ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

В. С. САРКИСЯН, В. Г. МХИТАРЯН, А. О. ОВСЕПЯН

# К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С ВДАВЛИВАНИЕМ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ШТАМПОВ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Контактная задача нелинейной установившейся теории ползучести о вдавливании штампа произвольной конфигурации в полуплоскость без учета сил трения впервые поставлена и решена в работе [1]. При этом для материала полуплоскости принимается данная Ю. Н. Работновым в [2] и развитая Н. Х. Арутюняном в [3] для стареющих материалов степенная зависимость между напряжениями и деформациями, имеющая следующий вид:

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\,\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i(\tau)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau$$

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\,\varepsilon_i(t) = K_0\varepsilon_i^{\mu}(t) \tag{1}$$

Здесь $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала [3], $\varphi^*[\varepsilon_i(t)]$ — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, которая определяется из опыта, $\tau_1$ — возраст материала, $t$ — время, $K_0$ и $\mu(0<\mu<1)$ — физические константы материала, также определяемые из опыта, а $\varepsilon_i(t)$ и $\sigma_i(t)$ — известные выражения интенсивностей деформаций и напряжений соответственно. Физический закон между интенсивностями напряжений и деформаций (1) подтвержден на основе ряда экспериментальных исследований [4, 5, 6, 7] для таких материалов, как алюминиевые сплавы, медь, малоуглеродистая сталь и др.

Далее в работе [8] рассмотрена та же самая контактная задача с учетом сил трения, но для полуплоскости, находящейся в условиях установившейся нелинейной ползучести, когда

$$\sigma_i = K_0\varepsilon_i^{\mu} \quad (0<\mu<1) \tag{2}$$

При исследовании этих задач важную роль сыграл обобщенный принцип суперпозиции для перемещений, на основании которого их решение сводилось к решению интегрального уравнения Абеля с постоянными пределами. Решение последнего уравнения было построено известным методом М. Г. Крейна [9].

К такому же интегральному уравнению приводится также решение контактной задачи о вдавливании штампа в линейно-упругую полуплоскость, модуль упругости которой по глубине изменяется по степенному закону. Решение этого интегрального уравнения при помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра дано в работе [10].

Решение интегрального уравнения Абеля, а также обобщенного уравнения методами краевой задачи Римана-Гильберта для аналитических функций построено в работах [11—15].

Во всех указанных работах решение интегрального уравнения Абеля с постоянными пределами, соответствующего упомянутой контактной задаче для одного участка контакта, построено в замкнутой форме в квадратурах или в виде ряда. При рассмотрении же разбираемой задачи в случае двух участков контакта, даже симметрично расположенных, возникают значительные математические трудности, вследствие чего замкнутое ее решение до сих пор неизвестно.

Последнее обстоятельство побудило построить приближенное решение этой контактной задачи в случае двух участков контакта [16]. В указанной работе обсуждается контактная задача о вдавливании двух симметрично расположенных штампов в упругую полуплоскость с модулем упругости, изменяющимся по степенному закону по глубине, без учета сил трения. При помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра решение исходного интегрального уравнения в [16] сведено к эквивалентной квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Настоящая работа посвящена исследованию контактной задачи нелинейной установившейся ползучести о вдавливании двух симметрично расположенных штампов общей конфигурации в полуплоскость, для которой справедлив степенной закон (1). При помощи опять-таки аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра исходное интегральное уравнение сводится к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Способом, отличным от изложенного в [16], проводится полное исследование бесконечной системы на регулярность. Отдельно рассматриваются случаи симметричного и кососимметричного нагружения штампов. Когда имеются два одинаковых симметрично нагруженных штампа с плоскими основаниями, более подробно обсуждается вопрос определения важных механических характеристик — закона распределения контактных напряжения и меры погружения штампов в основание. В этом же случае получены числовые результаты.

Отметим, что как в работах [17—19], рассматриваемую здесь задачу можно интерпретировать как задачи нелинейной теории упругости при степенном законе связи между напряжениями и деформациями.

Отметим еще, что можно исходить из нелинейной установившейся теории ползучести согласно [1]. Тогда решение разбираемой контактной задачи сводится к совместному решению двух раздельных интегральных уравнений. Однако первое из них учитывает влияние ползучести материала на распределение контактных давлений и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решаемое в замкнутой форме [1]. Второе интегральное уравнение определяет контактное давление в зависимости от пространственной координаты и представляет собой, как уже указывалось, линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода со степенным ядром, называемое нами интегральным уравнением Абеля с постоянными пределами. На этих вопросах здесь, однако, останав-

ливаться не будем и будем обсуждать только случай установившейся ползучести.

