

Г. Б. ВЕРМИШЯН, Б. А. МЕЛТОНЯН

КРУЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ОРТОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Исследовано кручение ортотропного вязко-упругого призматического стержня некругового сечения при действии вибрационной нагрузки. Прилагаемая нагрузка меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой.

Эта задача для изотропного однородного и составного стержня рассматривалась в работах [1, 2].

Показано, что составляющие комплексного модуля существенно зависят от частоты колебания и температуры, при этом за счет работы диссипативных сил происходит выделение тепла. Для определения температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находят экспериментальным путем.

В предельном стационарном случае вопрос сводится к решению дифференциального уравнения эллиптического типа.

Принято, что на боковой поверхности стержня температура неизменна и равна температуре окружающей среды. Кроме того, предполагается, что температура вдоль оси стержня не изменяется.

1. Рассмотрим кручение ортотропного призматического стержня из вязко-упругого материала, на одном основании которого действуют усилия, меняющиеся по гармоническому закону, статически эквивалентные некоторому крутящему моменту.

Пусть компоненты деформации в поперечном сечении стержня изменяются следующим образом:

$$\tau_{xz} = x'' (\partial_z / \partial x - y) \cos \omega t, \quad \tau_{yz} = x'' (a_2 \partial_y + x) \cos \omega t \quad (1.1)$$

Тогда компоненты напряжения будут равны

$$\sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}^0}{\tau_{xz}^0} \cos(\omega t - \varphi_1), \quad \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}^0}{\tau_{yz}^0} \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (1.2)$$

Здесь x'' — угол закручивания, $\varphi(x, y)$ — некоторая функция, подлежащая определению, φ_1 и φ_2 — сдвиг фаз между деформацией и напряжением в двух перпендикулярных направлениях, которые примем за оси координат. В дальнейшем индекс 1 соответствует направлению оси ox , а индекс 2 — оси oy . Остальные компоненты деформации и напряжения отсутствуют.

Связь между компонентами напряжения и деформации для ортотропного вязко-упругого тела возьмем в виде

$$\tau_{xz} = \int_{-\infty}^t K_1(T, t-\tau) \gamma_{xz}(\tau) d\tau, \quad \tau_{yz} = \int_{-\infty}^t K_2(T, t-\tau) \gamma_{yz}(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

Подставляя значения γ_{xz} , γ_{yz} из (1.1) в (1.3) и вводя переменную $\zeta = t - \tau$, имеем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= z^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \left[\left| \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K_1(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \left| \operatorname{Im} \int_0^{\infty} K_1(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \right] \\ \tau_{yz} &= z^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \left[\left| \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K_2(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \left| \operatorname{Im} \int_0^{\infty} K_2(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right| \sin \omega t \right] \quad (1.4) \end{aligned}$$

Введем комплексные модули [3] в двух перпендикулярных направлениях

$$\begin{aligned} E_j^*(T, \omega) &= \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta = E_j(T, \omega) - iE_j(T, \omega) = \\ &= E_j(T, \omega) \cos \varphi_j - iE_j(T, \omega) \sin \varphi_j, \quad (j=1, 2) \quad (1.5) \end{aligned}$$

Из (1.4) и (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= z^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) [E_1^*(T, \omega) \cos \omega t + E_1(T, \omega) \sin \omega t] \\ \tau_{yz} &= z^0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) [E_2^*(T, \omega) \cos \omega t + E_2(T, \omega) \sin \omega t] \quad (1.6) \end{aligned}$$

Устанавливается связь между амплитудами напряжения и деформации

$$\tau_{xz}^0 = z^0 (\partial \varphi / \partial x - y) E_1(T, \omega), \quad \tau_{yz}^0 = z^0 (\partial \varphi / \partial y + x) E_2(T, \omega) \quad (1.7)$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E_j(T, \omega)$ и $E_j^*(T, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией. При этом $E_j(T, \omega)$ можно считать постоянным

$$E_j(T, \omega) = A_j, \quad E_j^*(T, \omega) = B_j + C_j T \quad (j=1, 2) \quad (1.8)$$

Так как обычно $E_1(T, \omega) \ll E_2(T, \omega)$, то величиной $E_1(T, \omega)$ по сравнению с $E_2(T, \omega)$ можно пренебречь. Из уравнений равновесия и совместности получаем, что искомая функция $\varphi(x, y)$ в области S поперечного сечения стержня удовлетворяет уравнению

$$E_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.9)$$

а на границе L области S удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2 \cos(n, y) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1 \cos(n, x) = 0 \quad (1.10)$$

