ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 3, 1977 Механика

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. М. ТОЛКАЧЕВ

МОДИФИКАЦИЯ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Основные уравнения теории пластин, учитывающей поперечные сдвиги, были опубликованы Э. Рейсснером [1] в 1944 г. В 1945 г. он получил разрешающие уравнения своей теории [2]. В 1947 г. Э. Рейсснер дает несколько иной вывод уравнений, вводя углы поворота, а также дает способ преобразования системы уравнений [3]. В 1949 году А. Грин [4] вывел уравнения Э. Рейсснера энергетическим путем без использования теоремы Кастилиано. М. Шефер [5] (1952) получил статическим и геометрическим путем систему дифференциальных уравнений малого прогиба четвертого порядка относительно вертикального перемещения (в уравнении классической теории появляется неоднородный член, обусловленный нагрузкой) и второго порядка относительно некоторой моментной функции, то есть уравнения работы [3]. На примере свободно опертой пластины, подверженной распределенной по закону синуса нагрузки, он показал, что прогибы пластины по сравнению с классической теорией практически не меняются, поперечные же силы, особенно в углах, видоизменяются. Александр Кромм [6] (1953) построил уточненную теорию пластин, учитывая только деформацию поперечного сдвига и пренебрегая поперечным обжатием. Позднее [7] (1955) он для случая нагруженной синусоидальным распределенным давлением свободно опертой пластины проанализировал характер изменения контурных поперечных усилий, а также поперечные усилия в углах пластины. К. Гиркман и Р. Беер [8] (1958) исследовали случай ортотропной пластины в духе теории Э. Рейсснера. Некоторые обсуждаемые здесь результаты суммированы в монографии [9] (1963). Прием А. Грина использовал также С. П. Тимошенко [10]. Обобщение теории Э. Рейсснера [1] на произвольный закон изменения изгибных напряжений по толщине пластины дал А. Л. Гольденвейзер [11] (1958). При этом закон изменения взят одинаковым для всех трех компонентов напряжения. Л. Я. Айнола [12] (1964) показал, что функция распределения напряжений по толщине пластины, введенная А. Л. Гольденвейзером, может быть определена из вариационного принципа Кастилиано.

Перечисленные работы характерны тем, что рассматривается случай, когда пластина нагружена только нормальными усилиями, прогиб считается постоянным по толщине, закон изменения тангенциальных смещений по толщине из теории не вытекает.

Модификация теории Э. Рейсснера [1] для случая произвольных нагрузок, учитывающая поперечное обжатие, развита П. Нагди [13], который постулирует линейный закон изменения перемещений u, v и напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} по толщине пластины, а прогиб w задает квадратной параболой. Уравнения получены для оболочек с помощью вариационного соотношения Э. Рейсснера [14] и для случая пластины по существу совпали с рейсснеровскими. Поперечное обжатие учитывается отдельной формулой.

В 1974 г. Э. Рейсснер [15] публикует модифицированный вариант своей теории для случая нормальных нагрузок, согласно которому прогиб w не меняется по толщине пластины, смещения u, v изменяются по кубической параболе, напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} — по квадратной параболе. Обобщенные по толщине соотношения закона Гука сохраняют прежний вид.

Вопросы уточнения теории Э. Рейсснера рассматривались также Б. Ф. Власовым [16] и другими авторами.

Известно, что теория Э. Рейсснера, как и теория Кирхгофа-Лява, в контактных задачах приводит к формальным противоречиям при определении реакций, хотя в ряде случаев верно отражает характер напряженного состояния [17]. Эти противоречия связаны с искажением действительного характера изменения реакций вблизи краевых участков зон контакта. То же относится и к варианту П. Нагди [13]. Для устранения указанных противоречий желательна модификация теории Рейсснера. Применительно к расчету клеевых соединений такая модификация дана Ю. П. Артюхиным [18] (1975) в предположении, что клеевой слой не сопротивляется изгибу и растяжению.

