]. Мы не получаем оценок для постоянных C_1 и C_2 ; это может быть сделано методом [6]. Основным этапом исследования системы (3.1) является нахождение условий того, что искомые функции s_x и s_y ни в каком приближении одновременно в нуль не обращаются. Это требование для наших задач является необходимым, так как рассматривается качение с проскальзыванием во всех точках E .

Справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\gamma = \frac{\gamma_0 V}{G \min |v|} < \left[2C_2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left(2 \frac{|\bar{v}|}{\min |v|} + 1 \right) \right]^{-1}$$

$$l = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

тогда для любого n выполняется неравенство

$$|\bar{s}_n| > \frac{1}{2} \min |\bar{v}| \quad (3.2)$$

Покажем, что неравенство (3.2) справедливо, если для любого n : 1) вектор-функции $\bar{s}_n$ ограничены и удовлетворяют условию Липшица с показателем $1/2$, 2) этим же требованиям удовлетворяют вектор-функции $\frac{\bar{s}_n}{|\bar{s}_n|}$ и 3) выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\bar{s}_n}{|\bar{s}_n|} \right\| \leq [2\gamma C_1 (n\sqrt{2} + 1)]^{-1} \quad (3.3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\bar{s}_n| &\geq |\bar{v}| - \frac{\gamma_0 V}{G} \left| \int_B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} dx' dy' \right| > \\ &\geq \min |\bar{v}| - \frac{\gamma_0 V}{G} \left| \int_B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} dx' dy' \right| > \\ &> \min |\bar{v}| \left[1 - \gamma C_1 (n\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_{n-1}}{|\bar{s}_{n-1}|} \right\| \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) очевидно, что при выполнении (3.3) справедливо неравенство (3.2).

Утверждения (1—3) докажем по индукции. Пусть $n=0$. Из условий, наложенных на γ , вытекает неравенство

$$\left\| \frac{\bar{s}_0}{|\bar{s}_0|} \right\| = \left\| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right\| \leq \frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} [2\gamma C_1 (n\sqrt{2} + 1)]^{-1} \quad (3.5)$$

Неравенство (3.5) и доказывает справедливость (3.3) при $n=0$. Справедливость утверждений (1—2) при $n=0$ вытекает из определения векторного поля $\bar{v}$ и условия $\min |\bar{v}| > 0$. Пусть теперь (1—3) выполнены при $n=k$. Справедливость утверждения 1) при $n=k+1$ вытекает из определения $\bar{s}_{k+1}$. Справедливость 2) следует из неравенства (3.4). Для доказательства пункта 3) с помощью оценок, аналогичных (3.4), получим

$$|\bar{s}_{k+1}| \leq \min |\bar{v}| \left[\frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} + \gamma C_1 (n\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right\| \right] \quad (3.6)$$

Далее из (3.3), (3.4) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\bar{s}_{k+1}}{|\bar{s}_{k+1}|} \right\| &\leq \frac{\|\bar{s}_{k+1}\|}{\min |\bar{s}_{k+1}|} \leq \frac{\frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} + \gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right\|}{1 - \gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1) \left\| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \right\|} \leq \\ &\leq 2 \frac{|\bar{v}|}{\min |\bar{v}|} + 1 \leq [2\gamma C_1 (l\sqrt{2} + 1)]^{-1} \end{aligned}$$

Итак, мы доказали неравенство (3.3) для $n=k+1$, а с ним и неравенство (3.2).

Установленное неравенство (3.2) дает возможность найти условия разрешимости системы (3.1).

Пусть наряду с условием, обеспечивающим неравенство (3.2), выполняется неравенство $\gamma \leq \frac{1}{2C_2}$, тогда последовательные приближения $\bar{s}_n$ равномерно сходятся к решению системы (3.1), удовлетворяющему условию Липшица с показателем $1/2$.