Путем аффинного преобразования области S на S'

$$x = x_1, \quad y = \sqrt{\delta} y_1; \quad \delta = E_2/E_1 \quad (1.11)$$

уравнение (1.9) и граничное условие (1.10) преобразуются соответственно к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y_1^2} = 0 \quad \text{на } S' \quad (1.12)$$

$$\frac{d\varphi^*}{dn_1} = \sqrt{\delta} [y_1 \cos(n_1, x_1) - x_1 \cos(n_1, y_1)] \quad \text{на } L'$$

где L' — граница области S' , n_1 — внешняя нормаль к L' . Как получено в работе [1], функции $\varphi^*(x_1, y_1)$ дается по формуле

$$\varphi^* = \operatorname{Re} f(\zeta), \quad f(\zeta) = \frac{\sqrt{\delta}}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)}}{z - \zeta} dz, \quad z = e^{i\theta} \quad (1.13)$$

где $\varphi_1(\zeta)$ — функция, отображающая область S' плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$ на круг $|\zeta| < 1$ плоскости $\zeta = z + i\eta$.

Вычислим момент, действующий на основание стержня

$$\begin{aligned} M &= \iint_S (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy = \\ &= \iint_S [x \tau_{yz}^0 \cos(\omega t - \varphi_2) - y \tau_{xz}^0 \cos(\omega t - \varphi_1)] dx dy = \\ &= x^0 \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \cos(\omega t - \varphi_2) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos(\omega t - \varphi_1) \right] dx dy = \\ &= x^0 \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) \cos \varphi_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \cos \varphi_1 \right] dx dy \right\} \cos \omega t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^{\circ} \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) \sin \varphi_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \sin \varphi_1 \right] dx dy \right\} \sin \omega t = \\
= & x^{\circ} \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right\} \cos \omega t + \\
& + x \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - \right. \right. \\
& \left. \left. - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right\} \sin \omega t = M_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (1.14)
\end{aligned}$$

где M_0 — амплитуда момента M , а φ_0 — соответствующий сдвиг фаз. На основании этого получаем

$$\begin{aligned}
M_0 = & x^{\circ} \left\{ \left| \iint_S \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right) dx dy \right|^2 + \right. \\
& \left. + \left| \iint_S \left(x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right) dx dy \right|^2 \right\}^{1/2} \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Из (1.15) получаем

$$x^2 = M_0^2 / Q \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned}
Q = & \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right|^2 + \\
& + \left\{ \iint_S \left[x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) E_2(T, \omega) - y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) E_1(T, \omega) \right] dx dy \right|^2 \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Учитывая (1.11) и переходя к плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, получаем

$$\begin{aligned}
Q = & \left\{ \iint_{|\zeta| < 1} \left[\sqrt{2} |\omega_1(\zeta)|^2 |\omega_1'(\zeta)|^2 - \operatorname{Im} (\omega_1(\zeta) \overline{\omega_1'(\zeta)}) f'(\zeta) \right] E_1(T, \omega) d\xi d\eta \right|^2 + \\
& + \left\{ \iint_{|\zeta| < 1} \left[\sqrt{2} |\omega_1(\zeta)|^2 \left[(\operatorname{Re} \omega_1(\zeta))^2 \frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} + (\operatorname{Im} \omega_1(\zeta))^2 \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} + \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} \right) \operatorname{Im} (\omega_1(\zeta) \overline{\omega_1'(\zeta)}) f'(\zeta) \right] E_2(T, \omega) d\xi d\eta \right|^2 \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где $\omega_1(\zeta)$ — отображающая функция области S' на единичный круг $|\zeta| < 1$, $f(\zeta)$ определяется по формуле (1.13).

Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, будет равна [1]

$$W = \pi \kappa \omega^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 E_1(T, \omega) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 E_2(T, \omega) \right] \quad (1.19)$$

откуда на основании (1.14) и (1.16) после перехода к плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ будем иметь

$$W = \frac{\pi M_0^2 E_1(T, \omega)}{Q |\omega_1(\zeta)|^4} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} \right\} \quad (1.20)$$

где

$$\Phi(\zeta) = f'(\zeta) \overline{\omega_1(\zeta)} - i V \overline{\delta_2} \overline{\omega_1(\zeta)} |\omega_1(\zeta)|^2 \quad (1.21)$$

Интенсивность выделения тепла совершаемой работы за один цикл при деформации вязко-упругого тела будет

$$q = \frac{\lambda \omega k M_0^2 E_1(T, \omega)}{2Q |\omega_1(\zeta)|^4} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_1(T, \omega)}{E_1(T, \omega)} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_2(T, \omega)}{E_2(T, \omega)} \right\} \quad (1.22)$$

Здесь k — величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ — коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. Для установления максимального нагрева будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице. Функция $\Phi(\zeta)$ дается по формуле (1.21).