Ниже дана попытка модификации теории Рейсснера, которая позволяет устранить формальные противоречия при решении контактных задач.

Рассмотрим общий случай, когда на поверхностях пластины $z=\pm h/2$ действуют поверхностные усилия $q_x^\pm$, $q_y^\pm$, $q_z^\pm$. Граничные условия для напряжений на этих поверхностях будут иметь вид

$$\sigma_z = q_z^\pm, \quad \tau_{xz} = q_x^\pm, \quad \tau_{yz} = q_y^\pm \quad \text{при} \quad z = \pm \frac{h}{2} \tag{1}$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$q_j = q_j^+ - q_j^-, \quad m_j = \frac{h}{2}\,(q_j^+ + q_j^-), \quad j = x,\ y,\ z \tag{2}$$

Будем точно выполнять уравнения равновесия трехмерного тела, а закон распределения перемещений по толщине пластины определим путем точного интегрирования 3-х соотношений закона Гука

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 — смещения произвольной точки пластины в направлении осей x, y, z; h — толщина пластины; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига. В теории Э. Рейсснера соотношения (3) выполняются в интегральном по толщине пластины смысле.

Как и в теории Э. Рейсснера, зададим линейный закон изменения напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} по толщине пластины

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{6M_x}{h^2} t, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{6M_y}{h^2} t \tag{4}$$

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h} + \frac{6M_{xy}}{h^2} t, \quad t = \frac{2z}{h}$$

где N_x, N_y, N_{xy} — удельные усилия, M_x, M_y, M_{xy} — удельные изгибающие и крутящий моменты.

Интегрируя уравнения равновесия с учетом (4), найдем закон распределения напряжений τ_{xz}, τ_{yz}, σ_z по толщине пластины

$$\tau_{xz} = q_x \frac{t}{2} + \frac{m_x}{2h}(-1 + 3t^2) + \frac{3Q_x}{2h}(1 - t^2)$$

$$\tau_{yz} = q_y \frac{t}{2} + \frac{m_y}{2h}(-1 + 3t^2) + \frac{3Q_y}{2h}(1 - t^2)$$

$$\sigma_z = \frac{m_z}{h} + \frac{3}{4} q_z\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right)(t - t^3) +$$

$$+ \frac{h}{8}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)(1 - t^2) \tag{5}$$

где q_i, m_x — величины, определяемые формулами (2); Q_x, Q_y — удельные поперечные силы.

Напряжения, определяемые формулами (5), удовлетворяют граничным условиям (1) на поверхности пластины. Формулы (5) справедливы при условии, что выполняются уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0$$

Эти уравнения получаются при выполнении граничных условий (1).

Подставляя напряжения из формул (4) и (5) в соотношения закона Гука (3), из первого из них определим закон изменения смещения w_0 по толщине пластины, из второго и третьего найдем u_0, v_0

$$w_0 = \overline{w} + \frac{h}{2E}\left[\frac{m_z}{h} t + \frac{3}{8} q_z\left(t^2 - \frac{t^4}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right)\left(t^2 - \frac{t^4}{2}\right) + \frac{h}{8}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right] -$$

$$-\frac{\nu}{2E}\left[(N_x+N_y)t+\frac{3}{h}(M_x+M_y)t^2\right] \tag{7}$$

$$u_0=\bar{u}+\frac{h}{2G}\left[\frac{q_x t^2}{4}+\frac{m_x}{2h}(-t+t^3)+\frac{3Q_x}{2h}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\right]-$$

$$-\frac{h}{2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}t-\frac{h^2}{4E}\left[\frac{\partial m_z}{\partial x}\frac{t^3}{2h}+\frac{1}{8}\frac{\partial q_z}{\partial x}\left(t^3-\frac{t^5}{10}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}\right)\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{10}\right)+\frac{h}{16}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\left(t^2-\frac{t^4}{6}\right)\right]+$$

$$+\frac{\nu h}{4E}\left[\frac{\partial}{\partial x}(N_x+N_y)\frac{t^2}{2}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}(M_x+M_y)t^3\right] \tag{8}$$

v_0 получается из (8) перестановкой индексов x и y.

