ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 3, 1977 Механика

С. А. МОЛАСЯН

# О ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ, СВОБОДНО ЛЕЖАЩЕЙ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Хорошо известно, что если на твердое тело, лежащее не шероховатой плоскости, действует сила, вектор которой лежит внутри конуса трения, то тело остается неподвижным. В настоящей работе обращается внимание на то, что указанная закономерность не сохраняется в случае, когда тело является деформируемым, то есть имеет «внутренние колебательные степени свободы», а действующая сила является переменной во времени. В этом случае движение тела по неподвижной шероховатой плоскости может происходить также, если вектор силы лежит внутри конуса статического трения. Задача рассматривается на примере простейшей системы, представляющей собой лежащее на шероховатой плоскости твердое тело, внутри которого расположено другое тело, связанное с первым посредством упругого и демпфирующего элементов. Периодическая сила приложена именно к этому последнему телу, причем рассматриваются два случая — действие мгновенных импульсов и гармонического возмущения.

Показано, что в сравнительно широкой области изменения параметров система движется по плоскости в направлении, противоположном направлению действия импульсов. Дано физическое объяснение этого, на первый взгляд, парадоксального результата.

Рассмотренная задача представляет интерес в связи с теорией вибрационного перемещения [1], в частности, в связи с расчетом вибрационных двигателей [2, 3] и с изучением поведения свободно лежащих на грунте сооружений под действием импульсной нагрузки. Для частного случая абсолютно твердого тела изучаемая система рассмотрена в работе [4].

## § 1. *Дифференциальные уравнения движения колебательной системы*

Динамическая схема рассматриваемой колебательной системы представлена на фиг. 1. Основное тело, имеющее массу $m_1$, расположено на неподвижной шероховатой плоскости. Внутри этого тела вдоль некоторой линии, составляющей угол $\delta$ с вертикалью, может перемещаться дополнительное тело массы $m_2$, связанное с основным телом линейными упругим и демпфирующим элементами.

Система координат $xoy$ неподвижна; относительно этой системы и рассматривается движение колебательной системы. Подвижная система координат $u0_1v$, относительно которой рассматривается движение дополнительного тела, жестко связана с основным телом. Предполагаем, что между основным телом и неподвижной плоскостью действует сила сухого трения.

Описанная система имеет три степени свободы. Общие уравнения движения системы под действием импульсной силы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x} + m_2\ddot{u}\sin\delta = F(t) + Q(t)\sin\delta \\
&m\ddot{y} - m_2\ddot{u}\cos\delta = N(t) - mg - Q(t)\cos\delta \qquad (1.1)\\
&\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = \frac{1}{m_2}Q(t) + g\cos\delta - (\ddot{x}\sin\delta - \ddot{y}\cos\delta)
\end{aligned}
$$

где $x(t)$, $y(t)$ — координаты основного тела в неподвижной системе координат $xyz$,

$\delta$ — угол наклона оси упругого элемента к вертикали,

$c$ — жесткость упругого элемента,

$g$ — ускорение силы тяжести,

$u(t)$ — координата дополнительного тела в системе осей, связанной с основным телом,

$Q(t)$ — импульсная сила,

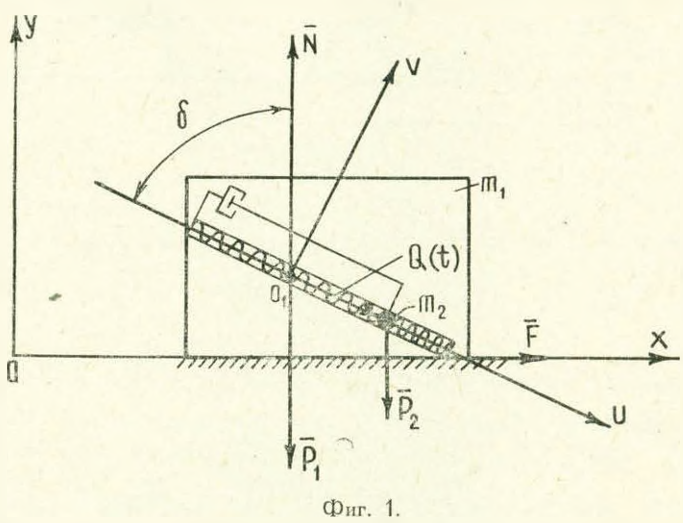
$F(t)$ — сила сухого трения

$N(t)$ — нормальная реакция,

$k=\sqrt{\frac{c}{m_2}}$ — частота свободных колебаний дополнительного тела при неподвижном основном теле,

$m = m_1 + m_2$ — масса системы,

$\mu$ — коэффициент вязкого сопротивления $\left(n = \frac{\mu}{2m_2}\right)$.