§ 1. *Постановка задачи и вывод основных интегральных уравнений*

Пусть имеется деформируемая полуплоскость, находящаяся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями. Пусть далее два одинаковых штампа, основание которых описываются функцией $f(x)$, под действием прижимающей силы $P$ и опрокидывающего момента $M$ вдавливаются в такую полуплоскость. Контактные участки обозначим через $[-a, -b]$ и $[b, a]$ $(b<a)$. При этом будем рассматривать два случая нагружения штампов. В первом случае штампы нагружены симметрично, вследствие чего будем предполагать, что они соединены между собой абсолютно жестким стержнем, нагруженным посередине силой $P$. Можно также считать, что в середине каждого штампа действует прижимающая сила $P/2$. В случае кососимметричного нагружения будем считать, что штампы опять соединены между собой абсолютно жестким стержнем, к которому приложен момент $M$.

Очевидно, что общий случай нагружения штампов исчерпывается указанными двумя случаями. Отметим, что в обоих случаях не учитываются тангенциальные контактные напряжения.

Рассмотрим сначала случай симметричного нагружения штампов. Тогда согласно известным результатам [1] для определения давления под штампами будем иметь следующее интегральное уравнение:

$$\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\frac{P(y)\,dy}{|x-y|^{1-\mu}}=\left|\frac{\delta-f(x)}{A}\right|^{m}\quad x\in[[-a,\ -b]+[b,\ a]] \qquad (1.1)$$

Здесь $\mu$ — показатель ползучести, подчиненный условию $0.5<\mu<1$, $m=1/\mu$, $\delta$ — мера погружения штампов в основание, подлежащая определению. Кроме того,

$$A=(2\mu-1)\sin(\pi\sqrt{2\mu-1}/2\mu)/(1-\mu)\,[KI(\mu)]^{m}$$

$$I(\mu)=4\,[m\sqrt{2\mu-1}]^{2}\int_{0}^{\pi/2}|\cos(m\sqrt{2\mu-1}\,\theta)|^{2}\cos\theta\,d\theta$$

$K$ — физическая константа материала полуплоскости, $f(x)$ — четная функция: $f(-x)=f(x)$.

При этом имеет место условие равновесия штампов

$$\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)p(x)\,dx=P$$

приводящееся вследствие четности давления $(p(-x)=p(x))$ к следующему:

$$2\int_b^a p(x)\,dx = P \tag{1.2}$$

В случае кососимметричного нагружения штампов будем иметь интегральное уравнение

$$\left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a\right)\frac{p(y)\,dy}{|x-y|^{1-\alpha}} = f_0(x) \tag{1.3}$$

где

$$f_0(x) = \left[\frac{f(x)-\alpha x}{A}\right]^n \text{ при } x\in[b,\ a]$$

и при $x\in[-a,\ -b]$ она продолжается нечетным образом, $\alpha$ — угол поворота штампов, подлежащий определению. Последнее после решения задачи определяется из моментного условия равновесия штампов.

$$\left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a\right)xp(x)\,dx = M$$

приводящееся вследствие нечетности давления ($p(-x)=-p(x)$) к следующему:

$$2\int_b^a xp(x)\,dx = M \tag{1.4}$$

Далее перейдем к безразмерным координатам $\xi$, $\eta$

$$\xi = \frac{2}{1-k}\left(\frac{x}{a} - \frac{1+k}{2}\right), \qquad \eta = \frac{2}{1-k}\left(\frac{y}{a} - \frac{1+k}{2}\right) \qquad \left(k = \frac{b}{a}\right)$$

и введем обозначения

$$\psi(\xi) = \frac{p(x)}{P}, \qquad h(\xi) = \frac{1}{P}\left[2\,\frac{\delta - f(x)}{(1-k)\,aA}\right]^n$$

$$\psi_0(\xi) = \frac{p(x)}{M}, \qquad g(\xi) = \frac{1}{M}\left[2\,\frac{f(x)-\alpha x}{(1-k)\,aA}\right]^n, \qquad x = a\left(\frac{1-k}{2}\xi + \frac{1+k}{2}\right)$$

