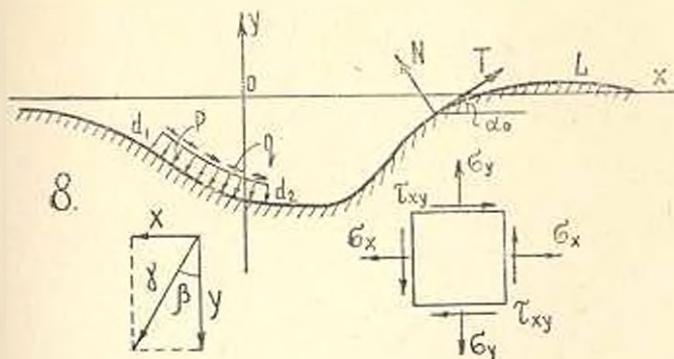


Соотношения (1.1) вытекают из функции

$$z = \omega(w) = h \left(w + \frac{A}{r} - \frac{iC}{r^2} - \frac{K}{r^3} \right) \quad (1.2)$$

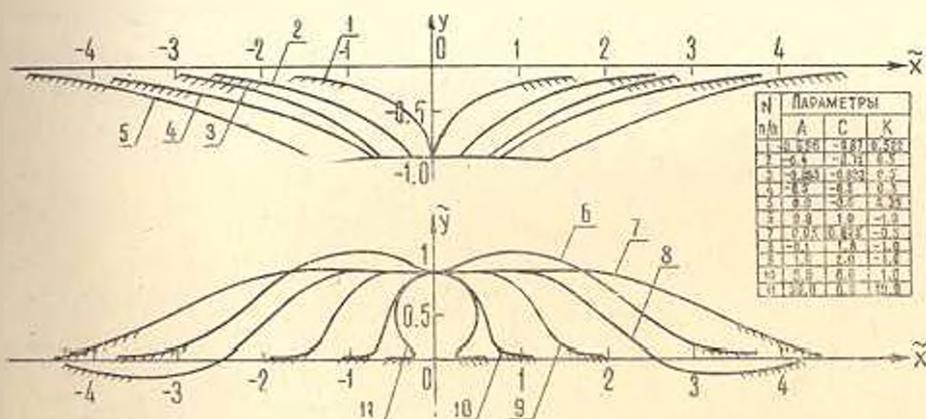
конформно отображающей нижнюю полулоскость W на рассматриваемую полубесконечную область S , где

$$r = w - i; \quad z = x + iy; \quad w = \xi + i\eta; \quad \eta \leq 0; \quad i = \sqrt{-1}$$



Фиг. 1. Общая расчетная схема.

Отметим, что предлагаемая отображающая функция (1.2) позволяет описать, а, следовательно, и решить задачу о напряженном состоянии для широкого класса полубесконечных симметричных областей в виде вырезов и выступов трапециевидального сечения. Наиболее характерные области, конформное отображение которых реализуется разработанной рациональной функцией, приведены на фиг. 2. Расположение самой области, занятой



Фиг. 2. Некоторые виды криволинейных областей, конформное отображение которых реализуется предложенной функцией.

телом, для каждой граничной кривой указано штриховкой некоторой ее части. Наличие в отображающей функции трех параметров позволило по-

лучить качественно новые области, исследование напряженного состояния которых имеет практическое и теоретическое значение.

Как известно [1], решение поставленной задачи должно удовлетворять следующей системе уравнений:

уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= Y \end{aligned} \quad (1.3)$$

условию совместности

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.4)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha_0 - \tau_{xy} \sin 2\alpha_0 \\ T &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — компоненты напряжений; X, Y — компоненты объемных сил; N, T — составляющие равномерно распределенной нагрузки; α_0 — угол между нормальной внешней нагрузкой и осью Ox .

Решение поставленной задачи представим в виде суммы двух решений

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1 \quad (1.6)$$

Такой прием при соответствующем подборе частного решения $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ дает возможность удовлетворить неоднородным уравнениям равновесия (1.3) и свести задачу к отысканию дополнительных напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$, удовлетворяющих однородным уравнениям и новым граничным условиям.