В формулах (7), (8) $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ — смещения срединной плоскости пластины. Первая квадратная скобка в (7) характеризует вклад в прогиб напряжений σ_z, вторая — вклад $\sigma_x+\sigma_y$. В (8) слагаемые с множителем $h/(2G)$ характеризуют вклад в смещение u_0 касательных усилий τ_{xz} остальные слагаемые от смещения w_0 (см. (3)).

Соотношения обобщенного закона Гука между усилиями, моментами и смещениями, а также граничные условия получим из вариационного уравнения Кастилиано. Если считать выполненными уравнения равновесия теории упругости и соотношения закона Гука (3), вариационное уравнение Кастилиано для пластины как трехмерного тела будет иметь вид

$$\int_\tau\left\{\left[\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z)-\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\delta\sigma_x+\left[\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x-\nu\sigma_z)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial v_0}{\partial y}\right]\delta\sigma_y+\left[\frac{\tau_{xy}}{G}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]\delta\tau_{xy}\right\}d\tau+ \tag{9}$$

$$+\int_\Omega[(u_0-u_0^*)\delta X+(v_0-v_0^*)\delta Y+(w_0-w_0^*)\delta Z]\,d\Omega=0$$

где τ — объем, Ω — поверхность пластины, u_0^*, v_0^*, w_0^* — заданные на поверхности смещения, X, Y, Z — компоненты поверхностных усилий на оси x, y, z.

Отметим, что из вариационного принципа Кастилиано не вытекает закон Гука (3), если задан какой-то определенный закон изменения напряжений по толщине. Для этого нужно дать полный произвол в изменении напряжений, чего нет в рассматриваемой теории. Однако, с другой стороны, выполнение уравнений (3) не противоречит уравнению Кастилиано. Оно лишь будет иметь упрощенный вид (9). Из (9) согласно формулам (4), приравнивая к нулю множители при произвольных вариациях усилий и моментов, получим следующие интегральные по толщине пластины соотношения закона Гука

$$
\begin{aligned}
N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\left[m_z + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\right] \\
N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\left[m_z + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\right] \qquad (10) \\
N_{xy} &= Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_x &= D\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)}\left[q_z + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right)\right] \\
M_y &= D\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right) + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)}\left[q_z + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right)\right] \qquad (11) \\
M_{xy} &= D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

Здесь введены обозначения

$$
u = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u_0 dt, \qquad v = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v_0 dt \qquad (12)
$$

$$
\varphi_x = \frac{3}{h}\int_{-1}^{1} u_0 t dt, \qquad \varphi_y = \frac{3}{h}\int_{-1}^{1} v_0 t dt \qquad (13)
$$

u и v — средние по толщине пластины перемещения, φ_x и φ_y — средние по толщине пластины углы поворота сечения.

Слагаемые с φ_x и φ_y в формулах (11) те же, что и в классической теории Э. Рейсснера, остальные слагаемые учитывают влияние напряжения σ_z. Аналог соотношений (10) в теории Э. Рейсснера отсутствует, так как обычно не учитываются мембранные усилия.

Подставляя смещения u_0 из формулы (8) в (12), получим связь между средними по толщине смещениями u и смещениями срединной плоскости пластины $\bar{u}$

$$
u = \bar{u} + \frac{h(1+\nu)}{12E} q_x - \frac{h^2}{32E}\left[\frac{4}{3h}\frac{\partial m_z}{\partial x} + \frac{3h}{20}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\right] +
$$
$$
+ \frac{\nu h}{24E}\frac{\partial}{\partial x}(N_x + N_y) \qquad (14)
$$

Аналогичное соотношение для v получится заменой $\bar{u}$ на $\bar{v}$ и x на y.