соответственно случаям симметричного и кососимметричного нагружения штампов. Тогда уравнение (1.1) с учетом четности решения и правой части принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{|\xi-\eta|^{\alpha}} + \frac{1}{(\xi+\eta+c)}\right]\psi(\eta)\,d\eta = h(\xi) \tag{1.5}$$

а условие (1.2) — вид

$$\frac{a(1-k)}{2}\int_{-1}^{1}\psi(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\qquad\left(c=2\frac{1+k}{1-k},\quad \nu=1-\mu\right)\tag{1.6}$$

Уравнение же (1.3) при этом перейдет в следующее:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{|\xi-\eta|^{\nu}}-\frac{1}{(\xi+\eta+c)^{\nu}}\right]\psi_*(\eta)\,d\eta=g(\xi)\tag{1.7}$$

а условие (1.4) — в

$$\frac{a^2(1-k)}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-k}{2}\xi+\frac{1+k}{2}\right)\psi_*(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\tag{1.8}$$

Таким образом, рассматриваемые задачи сведены к решению интегральных уравнений (1.5) и (1.7) при условиях (1.6) и (1.8) соответственно.

§ 2. *Сведение основных интегральных уравнений к бесконечным системам*

Сначала приступим к решению интегрального уравнения (1.5). При этом важную роль будет играть интегральное соотношение [10]

$$\int_{-1}^{1}\frac{C_m^{\nu/2}(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^{\nu}(1-\eta^2)^{(1-\nu)/2}}=\frac{\pi\Gamma(m+\nu)}{\cos\frac{\pi\nu}{2}\,\Gamma(\nu)\,m!}C_m^{\nu/2}(\xi)\tag{2.1}$$

где $(m=0,1,2,\ldots)$ $C_m^{\nu/2}(\eta)$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(\xi)=(1-\xi^2)^{(\nu-1)/2}$, а $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция Эйлера.

Решение интегрального уравнения (1.5) представим в виде

$$\psi(\xi)=\rho(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}X_m\varphi_m(\xi)\tag{2.2}$$

Здесь

$$\varphi_n(\xi)=\left[\frac{n!\,(n+\nu/2)\,\Gamma^2(\nu/2)}{\pi 2^{1-\nu}\Gamma(n+\nu)}\right]^{1/2}C_n^{\nu/2}(\xi)\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

ортонормированная с весом $\rho(\xi)$ система функций

$$\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,\varphi_m(\xi)\,d\xi=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

обладающая согласно (2.1) свойством

$$\int_{-1}^{1} p(\eta)\varphi_n(\eta)\frac{d\eta}{|\xi-\eta|^{\nu}} = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\xi) \tag{2.3}$$

$$\lambda_n = \cos\frac{\pi\nu}{2}\Gamma(\nu)\, n!/\Gamma(n+\nu) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и учитывая (2.3), на основе известной процедуры для определения неизвестных коэффициентов будем иметь следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

где

$$K_{mn} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{p(\xi)p(\eta)}{(c+\xi+\eta)^{\nu}}\varphi_n(\xi)\varphi_m(\eta)\,d\xi\, d\eta \tag{2.5}$$

$$h_n = \lambda_n \int_{-1}^{1} h(\xi)p(\xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi \tag{2.6}$$

$$(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Отметим, что бесконечную систему вполне аналогичной структуры можно получить и в случае кососимметричного нагружения штампов, исходя при этом из уравнения (1.7).

Теперь заметим, что из (1.6) и представления (2.2) непосредственно находим:

$$X_0 = 2^{1-1.5\nu}\sqrt{\pi\nu\Gamma^2(\nu)}/a(1-k)\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \tag{2.7}$$

Далее бесконечную систему (2.4) запишем в виде

$$X_0 + \lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} K_{0m} X_m = h_0 \tag{2.8}$$

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n - \lambda_n X_0 K_{n0} \tag{2.9}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Если размеры участка контакта $a$ и $b$ заданы, то из системы (2.9) можно определить коэффициенты $|X_n|_{n=1}^{\infty}$, выраженные через $h_n (n = 1, 2, \ldots)$, которые в свою очередь зависят от неизвестной постоянной $\delta$. Подставив

выражение этих коэффициентов в соотношение (2.8), получим уравнение, откуда может определяться $\delta$.