Требования, наложенные на параметр γ , обеспечивают сжимающие свойства оператора правой части (3.1) и отсюда сходимость $\bar{s}_n$ в среднем квадратичном. В силу этого и из ограниченности семейства последовательных приближений (неравенства (3.6) и (3.3)) вытекает их сходимость к функции из пространства Липшица [8]. Легко показать, что предельная функция удовлетворяет системе (3.1).

Рассмотрим множество функций нашего пространства, удовлетворяющих условию $|\bar{s}| > r > 0$. Пусть $\gamma < \frac{r}{\min |\bar{v}| C_2}$, тогда на этом множестве система (3.1) имеет не более одного решения из пространства Липшица. Наложение условия обеспечивает сжимающие свойства оператора B на указанном множестве, откуда и вытекает единственность решения (3.1).

4. Рассмотрим теперь зависимость последовательных приближений $\bar{s}_n$ и решения (3.1) $\bar{s}$ от параметра γ . Наиболее полные результаты получаются в случае $\omega_z = 0$, то есть $v_x = \text{const}$, $v_y = \text{const}$. Им мы и ограничимся.

Функции $f_x = \frac{s_x}{1 + s_x^2 + s_y^2}$ и $f_y = \frac{s_y}{1 + s_x^2 + s_y^2}$ разлагаются в ряды по степеням $s_x - v_x$, $s_y - v_y$. Эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при

$$(s_x - v_x)^2 + (s_y - v_y)^2 < (\sqrt{2} - 1)^2 |\bar{v}|^2 \quad (4.1)$$

Заменим в этих рядах все члены их абсолютными величинами и суммы полученных рядов при некоторых s_x и s_y , удовлетворяющих неравенству (4.1), обозначим через A_x и A_y . Справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\gamma < [C_1(l)^2 + 1] \max(A_1, A_0)]^{-1} \quad (4.2)$$

тогда все приближения $\bar{s}_n$ разлагаются в ряды по степеням γ , которые сходятся по норме пространства Липшица равномерно относительно γ . Если выполнены еще условия сходимости приближений $\bar{s}_n$, то решение системы (3.1) является аналитической функцией параметра.

Доказательство строится по индукции. Разложение $\bar{s}_0$ и $\bar{s}_1$ не вызывает сомнения, так как соответствующие суммы содержат конечное число членов. Разложение $\bar{s}_{k+1}$ формально получается подстановкой ряда для $\bar{s}_k$ в разложения f_x и f_y по $s_x = v_x$, $s_y = v_y$ и группировкой членов. Заменив в разложении $\bar{s}_{k+1}$ коэффициенты $r^i(x, y)$ на $\|r^i\|$, получим в силу (4.2) абсолютно сходящийся степенной ряд. Он мажорирует исследуемый ряд для $\bar{s}_{k+1}$.

Для нахождения коэффициентов при γ^i в разложении решения $\bar{s}$ нужно учитывать следующий факт. При переходе от n -го приближения к $n+1$ -му первые n найденных коэффициентов сохраняются. Следовательно, они сохраняются и в решении $\bar{s}$. Покажем это.

Доказательство проведем по индукции. Очевидно, что при переходе от $n=0$ к $n=1$ нулевой член разложения сохраняется. Действительно,

$$\bar{s}_1 = \bar{v} + \gamma B\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)$$

здесь

$$\gamma B\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right) = \frac{\gamma^2 V}{G} \int_E B \sqrt{1 - \left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} dx' dy'$$

Пусть теперь доказываемое справедливо при $n=k$, то есть

$$\bar{s}_k = \bar{s}_{k-1} + O(\gamma^k)$$

тогда

$$\frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} = \frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} + O(\gamma^k)$$

Действительно, в силу (3.2),

$$\left| \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} - \frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} \right| \leq \frac{|\bar{s}_k - \bar{s}_{k-1}|}{\min(|\bar{s}_{k-1}|; |\bar{s}_k|)} < \frac{|\bar{s}_k - \bar{s}_{k-1}|}{1/2|\bar{v}|} = O(\gamma^k)$$