Фиг. 1.

Периодическую импульсную силу предполагаем заданной в виде

$$
Q(t) = Q(t+T) = \begin{cases} H & \text{при } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < t < T \end{cases} \qquad (1.2)
$$

где $H$ — некоторая постоянная, а $T$ — период импульсной силы (фиг. 2).

Если колебательная система не отрывается от неподвижной плоскости, то

$$N(t) > 0, \quad y = 0 \tag{1.3}$$

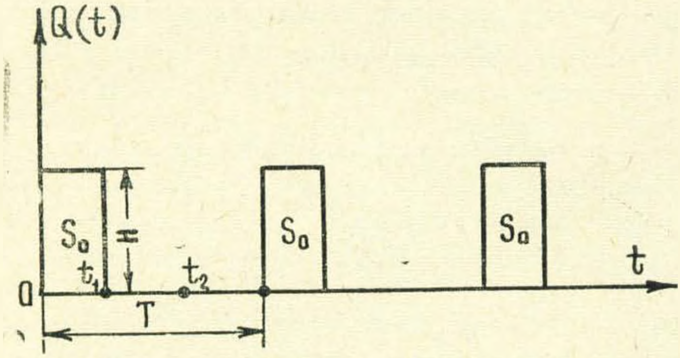
а сила сухого трения $F(t)$ связана с нормальной реакцией $N(t)$ соотношениями

$$F(t) = \begin{cases} -fN(t) & \text{при} \quad \dot{x} > 0 \\ fN(t) & \text{при} \quad \dot{x} < 0 \\ \varepsilon f_1 N(t) & \text{при} \quad \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

где $f$ — коэффициент трения скольжения,
$f_1$ — коэффициент трения покоя,
$\varepsilon$ — множитель, лежащий в пределах $-1 < \varepsilon < 1$.

Основное тело находится в покое на плоскости ($y=0$, $x=\text{const}$), если

$$-f_1 N(t) < F(t) < f_1 N(t) \tag{1.5}$$




Фиг. 2.

При движении основного тела вперед по плоскости

$$F(t) = -fN(t)$$

и

$$y = 0, \quad \dot{x} > 0, \quad N(t) > 0$$

Тогда из системы (1.1) получим

$$\ddot{x} = \frac{\sin(\delta - \rho)}{m\cos\rho}\left[Q(t) - m_2\ddot{u}\right] - fg \tag{1.6}$$

Аналогично для случая движения назад

$$F(t) = fN(t)$$

$$y = 0, \quad \dot{x} < 0, \quad N(t) > 0$$

и

$$\ddot{x} = \frac{\sin(\delta + \rho)}{m\cos\rho}[Q(t) - m_2\ddot{u}] + fg \tag{1.7}$$

Уравнения (1.6) и (1.7) можно записать в одной форме

$$\ddot{x} = \frac{\sin(\delta \mp \rho)}{m\cos\rho}[Q(t) - m_2\ddot{u}] \mp fg \tag{1.8}$$

причем, верхние знаки здесь и далее соответствуют движению тела вперед ($\dot{x}>0$), а нижние — назад ($\dot{x}<0$).

Итак, для движения колебательной системы под действием импульсной силы при наличии контакта с плоскостью получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{gathered}\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u = \frac{1}{m_2}Q(t) + g\cos\delta - \ddot{x}\sin\delta \\ \ddot{x} = \frac{\sin(\delta \mp \rho)}{m\cos\rho}[Q(t) - m_2\ddot{u}] \mp fg\end{gathered} \tag{1.9}$$

или после простых преобразований

$$\begin{gathered}\ddot{x} = a_\pm[Q(t) - m_2\ddot{u}] \mp fg \\ \ddot{u} + 2n_\pm\dot{u} + k_\pm^2u = \frac{1}{m_2}Q(t) + b_\pm\end{gathered} \tag{1.10}$$

где

$$a_\pm = \frac{\sin(\delta \mp \rho)}{m\cos\rho}$$

$$b_\pm = \frac{g\cos(\delta \mp \rho)}{(1 - a_\pm m_2\sin\delta)\cos\rho}$$

$$n_\pm = \frac{n}{1 - a_\pm m_2\sin\delta}$$

$$k_\pm^2 = \frac{k^2}{1 - a_\pm m_2\sin\delta}$$

## § 2. *Движение дополнительного тела под действием импульсной силы при неподвижном основном теле*

Движение дополнительного тела описывается третьим уравнением (1.1). Рассмотрим частный случай, когда во время движения дополнительного тела основное тело находится в покое. В этом случае будем иметь

$$x = \text{const}, \quad y = 0, \quad N(t) > 0$$

и упомянутое уравнение принимает следующий вид:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = \frac{1}{m_2} Q(t) + g\cos\delta \tag{2.1}$$