§ 3. *Исследование бесконечной системы (2.9)*

Для исследования бесконечной системы (2.9) преобразуем выражение интеграла

$$I_n(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{\rho(\eta)\varphi_n(\eta)\,d\eta}{(\xi+\eta+c)^{\nu}} \tag{3.1}$$

Имеем [20]

$$C_n^{\nu/2}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+\nu)}{2^{-1+\nu/2}\Gamma^2(\nu/2)\,n!}(\sin\theta)^{1-\nu}\int_0^{\theta}\frac{\cos[(n+\nu/2)\varphi]\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-1+\nu/2}}$$

$$(0<\theta<\pi)$$

Тогда

$$\rho(\cos\theta)\varphi_n(\cos\theta) = A_n\int_0^{\theta}\frac{\cos[(n+\nu/2)\varphi]\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\nu/2}} \tag{3.2}$$

$$A_n = [2(n+\nu/2)\Gamma(n+\nu)/\pi\Gamma^2(\nu/2)\,n!]^{1/2}$$

В формуле (3.1) сделаем замену переменной $\eta=\cos\theta$ и воспользуемся представлением (3.2). Затем проинтегрируем ее по частям. Тогда после несложных выкладок получим

$$I_n(\xi) = \frac{A_n}{n+\frac{\nu}{2}}\int_0^{\pi}\sin\left(n+\frac{\nu}{2}\varphi\right)g(\xi,\varphi)\,d\varphi \tag{3.3}$$

где

$$g(\xi,\varphi) = \frac{\sin\varphi}{(c+\xi-1)^{\nu}(1+\cos\varphi)^{1-\nu/2}} -$$

$$-\nu\sin\varphi\int_{\varphi}^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(c+\xi+\cos\theta)^{\nu+1}(\cos\varphi-\cos\theta)^{1-\nu/2}} \tag{3.4}$$

Далее из (2.5) и (3.3) находим

$$K_{nm} = \int_{-1}^{1}\rho(\xi)\varphi_n(\xi)I_m(\xi)\,d\xi =$$

$$= B_m\int_0^{\pi}\left[\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\varphi_n(\xi)g(\xi,\varphi)\,d\xi\right]\sin\left(m+\frac{\nu}{2}\right)\varphi\,d\varphi \tag{3.5}$$

$$B_m = \frac{A_m}{m + \frac{\nu}{2}} \left| \frac{2\Gamma(m+\nu)}{\pi\Gamma^2(\nu/2)\, m!\,(m+\nu/2)} \right|^{1/2} \quad (m,\ n = 1,\ 2, \ldots)$$

Очевидно, что $B_m = O(m^{-1-\varepsilon})$ при $m \to \infty$.
Из (3.6) по неравенству Коши-Буняковского будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| \leqslant \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi}\int_{-1}^{1} p(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, g(\xi, \varphi) \sin\left(m + \frac{\nu}{2}\right)\varphi\, d\xi\, d\varphi \right|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \times$$

$$\times \sqrt{2 \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} E_n(\varphi) \sin m\varphi\, d\varphi \right|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^{\pi} F_n(\varphi) \cos m\varphi\, d\varphi \right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \sqrt{\int_0^{\pi} \left| \int_{-1}^{1} p(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, g(\xi, \varphi)\, d\xi \right|^2 d\varphi}$$

где

$$E_n(\varphi) = \cos\frac{\nu}{2}\varphi \int_{-1}^{1} p(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, g(\xi, \varphi)\, d\xi$$

$$F_n(\varphi) = \sin\frac{\nu}{2}\varphi \int_{-1}^{1} p(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, g(\xi, \varphi)\, d\xi$$

Подробное исследование структуры последних интегралов приводит к неравенству

$$\lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| \leqslant B_n \lambda_n \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \sqrt{\int_0^{\pi} \left| \int_0^{\pi} |H(x, \varphi)|\, dx \right|^2 d\varphi}$$

$$H(x, \varphi) = \nu(\nu+1) \sin\varphi \times$$

$$\times \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1-\nu}} \int_x^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{(c + \cos\theta + \cos t)^{1+\nu} (\cos x - \cos t)^{1-\nu}}$$

$$B_n \lambda_n = \left| \frac{n!}{\pi\Gamma(n+\nu)(n+\nu/2)} \right|^{1/2} \frac{\cos\frac{\pi\nu}{2}\Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(\nu/2)} \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$$

Легко убедиться, что

$$B_n\lambda_n = O(n^{-1.5}) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