Частное решение представим в виде

$$\sigma_x^1 = y^2 \tau_1, \quad \sigma_y^1 = y^2 \tau_2, \quad \tau_{xy}^1 = y^2 \tau_3 \quad (1.7)$$

где $\tau_1 = \tau_1^0 \cos^2 \beta$, $\tau_2 = \tau_1^0 \cos^2 \beta$, $\tau_3 = \tau_1^0 \sin 2\beta$, $\tau_1^0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0}$ — коэффициент бокового давления; μ_0 — коэффициент относительной поперечной деформации.

Компоненты дополнительных напряжений определим по известным [1] соотношениям через функции комплексного потенциала $\Phi(w)$ и $\Psi(w)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 &= 2 \operatorname{Re} [\Phi(w) + \overline{\Phi(w)}] \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 &= 2 \left[\frac{w \overline{\Phi'(w)}}{w'(w)} \Phi'(w) + \Psi(w) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь и далее черта над некоторыми выражениями означает знак сопряженности.

Таким образом, поставленная задача сведена к отысканию двух функций комплексного потенциала.

Подставив выражение (1.7) в (1.5) и принимая во внимание вид отображающей функции, после несложных преобразований получим условие на поверхности в комплексной форме

$$N^0 + iT^0 = h \frac{A(1+t^2)^2 - C(t^4-1) - K(3t^2-1)}{(t+i)^3(t-i)^3} \left\{ -\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} + \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} - i\zeta_{xy} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{[(t-i)^4 - A(t-i)^2 + 2Ci(t-i) + 3K](t+i)^4}{[(t+i)^4 - A(t+i)^2 - 2Ci(t+i) + 3K](t-i)^4} \right\} + p + ig \quad (1.9)$$

Аналогичным образом записывается сопряженное условие. Условия на поверхности могут быть записаны [1] также через граничные значения искомых функций комплексного потенциала

$$N^0 + iT^0 = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{1}{\omega'(t)} [\omega(t)\Phi'(t) + \overline{\omega'(t)}\overline{\Phi'(t)}] \quad (1.10)$$

Используя выражения (1.9, 1.10) и им сопряженные, а также свойства интегралов типа Коши, неизвестные функции комплексного потенциала определим из системы интегральных уравнений. Опуская подробности интегрирования, запишем окончательные выражения искомых функций

$$\Phi(w) = \frac{1}{F(w)} \left\{ [A(w-i)^2 - 2Ci(w-i) - 3K] \overline{\Phi(-i)} - [2K + iC(w-i)](w-i)\overline{\Phi'(-i)} - 0.5K(w-i)^2\overline{\Phi''(-i)} - (w-i)^4 [I_1(w) + G_1(w)] \right\} \quad (1.11)$$

$$\Psi'(w) = -\frac{(w-i)^4}{F(w)} \left\{ \Phi(w) + \frac{A(w+i)^2 + 2Ci(w+i) - 3K}{(w+i)^4} [\Phi(-i) - \Phi(w)] - \frac{2K - iC(w-i)}{(w+i)^3} \Phi'(-i) - \frac{0.5K}{(w+i)^2} \Phi''(-i) + I_2(w) + G_2(w) + \frac{w(w+i)^2 + A(w+i)^2 + iC(w+i) - K}{(w+i)^4} \Phi'(w) \right\} \quad (1.12)$$

где

$$F^*(w) = (w-i)^4 - A(w-i)^2 + 2Ci(w-i) + 3K$$

Функция $I_1(w)$ зависит от вида граничной поверхности области и характера объемных сил

$$l_1(\omega) = -\frac{l_3 + il_4}{\omega - i} + \frac{l_7 + il_8}{(\omega - i)^2} + \frac{l_{10} + il_9}{(\omega - i)^3} + \\ + \frac{l_4(\omega - i) - il_5}{(\omega - i)^3} - \frac{l_6(\omega - i) - il_2}{(\omega - i)^2} \quad (1.13)$$

где

$$l_1 = 2a_7 a_3, \quad l_2 = a_x(a_{10} - a_1) - a_y(a_{10} + a_4) \\ l_3 = a_y(a_5 + a_{11}) - a_x(a_{11} - a_3), \quad l_4 = a_1 a_6, \quad l_5 = a_1 a_7, \quad l_6 = a_1 a_8 \\ l_7 = a_1 a_9, \quad l_8 = a_2 a_{xy}, \quad l_9 = a_{10} a_{xy}, \quad l_{10} = a_{11} a_{xy} \\ a_1 = a_x + a_y, \quad a_x = 0.5 h_{xz}^2, \quad a_y = 0.5 h_{zy}^2, \quad a_{xy} = h_{xy}^2 \quad (1.14)$$