Подставляя u_0 непосредственно из закона Гука (3) в первую формулу (13), получим

$$
\varphi_x = \frac{3}{4G}\int_{-1}^{1} \tau_{xz}(1-t^2)\, dt - \frac{\partial w}{\partial x}
$$

где

$$\bar{w} = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} w_0 (1 - t^2)\, dt \tag{15}$$

— средний по толщине прогиб.

Если подставить в предыдущую формулу для φ_x и аналогичную формулу для φ_y напряжения τ_{xz} и τ_{yz} из формул (5), получим

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6}{5Gh}\left(Q_x - \frac{1}{6} m_x\right)$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6}{5Gh}\left(Q_y - \frac{1}{6} m_y\right) \tag{16}$$

Эти формулы отличаются из соотношений теории Э. Рейсснера, в которой не учитываются касательные поверхностные усилия, слагаемыми с m_x и m_y.

По формуле (15) с учетом (7) определим связь между средним по толщине прогибом $\bar{w}$ и прогибом срединной плоскости w

$$w = \bar{w} + \frac{3h}{16 \cdot 70\, E}\left| 13 q_z + \frac{11}{3}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right)\right| - \frac{3\nu}{10Eh}(M_x + M_y) \tag{17}$$

Чтобы получить связь между смещениями u_0, v_0, w_0 произвольной точки по толщине пластинки со средними смещениями u, v, w, нужно исключить $\bar{u}$, $\bar{w}$ из соотношений (8), (7) с помощью формул (14) и (17). Выпишем формулы для смещений поверхностей пластины. Они используются для условий стыковки при решении контактных задач.

$$u_0(\pm 1) = u \pm \frac{h}{2G}\left(\frac{1}{6} q_x \pm \frac{Q_x}{h}\right) \mp \frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x} -$$

$$- \frac{h^2}{4E}\left| \pm \frac{1}{3h}\frac{\partial m_z}{\partial x} \pm \frac{3}{70}\frac{\partial q_z}{\partial x} \pm \frac{1}{105}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{30}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right)\right| + \frac{\nu h}{4E}\left| \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(N_x + N_y) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5h}\frac{\partial}{\partial x}(M_x + M_y)\right| \tag{18}$$

$$w_0(\pm 1) = w \pm \frac{m_z}{2E} + \frac{17hq_z}{140\, E} + \frac{3h}{140\, E}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) \pm$$

$$\pm \frac{h^2}{24E}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) - \frac{\nu}{2E}\left| \pm (N_x + N_y) + \frac{12}{5h}(M_x + M_y)\right|$$

Верхний знак относится к поверхности пластины $t = +1$, нижний — к

$t=-1$. Слагаемые с одним знаком характеризуют симметричную часть смещений, с двумя — кососимметричную.

Остановимся на естественных граничных условиях. Разбив поверхностный интеграл в (9) на интеграл по поверхности $t=\pm 1$ и интеграл по боковой (контурной) поверхности S, убеждаемся, что на поверхностях $t=\pm 1$ могут быть заданы либо напряжения σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}, либо смещения u_0, v_0, w_0. Контурный интеграл будет иметь вид

$$\int_s ds \int_{-1}^{1} [(u_{n0}-u_{n0}^*)\,\delta\sigma_n + (u_{s0}-u_{s0}^*)\,\delta\tau_{sn} + (w_0-w_0^*)\,\delta\tau_{nz}]\,dt = 0 \tag{19}$$

где σ_n, τ_{sn}, τ_{nz} — напряжения; u_{n0}, u_{s0} — смещения вдоль нормали и по касательной к контуру

$$\sigma_n = \frac{N_n}{h} + \frac{6M_n}{h^2}t, \quad \tau_{sn} = \frac{N_{sn}}{h} + \frac{6M_{sn}}{h^2}t \tag{20}$$

$$\tau_{nz} = q_n\frac{t}{2} + \frac{m_n}{2h}(1-3t^2) + \frac{3Q_n}{2h}(1-t^2) \tag{21}$$

N_n, N_{sn} — удельное нормальное и сдвигающее усилие на контуре; Q_n — удельная поперечная сила; M_n, M_{sn} — удельный нормальный и крутящий моменты.