откуда вытекает квазивполне регулярность бесконечной системы (2.9). Полная же регулярность имеет место при соблюдении условия

$$\sup_n \left\{ B_n\lambda_n \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 H} \right\} < 1$$

$$H = \sqrt{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} H^2(x, y)\, dx dy}$$

§ 4. *Пример и числовые результаты*

В качестве примера рассмотрим случай симметричного вдавливания двух одинаковых штампов с плоскими основаниями в степенно упрочняющуюся полуплоскость. Тогда $f(x) = 0$ и уравнение (1.5) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \left[ \frac{1}{|\xi - \eta|} + \frac{1}{(\xi + \eta + c)} \right] \varphi(\eta)\, d\eta = \frac{1}{P} \left[ \frac{2\delta}{a(1-k)A} \right]^{\nu} \tag{4.1}$$

Уравнение (2.8) и бесконечная система (2.9) в данном случае соответственно будут

$$X_0 + \lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} K_{0m} X_m = h_0 \tag{4.2}$$

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n - \lambda_n X_0 K_{n0} \tag{4.3}$$

где согласно (2.6)

$$h_0 = \frac{\lambda_0}{P} 2^{1.5\nu - 1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu\Gamma^2(\nu)}} \left[ \frac{2\delta}{(1-k)aA} \right]^{\nu}$$

$$h_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Числовые расчеты были проведены на ЭВМ «Наири-2», когда $\nu = 0.3$ и $k = 0.3$, или $k = 0.6$. При двух указанных значениях параметра $k$ сначала были вычислены значения ядра $K_{nm}$ по формуле (2.5), ограничиваясь значениями $n, m = 0, 1, 2, 3, 4$. Приняв во внимание, что в разбираемом случае полуширина контактного участка $a$ заранее задана, значение коэффициента $X_0$ из (2.7) можно считать известным. При известном $X_0$ далее были ре-

шены укороченные системы (4.3), состоящие из трех и четырех уравнений. Решение последних приведено в табл. 1.

*Таблица 1*

| | $n=3,\ k=0.3$ | $n=4,\ k=0.3$ | $n=3,\ k=0.6$ | $n=4,\ k=0.6$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_0$ | 0.50924 | 0.50924 | 0.89117 | 0.89117 |
| $X_1$ | 0.01114 | 0.01088 | 0.00833 | 0.00829 |
| $X_2$ | 0.03016 | 0.02701 | 0.02267 | 0.02081 |
| $X_3$ | 0.01815 | 0.01827 | 0.01362 | 0.01364 |
| $X_4$ | | 0.06516 | | 0.05195 |

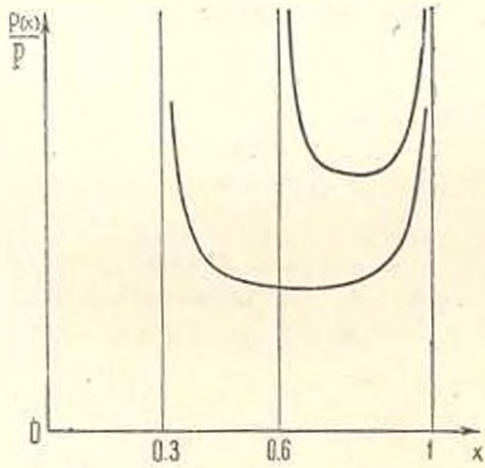
После того, как известны коэффициенты $\{X_n\}_{n=0}^{4}$, из (4.2) можно определить до сих пор неизвестную константу $\delta$:

$$\delta = 15.56427\, K^{-10/7} \exp\left(\frac{10}{7} \ln P\right) \quad \text{при} \quad k = 0.3$$

$$\delta = 221.55874\, K^{-10/7} \exp\left(2.5 \ln P\right) \quad \text{при} \quad k = 0.6$$

Тогда нормальное давление под штампами согласно (2.2) выразится формулой

$$\frac{p(x)}{P} = \left[\frac{2}{1-k}\right]^{\frac{\nu-1}{2}} [(1-x)(x-k)]^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{m=-1}^{4} X_m \varphi_m \left[\frac{2}{1-k} x - \frac{1+k}{1-k}\right] \quad (4.4)$$




Фиг. 1.

Затем при помощи приведенной выше таблицы, формулы (4.4) и табл. 2 построены графики нормального давления (фиг. 1).