Коэффициенты a_1, \dots, a_{11} определяются параметрами отображающей функции, то есть зависят от вида граничной кривой

$$a_3 = \frac{1}{64} [8A(A + 2C + 4) + 12C(C + 2K) + 3K(4A + 5K)] \\ a_4 = \frac{1}{32} [4A(2A + 3C + 2K) + 8C(2 + C) + 3K(5C + 3K)] \\ a_5 = \frac{1}{32} [4A(4A + 4C + 3K) + 8C(C + 2K) + K(9K + 16)] \\ a_6 = \frac{1}{16} [12A(2C + K) + 3K(2C + K)] \\ a_7 = 2AK + C^2, \quad a_8 = 2.5CK, \quad a_9 = 1.5K^2 \\ a_{10} = \frac{1}{32} [4A(C + K) + 4C(4 + C) + 3K(3C + 2K)] \\ a_{11} = \frac{K}{32} [4(A + C) + 3K + 16] \quad (1.15)$$

Вторая функция из (1.11) $G_1(\omega)$ является характеристикой поверхностной нагрузки и определяется из выражения

$$G_1(\omega) = -\frac{\kappa + i\rho}{2\pi} \left[M_1 + \frac{A(\omega - i)^2 - 2Ci(\omega - i) - 3K}{(\omega - i)^2} (n_{13} - \right. \\ \left. - in_{14} - M_2) \right] + \frac{n_2 + in_3}{(\omega - i)} - \frac{n_8 + in_{10}}{(\omega - i)^2} - \frac{n_{11} + in_{12}}{(\omega - i)^3} \quad (1.16)$$

В выражении (1.16) приняты следующие обозначения:

$$M_1 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\gamma^2 + (\zeta - \zeta_2)^2}{\gamma^2 + (\zeta - \zeta_1)^2} \right] - i \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\gamma}{\zeta_1 - \zeta} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\gamma}{\zeta_2 - \zeta} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 n_7 &= \frac{1}{2\pi} (gm_3 + pm_6), & n_8 &= \frac{1}{2\pi} (pm_3 - gm_6), & n_9 &= \frac{1}{4\pi} (gm_7 - pm_6) \\
 n_{10} &= \frac{1}{4\pi} (pm_7 + gm_6), & n_{11} &= \frac{3K}{2\pi} (gn_1 - pn_2), & n_{12} &= \frac{3K}{2\pi} (pn_1 - gn_2) \\
 n_{13} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t_1^2}{1+t_2^2} \right), & n_{14} &= \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{t_2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{t_1} \right)
 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь t_1 и t_2 — точки границы нижней полуплоскости, соответствующие крайним точкам приложения внешней нагрузки:

$$\begin{aligned}
 m &= t_0^2 - l^2 - 1, & m_1 &= m^2 + 4t_0^2, & n_1 &= 2lm/m_1, & n_2 &= 2lt_0/m_1 \\
 n_3 &= -\frac{n_2}{m_1} [m^2 - 4(1+t^2)], & n_4 &= \frac{4l}{m_1} [4t_0^2(1+m) - m^2] \\
 m_2 &= 3(t_0^2 - 1) + l^2, & m_3 &= m^3 - 12mt_0^2, & m_4 &= 2t_0(3m^2 - 4t_0^2) \\
 n_5 &= -\frac{2l}{m_1^3} (m_2m_3 + 6t_0m_4), & n_6 &= \frac{2l}{m_1^3} (m_2m_4 - 6t_0m_3) \\
 m_5 &= An_1 - Cn_4 - Kn_5, & m_6 &= An_2 + Cn_3 - Kn_6 \\
 m_7 &= 4Cn_2 + 3Kn_3, & m_8 &= 3Cn_1 - 3Kn_4
 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Таким образом, неизвестные функции, входящие в выражение первого комплексного потенциала, полностью определены.