Из равенства (19) и формул (20), (21) следует, что на контуре пластины можно задать произвольно удельные усилия и удельные моменты

$$N_n, \; N_{sn}, \; Q_n, \; M_n, \; M_{sn} \tag{22}$$

а также поверхностные усилия или их комбинации

$$q_n = q_x\cos\alpha + q_y\sin\alpha, \quad m_n = m_x\cos\alpha + m_y\sin\alpha \tag{23}$$

(α — угол между нормалью к контуру и осью x).

Кинематические граничные условия, соответствующие произвольным вариациям усилий и моментов (22), будут

$$u_n = u_n^*, \quad u_s = u_s^*, \quad w = w^*, \quad \varphi_n = \varphi_n^*, \quad \varphi_s = \varphi_s^* \tag{24}$$

где u_n, u_s, w — средние по толщине в смысле (12) и (15) смещения, φ_n и φ_s — углы поворота.

При решении контактных задач поверхностные нагрузки (2) подлежат определению и могут произвольно варьироваться даже на контуре, если они там неизвестны. Кинематические граничные условия, соответствующие произвольным вариациям нагрузок (23), будут

$$\varepsilon = \varepsilon^*, \quad \gamma = \gamma^* \tag{25}$$

где

$$\varepsilon = -\frac{3}{h}\int_{-1}^{1} w_0 t\,dt, \qquad \gamma = \int_{-1}^{1} w_0(-1+3t^2)\,dt \tag{26}$$

а ε^*, γ^* — соответствующие величины от заданного на границе смещения w_0^*. С учетом (7) найдем

$$\varepsilon = \frac{m_z}{Eh} + \frac{h}{10E}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) - \frac{\nu}{Eh}(N_x + N_y)$$

$$\gamma = \frac{3h q_z}{35E} + \frac{2h}{105E}\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right) - \frac{4\nu}{5Eh}(M_x + M_y) \tag{27}$$

Итак, кинематические граничные условия при разыскании контактных усилий сводятся к тому, что правые части выражений (27) на контуре должны быть равны интегралам (26) от заданного на контуре прогиба. Здесь ε имеет смысл величины поперечного обжатия.

Отметим, что условия (25) можно задавать независимо, если неизвестны на контуре нагрузки на обеих поверхностях пластины, а значит и их комбинации (23). Кинематические граничные условия, соответствующие каждой из неизвестных нагрузок q_n^+ и q_n^- на контурных линиях поверхностей $t = \pm 1$, согласно формулам типа (2)

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = \frac{h}{2}(q_n^+ + q_n^-), \quad q_n^\pm = q_x^\pm \cos\alpha + q_y^\pm \sin\alpha$$

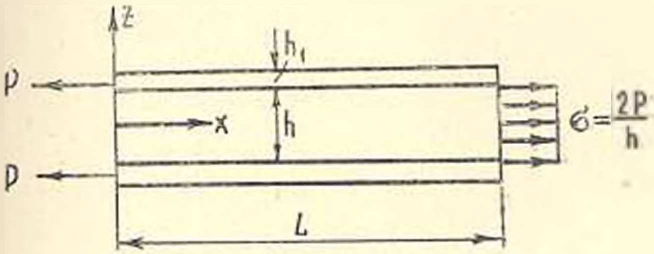
формуле (21) и выражению (19), будут

$$\pm\varepsilon - \frac{3}{2}\frac{\gamma}{h} = \pm\varepsilon^* - \frac{3}{2}\frac{\gamma^*}{h} \tag{28}$$

где ε и γ — выражения (27), верхний знак относится к поверхности $t = +1$, нижний — к $t = -1$.