Найдем установившееся периодическое движение дополнительного тела, учитывая, что сила $Q(t)$ определяется соотношением (1.2) (фиг. 2). При этом будем считать промежуток времени $t_1$ весьма малым, а импульс $S_0 = Ht$ — конечным. Тогда, если в начальный момент времени $t = -0$

$$u(-0) = u_1 + u_{st}, \quad \dot{u}(-0) = \dot{u}_1 \tag{2.2}$$

где $u_{st} = \frac{g\cos\delta}{k^2}$, а $u_1$ и $\dot{u}_1$ — некоторые неизвестные величины, то в момент времени $t = t_1 = +0$ перемещение и скорость дополнительного тела будут равны соответственно

$$\begin{aligned} u(t_1) &= u(+0) = u_{st} + u_1 \\ \dot{u}(t_1) &= \dot{u}(+0) = \dot{u}_1 + \frac{S_0}{m_2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

В интервале времени $(t_1, T)$ движение дополнительного тела описывается уравнением

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = g\cos\delta \tag{2.4}$$

решение которого имеет вид

$$\begin{gathered} u = e^{-nt}(C_1\cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + u_{st} \\ (k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}) \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\dot{u} = e^{-nt}[(C_2 k_1 - C_1 n)\cos k_1 t - (C_2 n + C_1 k_1)\sin k_1 t] \tag{2.6}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные, легко выражающиеся через $u_1$ и $u_2$ при учете условий (2.3)

$$\begin{gathered} C_1 = u_1 \\ C_2 = \frac{1}{k_1}\left(nu_1 + \dot{u}_1 + \frac{S_0}{m_2}\right) \end{gathered} \tag{2.7}$$

В свою очередь, постоянные $u_1$ и $\dot{u}_1$ найдутся из условий периодичности движения дополнительного тела

$$\begin{gathered} u(T) = u(-0) = u(+0) \\ \dot{u}(T) = \dot{u}(-0) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Исходя из последних условий при учете равенств (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6), получим

$$u_1 = \frac{S_0 e^{nT}}{k_1 m_2} \frac{\sin k_1 T}{(1 - 2e^{nT}\cos k_1 T + e^{2nT})}$$

$$\dot{u}_1 = -\frac{S_0}{m_2}\,\frac{1 - e^{nT}\cos k_1 T + \dfrac{n}{k_1}e^{nT}\sin k_1 T}{1 - 2e^{nT}\cos k_1 T + e^{2nT}}$$

Итак, в установившемся режиме при неподвижном основном теле движение дополнительного тела происходит согласно закону

$$u(t) = u(t+T) = \frac{S_0 e^{-nt}}{m_2 k_1}\,\frac{\sin[k_1(T-t)] + e^{nT}\sin k_1 t}{e^{nT} + e^{-nT} - 2\cos k_1 T} + \frac{g\cos\delta}{k^2} \quad (2.9)$$

$$(0 \leqslant t \leqslant T)$$

## § 3. *Некоторые качественные закономерности поведения системы под действием периодических импульсов*

Пусть система находится на плоскости, причем основное тело неподвижно. Тогда $y=0$, $x=\mathrm{const}$ и из уравнений (1.1) получаются следующие выражения для силы трения $F$, нормальной реакции $N$ (далее для упрощения пренебрегаем коэффициентом вязкого трения $n$):

$$\begin{aligned} F &= m_2 g \sin\delta\cos\delta - cu\sin\delta \\ N &= m_1 g + cu\cos\delta + m_2 g\sin^2\delta \end{aligned} \quad (3.1)$$

При $n=0$ выражение (2.9) после простых преобразований может быть представлено в форме

$$u(t) = u(t+T) = \frac{S_0}{2m_2 k}\,\frac{\cos k\left(t - \dfrac{T}{2}\right)}{\sin\dfrac{kT}{2}} + \frac{m_2 g}{c}\cos\delta \quad (3.2)$$

и тогда условие отсутствия отрыва основного тела от плоскости $N>0$ сводится к требованию выполнения неравенства

$$\frac{kS_0\cos\delta}{2\sin\dfrac{kT}{2}}\cos k\left(t - \frac{T}{2}\right) > -mg \quad (3.3)$$