Теперь можно убедиться в справедливости доказываемого при $n=k+1$. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{s}_{k+1} &= \gamma B\left(\frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|}\right) + \bar{v} = \gamma B\left(\frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|} + O(\gamma^k)\right) + \bar{v} = \\ &= \gamma B\left(\frac{\bar{s}_{k-1}}{|\bar{s}_{k-1}|}\right) + \bar{v} + O(\gamma^{k+1}) = \bar{s}_k + O(\gamma^{k+1})\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $\bar{v}$ — const коэффициенты в разложении $\bar{s}_n$ и $\bar{s}$ имеют весьма простой вид. Оказывается, что в этих разложениях при γ^i стоит полином по координатам x и y не выше i -ой степени. Коэффициенты его выражаются через полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода от аргумента $e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}$. Такой вид коэффициентов вытекает из свойства сингулярного интегрального оператора с ядром B переводить полином i -ой степени в полином $i+1$ -ой степени, которое непосредственно следует из результатов [3]. Итак, решение системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений (3.1) представляется в виде ряда по степеням параметра γ , коэффициенты которого являются полиномами по координатам x и y . Такой же вид имеет и поле направлений проскальзывания $\frac{\bar{s}}{|\bar{s}|}$, которым определяются касательные напряжения. Методику построения коэффициентов этих рядов рассмотрим на следующем примере.

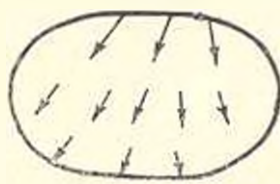
5. Пусть площадка контакта круговая ($a=b$) и, кроме того, $v_y=0$. Найдем первые четыре члена в разложении искомых полей $\bar{s}$ и τ . Первые два члена в разложении $\bar{s}$ по точности совпадают с $\bar{s}_1$. Как указывалось выше, член разложения $\bar{s}$, пропорциональный γ^1 , совпадает с таковым во 2-ом приближении. Для его нахождения мы по выражению $\bar{s}_1$ определяем два члена (нулевой и первый) в разложении $\frac{\bar{s}_1}{|\bar{s}_1|}$. Результат воздействия оператором B (он сводится к использованию формул [3] и последующему дифференцированию) на нулевой член совпадает с $\bar{s}_1$. Воздействуя на первый член, мы получаем добавок, пропорциональный γ^2 . Аналогичным образом с использованием 3-его приближения строится член, пропорциональный γ^3 . Параллельно мы получаем и разложение $\frac{\bar{s}}{|\bar{s}|}$. Итоговые разложения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\bar{s}_k}{x_1} &= 1 - \gamma \frac{\pi}{8m} (4m-3) \frac{x}{a} + \gamma^2 \frac{\pi^2}{256m^2} \left[-2 + 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] + \\ &+ \gamma^3 \frac{\pi^3}{(128m)^2 m} \left[-8(2m-3) \frac{x}{a} + 3(27m-26) \frac{xy^2}{a^3} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{12} (17m-25) \frac{x^3}{a^3} \right] + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{s_x}{v_x} &= \gamma \frac{\pi}{8m} \frac{y}{a} + \gamma^2 \frac{\pi^2}{128m^2} \frac{xy}{a^2} + \gamma^3 \frac{\pi^3}{(128m)^2 m} \left[12(2m-3)(2m-1) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \right] \frac{y}{a} - \frac{3}{2} [5(8m-3)(2m-3) + 7] \frac{x^2 y}{a^3} - \\
&\quad - \frac{1}{6} [40(2m-3)(3m-2) + 51] \frac{y^3}{a^3} \} + \dots \\
\tau_{xx} &= \gamma \operatorname{sign} v_x \left[\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \left(1 - \gamma^2 \frac{\pi^2}{128m^2} \frac{y^2}{a^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma^3 \frac{\pi^3}{16(4m)^2} (10m-9) \frac{xy^2}{a^3} \right) \right] + \dots \\
\tau_{yz} &= \gamma \operatorname{sign} v_x \left[\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \left\{ \gamma \frac{\pi}{8m} \frac{y}{a} + \gamma^2 \frac{\pi^2}{128m} (2m-3) \frac{xy}{a^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma^3 \frac{\pi^3}{m(128m)^2} [12(2m-3)(2m-1) + 20] \frac{y}{a} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 32(4m-3)^2 \frac{yx^2}{a^3} - \frac{1}{6} [40(2m-3)(3m-2) + 147] \frac{y^3}{a^3} \right\} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Таблица 1