Функции $I_2(w)$ и $G_2(w)$ из (1.12) определяются аналогичным образом:

$$\begin{aligned}
 I_2(w) &= \frac{I_3 - il_1}{w - i} + \frac{p_1 + ip_2}{(w - i)^2} - \frac{p_5 + ip_6}{(w - i)^3} - \frac{p_3 - ip_4}{(w - i)^4} + \\
 &+ \frac{p_{10} + ip_{11}}{(w - i)^5} + \frac{p_9 - ip_{12}}{(w - i)^6} - \frac{p_{12} + ip_8}{(w - i)^7}
 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь постоянные коэффициенты $p_1 \dots p_{12}$ зависят от вида граничной поверхности и характера объемных сил

$$\begin{aligned}
 p_1 &= a_x(a_4 - a_{10}) - a_y(a_1 + a_{10}), & p_2 &= a_x(a_5 - a_{11}) - a_y(a_5 + a_{11}) \\
 p_3 &= a_2a_6, & p_4 &= a_2a_7, & p_5 &= a_2a_8, & p_6 &= a_2a_9, & p_7 &= a_4a_{xy} \\
 p_8 &= a_4a_{xy}, & p_9 &= a_6a_{xy}, & p_{10} &= a_4a_{xy}, & p_{11} &= a_4a_{xy} \\
 p_{12} &= a_6a_{xy}, & a_2 &= a_x - a_y
 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Функция $G_2(w)$, зависящая от вида поверхностной нагрузки, определяется выражением

$$\begin{aligned}
 G_2(w) &= \frac{g - ip}{2\pi} \left[M_1 + \frac{A(w+i)^2 + 2Ci(w+i) - 3K}{(w+i)^4} (n_{10} + \right. \\
 &+ in_{14} - M_1) \left. \right] - \frac{n_1 - in_2}{w+i} + \frac{n_3 - in_4}{(w+i)^2} + \frac{n_{11} - in_{12}}{(w+i)^3}
 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Принятые здесь обозначения см. по формулам (1.17, 1.18).

В найденных функциях комплексных потенциалов остались неопределенными шесть комплексных постоянных — $\Phi(-i)$, $\Phi'(-i)$, $\Phi''(-i)$ и им сопряженные, которые легко определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \frac{B(w)}{F(w)}, \quad \Phi'(w) = \frac{B'(w)}{F(w)} - \frac{B(w)F'(w)}{F^2(w)} \\ \Phi''(w) &= \frac{B''(w)}{F(w)} - 2 \frac{B'(w)F'(w)}{F^2(w)} + \frac{B(w)}{F^2(w)} \left[2 \frac{(F'(w))^2}{F(w)} - F''(w) \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

и ей сопряженной.

Здесь через $B(w)$ обозначен числитель функции (1.11). Для решения системы уравнений (1.22) необходимо в функции (1.11) и ее производных положить $w = -i$.

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии полубесконечных областей, находящихся в условиях плоской деформации, полностью решена.

Отметим, что аналогичная постановка рассмотрена также в других работах [2, 3]. Однако, полученное в настоящей работе замкнутое решение позволяет рассмотреть значительно более широкий класс полубесконечных симметричных областей трапециевидального профиля.

Ввиду сложности функций комплексного потенциала (1.11, 1.12) реализация полученного замкнутого решения осуществляется на ЭВМ. Поскольку решение замкнутое, то ЭВМ осуществляет лишь простейшие вычислительные операции, что значительно уменьшает затраты машинного времени по сравнению с численными методами. На расчет одного варианта с количеством расчетных точек порядка 150—200 требуется около двух минут машинного времени. Существенным преимуществом является также возможность исследования напряженного состояния всего класса областей, описываемых функцией (1.2), на основе единой программы.