в любой момент времени $t$. Если период следования импульсов $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ больше периода свободных колебаний дополнительного тела $T_0 = \dfrac{2\pi}{k}$, то есть $\omega < k$, то необходимое и достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (3.3) при любом $t$, можно записать в виде

$$a > |\cos\delta| \quad (3.4)$$

где обозначено

$$a = \frac{2mg}{S_0 k}\left|\sin\frac{kT}{2}\right| \quad (3.5)$$

Аналогичным образом условие (1.5) отсутствия скольжения основного тела выражается при $\omega < k$ в виде

$$a \sin \rho_1 > |\sin(\delta \mp \rho_1)| \tag{3.6}$$

где, как и раньше, верхние знаки отвечают скольжению вперед, а нижние— назад. Очевидно, что при одновременном выполнении неравенств (3.4) и (3.6) основное тело будет покоиться на плоскости. При выполнении условий

$$\begin{gathered} a \sin \rho_1 < |\sin(\delta - \rho_1)|, \quad a \sin \rho_1 > |\sin(\delta + \rho_1)| \\ a > |\cos \delta| \end{gathered} \tag{3.7}$$

основное тело будет скользить без отрыва вперед по плоскости, а при выполнении условий

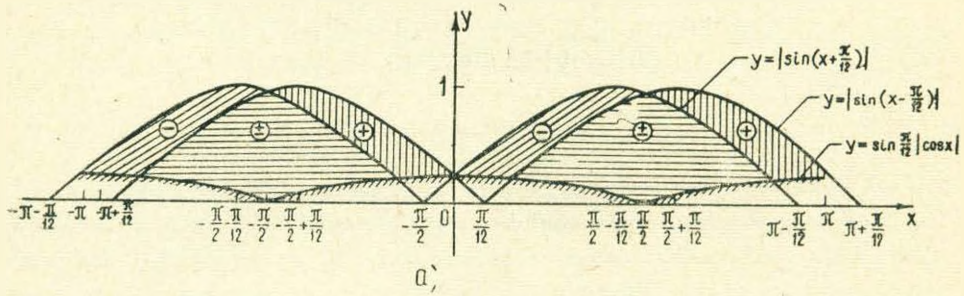
$$\begin{gathered} a \sin \rho_1 > |\sin(\delta - \rho_1)|, \quad a \sin \rho_1 < |\sin(\delta + \rho_1)| \\ a > |\cos \delta| \end{gathered} \tag{3.8}$$

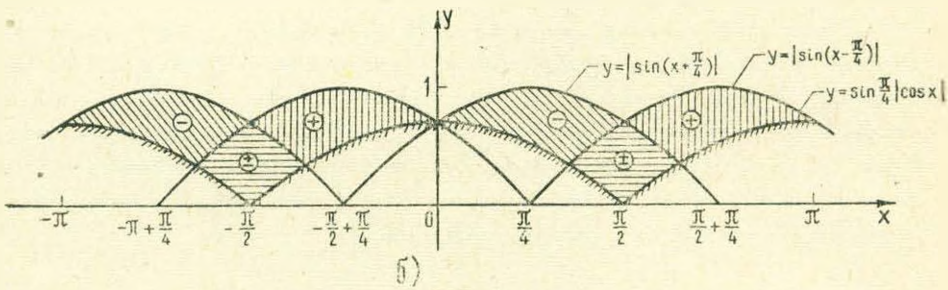
оно будет скользить без отрыва назад.

На фиг. 3*а*, *б* для трех значений угла трения $\rho_1 \left(\rho_1 = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ в координатах $x = \delta$, $y = a \sin \rho_1$ изображены области, определяемые неравенствами (3.4), (3.6), (3.7), (3.8). Области, в которых происходит безотрывное скольжение основного тела только вперед, помечены знаком «+», а только назад — знаком «—»; в области, помеченной знаком «+ —» имеет место безотрывное скольжение в обоих направлениях. Наконец, область, лежащая ниже кривой $y = \sin \rho_1 |\cos x|$ и заштрихованная вовнутрь, соответствует движению с отрывом. Из фиг. 3 следует, что поведение рассматриваемой системы существенно отличается от поведения при тех же условиях абсолютно твердого тела. В последнем случае, если вектор импульса, действующий на абсолютно твердое тело, лежит внутри конуса трения $|\delta| < \rho_1$, то тело остается неподвижным. Изучаемую же простейшую деформируемую систему практически при любом значении угла $\delta$ можно заставить не только скользить по плоскости, но и периодически отрываться от последней. Для этого, согласно формуле (3.5) и фиг. 3, следует соответствующим образом выбрать величину $S_0$ и частоту следования импульсов $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Далее, из фиг. 3 видно, что, например, при $\delta > 0$ существует значительная область изменения параметров, при которых тело в рассматриваемом случае движется назад, то есть в направлении, противоположном направлению действия импульса (фиг. 1). Этот, на первый взгляд, неожиданный результат, допускает простое физическое истолкование: импульсы вызывают периодические колебания дополнительного тела; при этом в течение той части периода, когда это тело движется вперед-вниз, оно сжимает пружину $c$ и прижимает основное тело к плоскости, препятствуя его продвижению вперед; в той же части периода, когда дополнительное тело движется назад-вверх, пружина $c$ растягивается и при этом уменьшается нормальная реакция $N$ и вместе с нею — предельная сила сухого трения; в итоге основное тело получает возможность проскальзывать назад.