	γ	γ^2	γ^3
s_x	1.25	0.07	0.12
s_y	0.13	0.013	0.013
$\frac{s_x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	0	0.01	0.015
$\frac{s_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	0.13	0.013	0.091



Фиг. 2.

О вкладе членов приведенных разложений в величины функций s_x , s_y , τ_{xx} , τ_{yz} можно судить по табл. 1. В каждом ее столбце стоят оценки максимальных величин коэффициентов при соответствующей степени γ для $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$. Видно, что величина проскальзывания с высокой точностью определяется первым приближением. Величина касательного напряжения близка к нулевому приближению. При точном определении напряжений проскальзывания (напряжения) следует учитывать слагаемые от приближений более высокого порядка.

Качественная картина поля проскальзываний приведена на фиг. 2. Поле проскальзываний симметрично относительно оси Ox . При постоянном y величина s является убывающей функцией x . Величина угла между направлениями проскальзывания и качения возрастает с удалением от оси Ox

я вдоль оси Oy . Заметим, что этот угол весьма мал и для тех значений γ , при которых обеспечивается полное проскальзывание, имеет порядок $1^\circ - 3^\circ$. Поэтому полная сила трения, действующая со стороны основания на тело весьма близка к своему предельному значению $\frac{2}{3} \pi ab \sigma_0$.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт
подшипниковой промышленности

Поступила 4 V 1976

Ա. Ա. ՍՊԵԿՏՈՐ

ՊԻՐՈՒԱՆ ՏԱՐԱՅԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԻ ՄԻ ԳԵՊԷՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Դիտարկվում է դիրման տարածական կոնտակտային խնդիրը շոք շփումով: Դիրքող մարմինը և հիմքը ունեն միևնույն առաձգական ռաուլո-թյուններ: Ենթադրվում է, որ կոնտակտի ժամանակ կցման տիրույթների չին առաջանում: Ստացվել են սահելու արագությունները և շոշափող լարումները կոնտակտի մակերեսի վրա: Մանրամասն ուսումնասիրվում է շրջանաձև կոնտակտի մակերեսի դեպքը:

ON A VARIANT OF A THREE-DIMENSIONAL ROLLING CONTACT PROBLEM

A. A. SPECTOR

S u m m a r y

A three-dimensional rolling contact problem of dry friction is considered. The rolling body and the foundation are of similar elastic properties. No adhesion is assumed to take place. The slip velocities and tangential tractions are found. The case of a circular contact area is discussed in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский И. И. О перематывании упругих тел. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 1, 1956.
2. Kalker J. J. A strip theory for rolling with slip and spin. Proc. K. Ned. Akad. Wet. Amsterdam (B), 1967, v. 70.
3. Kalker J. J. On the rolling contact of two elastic bodies in presence of dry friction. Thesis Delft. Delft Univ. Technology, 1967.

4. Калксер И. Н., де Патер А. Д. Обзор теории локального скольжения в области контакта с сухим трением. Прикл. механ., 1971, т. VII, в. 5.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., 1955, с. 128.
6. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962, стр. 52.
7. Михайлова-Губенко Н. М. Сингулярные интегралы в пространствах Линнича. Вестник АГУ, 1966, № 1.
8. Гелт Б. И. Разрешимость нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом итераций. Научн. тр. Новочеркасского политехнического института, 1955, № 26.