Отметим сходство и различие представленного здесь варианта теории Э. Рейсснера и варианта теории Э. Рейсснера, данного П. Нагди [13], где также учитывается эффект поперечного обжатия. Уравнения равновесия (6), естественно, являются одними и теми же, так как они не зависят ни от кинематических, ни от статических гипотез. Соотношения закона Гука (10), (11), (16) формально совпадают с аналогичными соотношениями работы [8]. Однако у П. Нагди в эти соотношения входят смещения срединной плоскости. Кроме этого, соотношения типа (16) получаются в работе [8] путем отбрасывания эффекта поперечного обжатия при их получении. В настоящей работе никаких упрощений не делалось. Закон изменения смещений по толщине пластины у П. Нагди постулируется и существенно отличается от полученного в настоящей работе закона (7), (8). Аналога граничных условий типа (23) и (28) для поверхностных усилий в варианте П. Нагди нет. По существу предложенный в настоящей работе вариант теории Э. Рейсснера и нужен для того, чтобы можно было выполнить эти важные условия при решении контактных задач. Как легко можно убедиться при формулировке даже простейших контактных задач, ни классическая теория Э. Рейсснера, ни теория П. Нагди не позволяет этого сделать. При решении же обычных задач для тонких пластин с заданными поверхностными усилиями все модификации теории пластин в большинстве случаев приводят к близким результатам, включая и теорию Кирхгофа. Иными словами, тот или иной вариант теории желательно выбирать в зависимости от класса рассматриваемых задач.

В качестве примера применения изложенного варианта теории Э. Рейсснера, рассмотрим простейшую задачу (фиг. 1) определения реакций взаимодействия в трехслойной полосе толщиной $h+2h_1$ и шириной L, нагруженной, как показано на фиг. 1. Среднюю пластину будем рассчитывать, используя изложенную выше теорию и теорию Э. Рейсснера, данную П. Нагди [13]. Наружные пластины будем считать мембранами, не сопротивляющимися изгибу, и, таким образом, не будем учитывать нормальные реакции взаимодействия. Касательную реакцию взаимодействия обозначим через q.



Фиг. 1.

Из уравнений равновесия (6), соотношений закона Гука (10), (11), (16) и граничных условий для средней пластины найдем

$$Q_x = M_x = \varphi_x = 0, \qquad N_x = 2\int_0^x q\,dx, \qquad \int_0^L q\,dx = \frac{P}{2} \tag{a}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(1-\nu^2)}{Eh}\int_0^x q\,dx + \frac{\nu(1+\nu)h}{6E}\,\frac{dq}{dx} \tag{б}$$

Эти же соотношения имеют место для варианта П. Нагди [13]. Согласно варианту П. Нагди, смещения на поверхностях пластины $z=\pm h/2$ определяются по формуле $u_0 = u \pm h\varphi_x/2$. Так как $\varphi_x = 0$, то деформация du_0/dx на поверхностях пластины будет иметь вид (б), а по формулам (18)

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{2(1+\nu)}{6E}\,h\,\frac{dq}{dx} + \frac{h^3}{60E}\,\frac{d^3q}{dx^3} \tag{в}$$

где du/dx имеет вид (б).

Деформация верхней и нижней пластины

$$\frac{du_1}{dx}=\frac{1-\nu^2}{E_1h_1}\left(\frac{P}{2}-\int\limits_0^x q\,dx\right) \qquad (г)$$

где E_1, h_1 — модуль упругости и толщина наружных пластин.