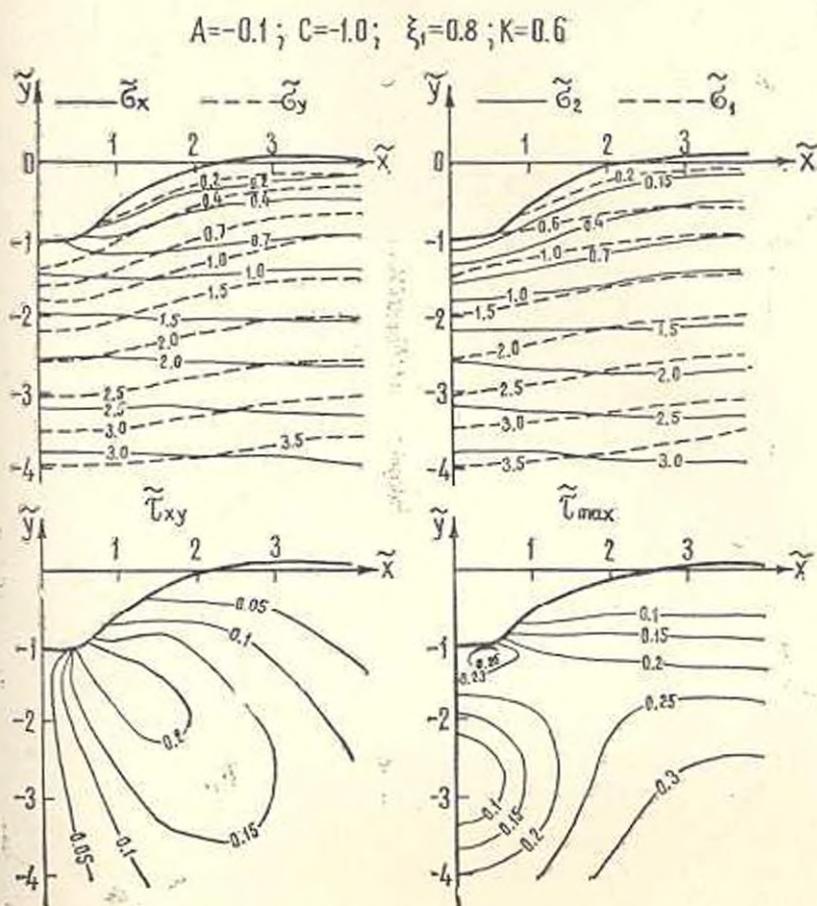
Результаты расчетов напряженного состояния полубесконечных областей в поле гравитации (фиг. 3, 4) представлены в виде изолиний компонент напряжений, построенных в относительных координатах $x = x/H$; $y = y/H$. Такой прием позволит определить напряженное состояние при рассмотрении реальных объектов по изолиниям относительных напряжений

$$\sigma = \gamma_1 H z$$

где σ — величина относительных напряжений; σ — компоненты напряжений, соответствующие реальным объектам, при заданной объемной массе γ , и определенной глубине выреза или высоте выступа H .

При построении изолиний сжимающие напряжения приняты положительными.

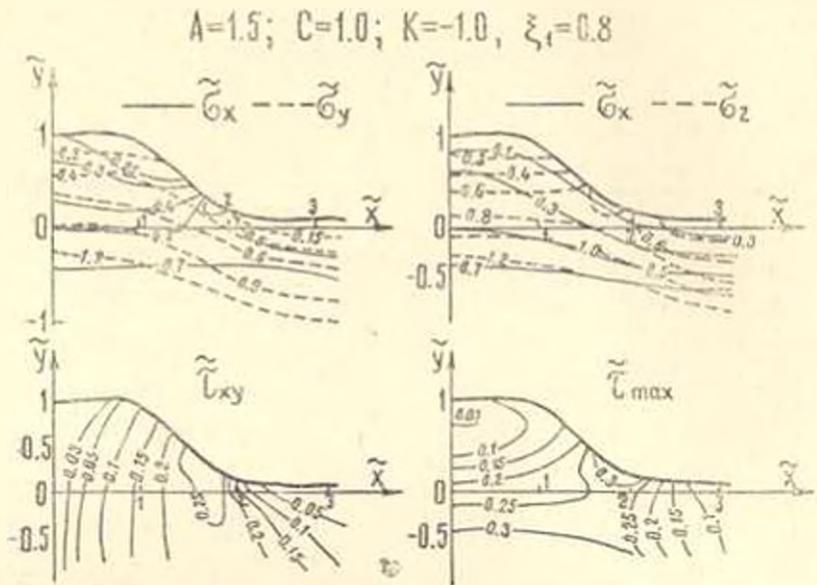
На фиг. 3 представлены изолинии всех компонент напряжений в тяжелой полуплоскости с вырезом. Граница области описывается уравнениями (1.1) при $A = -0.1$; $C = -1.0$; $K = 0.6$. В значительной части области, ограниченной по глубине сечением $\tilde{y} = -2.6$ и по простиранию $\tilde{x} = 1$, горизонтальные нормальные напряжения σ_x превосходят по величине напряжения τ_v . С удалением от этой зоны соотношение нормальных напряжений прихо-



Фиг. 3. Изолинии относительных компонент напряжений.