Аналогично объясняется и возможность отрыва основного тела от плоскости под действием колебаний дополнительного тела.





Фиг. 3.

## § 4. *Случай возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону*

В случае, когда сила $Q(t)$ изменяется по гармоническому закону

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega t \tag{4.1}$$

с амплитудой $Q_0$ и частотой $\omega$, решение уравнения (2.1), отвечающее установившимся вынужденным колебаниям, имеет вид (как и ранее, полагаем $n \approx 0$)

$$u = \frac{Q_0}{m_2(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t + \frac{m_2 g}{c} \cos \delta \tag{4.2}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае анализ приводит к тем же неравенствам (3.4), (3.6)—(3.8) с той лишь разницей, что величина «$a$» определяется выражением

$$a = \frac{mg}{Q_0} \frac{m_2\omega^2}{c} \left| \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 - 1 \right|$$

и что в данном случае для упрощения не требуется предполагать, что $\omega < k$. Поэтому диаграммы, изображенные на фиг. 3, а также все качественные выводы сохраняются и в данном случае.

Ленинаканский филиал Ереванского политехнического института им. К. Маркса

Поступила 10 XI 1976

Ս. Ա. ՄՈԼԱՍՅԱՆ

## ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԱՆՀԱՐԹ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԱԶԱՏ ՏԵՂԱԴՐՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

*Ուսումնասիրվող տատանողական համակարգը իրենից ներկայացնում է անհարթ հարթության վրա գտնվող պինդ մարմին, որի ներսում տեղավորված երկրորդ մարմինը կապված է առաջինի հետ առաձգական և հանգստացուցիչ էլեմենտների միջոցով։ Ենթադրվում է, որ լրացուցիչ մարմնի վրա գործում է իմպուլսային ուժ։*

*Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ դիտարկվող համակարգի վարքը նույն պայմանների դեպքում էապես տարբերվում է բացարձակ պինդ մարմնի վարքից։ Պարզվում է, որ նշված համակարգի շարժումը անհարթ հարթության վրայով հնարավոր է ազդող ուժի վեկտորի ցանկացած ուղղության դեպքում։ Ցույց է տրվում, որ պարամետրերի բավականաչափ մեծ փոփոխման տիրույթում, համակարգը շարժվում է հարթության վրայով իմպուլսային ուժի ազդմանը հակադիր ուղղությամբ։*

## ON MOTION OF AN ELASTIC SYSTEM LYING ON A ROUGH PLANE UNDER THE EFFECT OF PERIODIC IMPULSES

S. A. MOLASIAN

Summary

An oscillating system is considered that consists of a solid, lying on a rough plane, containing another body connected with the former by means of an elastic and damper element. The inner body is assumed to be affected by an impulse force.

Examination indicates that the behaviour of the system in question is unlike that of a perfect solid under the same conditions. The motion of a given system along the rough plane is found to be possible at any direction of the impulse vector. The system is shown to move along the plane in the direction contrary to that of impulse over a wide area of parameter variations.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю.* Вибрационное перемещение. М., Изд. «Наука», 1964.
2. *Рагулькис К. М., Бансевичюс Р. Ю.* О преобразовании высокочастотных механических колебаний в непрерывное движение. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР, Каунас, Вибротехника, 3 (20), 1973.

3. *Бансевичюс Р. Ю., Грубляуските Д. Л., Кочикян А. В., Можелис В. В., Рагульскис К. М., Славенас А. Ю., Улозас Р. В.* Некоторые вопросы высокочастотного вибрационного перемещения. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР. Каунас, Вибротехника, 3 (20), 1973.
4. *Моласян С. А.* К вопросу движения тела по неподвижной шероховатой плоскости под действием импульсной силы. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 1.