Сравнивая деформации (б) и (г), а затем (в) и (г), получим два уравнения для определения реакции q. Уравнение, вытекающее из варианта П. Нагди

$$\int\limits_0^x q\,dx+\frac{\nu h^2}{12(1-\nu)(1+\lambda)}\frac{dq}{dx}=P_1 \qquad (д)$$

$$\lambda=\frac{Eh}{2E_1h_1},\quad P_1=\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{P}{2} \qquad (е)$$

и уравнение, вытекающее из изложенного варианта теории Э. Рейсснера

$$\int\limits_0^x q\,dx-\frac{(2-\nu^2)h^2}{12(1-\nu)(1+\lambda)}+\frac{h^4}{120(1-\nu^2)(1+\lambda)}\frac{d^3q}{dx^3}=P_1 \qquad (ж)$$

Уравнение (д) при условии (а) имеет лишь решение типа дельта-функций на концах $x=0$, L

$$q=P_1\delta(x)+\left(\frac{P}{2}-P_1\right)\delta(L-x)$$

Это сопроматовское решение, в котором пластины растягиваются, как стержни, усилия в них пропорциональны жесткостям

$$N_{x1}=\frac{P}{2(1+\lambda)},\quad N_x=\frac{P\lambda}{1+\lambda}$$

Есть еще быстроосциллирующее решение, которое физически не объяснимо и вызвано особенностями теории.

Таким образом, классическая теория Э. Рейсснера, в том числе и ее вариант П. Нагди, учитывающий поперечное обжатие, не позволяет найти характер распределения касательных усилий.

Уравнение (ж) имеет более высокий порядок по сравнению с (д). Наличие третьего слагаемого в левой части позволяет удовлетворить условию равенства нулю реакции q при $x=0$, L. Это слагаемое, согласно (в) и формулы (8), связано с учетом изменения прогиба по толщине пластины, то есть с учетом обжатия. Второе слагаемое в левой части уравнения (ж) (если отвлечься от влияния коэффициента Пуассона ν) характеризует вклад в смещение u_n от касательных напряжений τ_{xz}, но учтенный аккуратно, согласно формуле (8), а не в обобщенном смысле от перерезывающей силы Q_x. Если даже отбросить третье слагаемое и оставить только второе, то получим вполне определенное решение без сосредоточенных сил, оно только будет возрастать на концах зоны контакта и условие $q=0$ при $x=0$, L выполнено не будет.

Уравнение (ж) имеет следующее решение, удовлетворяющее условию (а) и условиям $q=0$ при $x=0$, L:

$$q = A \operatorname{sh} \bar{p}\xi \sin \bar{q}(l-\xi) + B \operatorname{sh} \bar{p}(l-\xi) \sin \bar{q}\xi$$

где

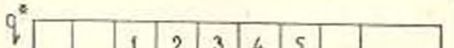
$$A = \frac{P\sqrt{\omega}}{2h} \frac{\bar{q} \operatorname{sh} \bar{p}l + \lambda \bar{p} \sin \bar{q}l}{(1+\lambda)(\bar{q}^2 \operatorname{sh}^2 \bar{p}l + \bar{p}^2 \sin^2 \bar{q}l)}$$

$$B = \frac{P\sqrt{\omega}}{2h} \frac{\lambda \bar{q} \operatorname{sh} \bar{p}l + \bar{p} \sin \bar{q}l}{(1+\lambda)(\bar{q}^2 \operatorname{sh}^2 \bar{p}l + \bar{p}^2 \sin^2 \bar{q}l)}$$

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad l = \frac{L}{h}, \quad \omega = 120(1-\nu^2)(1+\lambda)$$

$$\bar{p} + i\bar{q} = \sqrt[4]{\omega}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\omega - a^2}}{a}$$

$$a = 5(2-\nu^2)$$



Фиг. 2.

Результаты численного расчета безразмерной реакции $q^* = 2qL/P$ приведены на фиг. 2, где для каждой кривой даны также параметры l и λ. Видно, что максимум реакции смещается влево с увеличением относительной жесткости средней пластины.