*Таблица 2*

| $p(x)/P$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $k=0.3$ | $x$ | $k=0.3$ | $k=0.6$ |
| 0.32 | 0.89367 | 0.62 | 0.41442 | 1.19200 |
| 0.34 | 0.67487 | 0.64 | 0.41583 | 0.90761 |
| 0.36 | 0.57111 | 0.66 | 0.41689 | 0.78760 |
| 0.38 | 0.50994 | 0.68 | 0.41759 | 0.72876 |
| 0.40 | 0.47094 | 0.70 | 0.41795 | 0.70035 |
| 0.42 | 0.44543 | 0.72 | 0.41807 | 0.68848 |
| 0.44 | 0.42881 | 0.74 | 0.41614 | 0.68553 |
| 0.46 | 0.41831 | 0.76 | 0.41840 | 0.68690 |
| 0.48 | 0.41212 | 0.78 | 0.41918 | 0.68977 |
| 0.50 | 0.40895 | 0.80 | 0.42097 | 0.69253 |
| 0.52 | 0.40789 | 0.82 | 0.42437 | 0.69454 |
| 0.54 | 0.40821 | 0.84 | 0.43021 | 0.69607 |
| 0.56 | 0.40939 | 0.86 | 0.43955 | 0.69832 |
| 0.58 | 0.41101 | 0.88 | 0.45933 | 0.70357 |
| 0.60 | 0.41277 | 0.90 | 0.47679 | 0.71617 |
| | | 0.92 | 0.51125 | 0.74274 |
| | | 0.94 | 0.56577 | 0.79615 |
| | | 0.96 | 0.56938 | 0.90510 |
| | | 0.98 | 0.86003 | 1.16686 |

Авторы искренне признательны Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за неоднократное ценное обсуждение работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 20 I 1977

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

## ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՏԵՍԱԿ ԴՐՈՇՄՆԵՐԻ ՃՆՇՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

### Ամփոփում

*Աշխատանքում դիտարկված է կիսահարթության համար սիմետրիկ դասավորված երկու դրոշմների ճնշման կոնտակտային խնդիրը, երբ լարումների և դեֆորմացիաների միջև տեղի ունի աստիճանային կապ։ Խնդիրը լուծված է օրթոգոնալ բազմանդամների օգտագործման եղանակով և լուծումը բերված է գծային հավասարումների անվերջ համակարգի։ Դիտարկված է թվային օրինակ։*

# ON THE CONTACT PROBLEM OF NONLINEAR STEADY CREEP WITH TWO IDENTICAL PUNCHES PRESSED IN A SEMI-PLANE

B. S. SARKISIAN, V. G. MKHITARIAN, L. O. OVSEPIAN

S u m m a r y

The contact problem for a semi-plane with two identical punches is considered. The power law is assumed to hold between stresses and strains. The initial integral equation is solved by the method of orthogonal polynomials. A particular case is examined.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, № 5.
2. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
4. *Turner F., Blomquist K.* A study of the applicability of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy. J. Aeronaut. Sci., 1956, XXIII, № 12.
5. *Жуков А. М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С.* Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести. Инженерный сборник, 1953, т. XVII.
6. *Jonson A.* The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engineering, 1949, XXI, № 239.
7. *Odqvist F.* Engineering theories of metallic creep. Memorie Symposium la plasticita nella Scienza della costruzioni in onore d. Danussa, Bologna, 1956.
8. *Арутюнян Н. Х. и Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, № 5.
9. *Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М., «Наука», 1967.
10. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактных задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
11. *Carleman T.* Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Z., 1922, Bd. 15.
12. *Сакалюк К. Д.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
14. *Самко С. Г.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши. ДАН СССР, 1967, т. 176, № 5.
15. *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования. Диф. урав., 1968, т. 4, № 2.
16. *Слабодянюк А. П.* Вдавливание двух штампов в неоднородную полуплоскость. ПМ, 1973, т. 9, вып. 1, № 11.
17. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О.* Передача нагрузки от степенно-упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 27, № 5.

18. *Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О.* Периодическая контактная задача для полуплоскости со степенно-упрочняющимися накладками. Ученые записки ЕГУ, № 2, 1975.
19. *Мхитарян В. Г.* О передаче нагрузки от двух степенно-упрочняющихся накладок к деформируемому основанию и связанном с ней нелинейным интегральным уравнением. Ученые записки ЕГУ, № 3, 1976.
20. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Физматгиз», 1962.