дит в соответствие с принятым коэффициентом бокового давления $\xi_1 = 0.8$. Очаги концентрации касательных τ_{xy} и максимальных касательных τ_{max} напряжений примыкают к участкам границы, обладающим наибольшей кривизной. Выявление очагов концентрации позволяет судить о местоположении потенциальных зон ослабления, в которых возможна потеря прочности. На оси симметрии в глубине области ($\tilde{y} = -2.7$) имеет место зона деконцентрации максимальных касательных напряжений, характеризующаяся гидростатическим распределением напряжений.

На фиг. 4 приведены изолинии напряжений в тяжелой полуплоскости с выступом. Согласно характеру изолиний, напряжения σ_x под гребнем выступа практически соответствуют распределению напряжений в тяжелой полуплоскости. Под подошвой выступа, вблизи точки перегиба наблюдается некоторая концентрация этих напряжений. Этой же зоне присуща существенная концентрация и остальных компонентов напряжений.



Фиг. 4. Распределение напряжений в тяжелой полуплоскости с выступом.

Проведенный анализ показывает существенное влияние фактора криволинейности на величины и характер распределения напряжений в полубесконечных симметричных областях. Неучет этого фактора и применение упрощенных расчетных методов может приводить к существенным погрешностям при определении напряженного состояния.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 17 III 1975

Չ. Կ. ՏԵՐ-ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Գ. Մ. ԱՔԱՅԵՎՈՎ, Գ. Ե. ՇԱԼԻՄՈՎ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅՑԱՅԻՆ ԵՎ ԵԱՎԱԼԱՅԻՆ ՈՒԿԵՐԻ ԱՋԳԻՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ
ԿԻՍԱՆԱԿԵՐՋ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԼԱՐՎԱՅԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա մ փ ո փ ո ռ լ

Գիտարկված է համասեռ և կորագիծ եզրագծով առաձգական կիսաան-
վերջ հարթության լարվածային վիճակի խնդիրը ծանրության և մակերև-
վույթային ուժերի ազդեցության դեպքում:

ինդրի լուծումը կառուցվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շրջանակներում, ընդ որում օգտագործվում են կոնֆորմ արապատկերումը և Կոշիի տիպի ինտեգրալը: Նախօրոք հեղինակների կողմից նախկինում շարադրված մեթոդով ծավալային ուժերը փոխարինվում են մակերևույթային ուժերով:

Աշխատանքում արտադատկերող ֆունկցիան ընտրվում է այնպես, որ այն թույլ է ապիս հետադոտել սիմետրիկ կիսահարթույթյունների լայն ընտանիք հանվածքի և լցվածքի ձևով:

Ստացված արդյունքները կարող են օգտագործվել ղեմմեխանիկայի մի քանի խնդիրները լուծելու համար, այդ թվում նաև լինալին դանգվածների սրոշ ձևերի կայունությունը ղեմահատելու համար:

A STRESSED STATE IN SEMI-INFINITE REGIONS SUBJECT TO BODY AND SURFACE FORCES

Z. G. TER-MARTIROSYAN, D. M. AKHPIATELOV, G. E. SHALIMOV

S u m m a r y

A problem is solved for a stressed state in a homogeneous isotropic elastic curvilinear semi-plane subject to body and surface forces. It is solved in terms of a plane problem of the elasticity theory by means of the Kolosov-Muskhelishvili complex potentials method, employing conformal mapping and the properties of Cauchy integrals. Making use of the method previously described by the authors, the body forces are first replaces by surface forces. The investigated region is mapped onto a lower semi-plane. The mapping function is selected to enable a wide set of symmetrical semi-planes having cuts and convexities to be investigated. The equations of the complex potentials are obtained in the closed form and are used to express the stress components in the familiar way. It is suggested that the stressed state of the region being investigated be analyzed by calculating the stresses at certain points in the region, making use of the obtained formulas, and by plotting isolines and stress curves.

The results obtained can be employed for solving certain problems in geomechanics that pertain to the evaluation of the stability of rock masses.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. «Наука», 1966.
2. Ахпателов Д. М., Тер-Мартirosян Э. Г. О напряженном состоянии весомых полубесконечных областей. Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 3.
3. Тер-Мартirosян Э. Г., Ахпателов Д. М. Напряженное состояние криволинейных полубесконечных областей в поле гравитации. Доклады АН СССР, 1975, т. 220, № 2.