Институт механики МГУ
им. М. В. Ломоносова

Поступила 8 IV 1975

Է. Ի. ԳՐԻԳՈԼՅՈՒԿ, Վ. Մ. ՏՈԼԿԱՉՅՈՎ

ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՃՇԳՐՏՎԱԾ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է սալերի տեսության մոդիֆիկացիան, որը հաշվի է առնում լայնական սահքը և շրջասեղմումը կոնտակտային խնդիրների լուծման ընթացքում օգտագործելու նպատակով։ Մոդիֆիկացիայի էությունը կայանում է նրանում, որ ճիշտ որոշվում է տեղափոխությունների բաշխման օրենքը ըստ սալի հաստության։ Այդ օրենքը համապատասխանում է ըստ սալի հաստության մեմբրանային լարումների գծային փոփոխությանը։ Ըստ հաստության ինտեգրալ արտահայտությունները չեն փոխվում է. Ռեյսների հայտնի տեսության և Պ. Նաղդիի տարբերակի համեմատությամբ։

Հավասարումների արտածման ժամանակ օգտագործվել է Կաստիլիանո-յի սկզբունքը։ Տրվում է խնդրի լուծման օրինակ։

MODIFICATION OF THE REFINED THEORY OF PLATES FOR CONTACT PROBLEMS

E. I. GRIGOLIUK, V. M. TOLKACHEV

Summary

A modified version of the theory of plates for contact problems is proposed offering an accurate law of displacement variation over the plate's thickness is terms of the hypothesis on linear distribution of membrane stresses across the aforesaid thickness. Accordingly, the integral thickness correlations coincide with the familiar correlations of the refined theory taking into account the lateral normal linear deformation and lateral shear.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner E.* On the Theory of Bending of Elastic Plates. Journal of Mathematics and Physics. 1944, Vol. XXIII, No. 4, pp. 184—191.
2. *Reissner E.* The Effect of Transwerse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. J. of Applied Mechanics, 1945, Vol. 12. No. 1, pp. A68—A77.
3. *Reissner E.* On Bending of Elastic Plates. Quarterly of Applied Mathematics, 1947, Vol. 5, pp. 55—68.
4. *Green A. E.* On Reissner's Theory of Bending of Elastic Plates. Quarterly of Applied Mathematics, 1949, Vol. VII, No. 2, pp. 223—228.
5. *Schäfer M.* Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1952, Bd. 32, Heft 6, S. S. 161—171.
6. *Kromm A.* Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik. Ingenieur Archiv, 1953, Bd. 21, Heft 4. S. S. 266—286.
7. *Kromm A.* Über die Randquerkräfte bei gestützten Platten. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1955, Bd. 35, Heft 6/7. S. S. 231—242.

8. *Girkmann K.* Flächentragwerke. 6 Auflage, Wien, Springer, 1963, Anhang: Verschäfte Theorie dünner Platten nach E. Reissner, S. S. 583—610.
9. *Girkmann K., Beer R.* Anwendung der verscharften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten. Österreichische Ingenieur — Archiv, 1958, Bd. 12, No. 1—2, S. S. 101—110.
10. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1966.
11. *Гольденвейзер А. Л.* О теории изгиба пластинок Э. Рейсснера. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
12. *Айнола Л. Я.* Об уточненных теориях пластинок типа Э. Рейсснера. Сб. «Теория оболочек и пластин», Ереван, АН АрмССР, 1964.
13. *Naghdi P. M.* On the Theory of Thin Elastic Shells. Quarterly of Applied Mathematics, 1957, Vol. XIV, No. 4, pp. 369—380.
14. *Reissner E.* On the Variotional Theorem in Elasticity. Journal Math. Phys., 1950, Vol. 29, pp. 90—95.
15. *Reissner E.* On Transwerse Bending of Plates, Including the Effect of Transwerse Shear Deformation. Int. Journal Solids Structures, 1975, Vol. 11, pp. 569—573.
16. *Власов Б. Ф.* Об уравнениях изгиба пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 12.
17. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами. Прикл. математ. и механ., 1975, т. 39.
18. *Артюхин Ю. П.* Модифицированная теория Голланда-Рейсснера склеенных пластин. Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек», выпуск XI, Изд-во Казанского университета, 1975.