Для стационарного случая уравнение теплопроводности в области S принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(x, y, T)}{a_1 c_1} = 0 \quad (1.23)$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты температуропроводности в двух перпендикулярных направлениях, которые можно считать независимыми от изменения температуры, c_1 — теплоемкость, q — интенсивность выделения тепла.

Граничные условия для температуры $T(x, y)$ таковы:

$$T = T_0 \quad \text{на } L \quad (1.24)$$

то есть температура на боковой поверхности стержня равна температуре окружающей среды.

Принято, что

$$a_2/a_1 = E_2/E_1 \quad (1.25)$$

то есть отношение коэффициентов температуропроводности в двух направлениях равно отношению модулей накопления в соответствующих направлениях.

Если учесть это предположение, принять во внимание формулы (1.11), (1.22) и перейти к плоскости $\zeta = \bar{\xi} + i\eta$, уравнение теплопроводности (1.23) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta^2} + \frac{i E_1(T^*, \omega)}{Q|\omega_1(\zeta)|^2} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_1(T^*, \omega)}{E_1(T^*, \omega)} + [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{E_2(T^*, \omega)}{E_2(T^*, \omega)} \right\} = 0 \quad (1.26)$$

$$\nu = i \omega k M_0^2 / 2 a_1 c_1 \quad (1.27)$$

при граничном условии

$$T^* = T_0 \text{ на окружности } |\zeta| = 1 \quad (1.28)$$

Используя (1.8) и вводя новую переменную

$$u(\bar{\xi}, \eta) = T^*(\bar{\xi}, \eta) - T_0 \quad (1.29)$$

из (1.26) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f_0(\bar{\xi}, \eta) u = -F_0(\bar{\xi}, \eta) \quad (1.30)$$

при граничном условии

$$u = 0 \text{ на окружности } |\zeta| = 1 \quad (1.31)$$

Здесь

$$f_0(\bar{\xi}, \eta) = \frac{i A_2}{Q|\omega_1(\zeta)|^2} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{C_1}{A_1} - [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{C_2}{A_2} \right\} \quad (1.32)$$

$$F_0(\bar{\xi}, \eta) = \frac{i A_1}{Q|\omega_1(\zeta)|^2} \left\{ [\operatorname{Re} \Phi(\zeta)]^2 \frac{B_1 - C_1 T_0}{A_1} - [\operatorname{Im} \Phi(\zeta)]^2 \frac{B_2 + C_2 T_0}{A_2} \right\}$$

Уравнение (1.30) при граничном условии (1.31) встречается при решении задачи для изотропного вязко-упругого стержня [1] с той разницей, что функции $f_0(\bar{\xi}, \eta)$ и $F_0(\bar{\xi}, \eta)$ в данном случае имеют более сложный вид.

Ищем решение уравнения (1.30) при граничном условии (1.31) в виде

$$u(\bar{\xi}, \eta) = \iint_{|\zeta| < 1} G(\bar{\xi}, \eta; x, y) \mu_0(x, y) dx dy \quad (1.33)$$

где $G(\bar{\xi}, \eta; x, y)$ — функция Грина уравнения Лапласа для круга $|\zeta| < 1$, а $\mu_0(x, y)$ — произвольная неизвестная функция, непрерывная и имеющая непрерывные производные в круге.

После подстановки (1.33) в (1.30) для нахождения $\mu_0(x, y)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu_0(x, y) = F_0(x, y) + \iint_{|\zeta| < 1} K_0(x, y; \bar{\xi}, \eta) \mu_0(\bar{\xi}, \eta) d\bar{\xi} d\eta \quad (1.34)$$

где

$$K_0(x, y; \xi, \eta) = f_0(x, y) G(x, y; \xi, \eta) \quad (1.35)$$

Легко показать, что интеграл

$$\iint_{|\xi| \leq 1} \iint_{|\eta| \leq 1} |K_0(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta dx dy < C < +\infty \quad (1.36)$$

Для этого оценим данный интеграл

$$\begin{aligned} & \iint_{|\xi| \leq 1} \iint_{|\eta| \leq 1} |K_0(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta dx dy = \\ & = \iint_{|\xi| \leq 1} |f_0(x, y)|^2 dx dy \iint_{|\eta| \leq 1} |G(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta < \\ & < N^2 \iint_{|\xi| \leq 1} dx dy \iint_{|\eta| \leq 1} |G(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \\ & = \frac{N^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln \frac{1 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho^2 \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2} \right|^2 \rho_0 d\rho_0 d\theta_0 \quad (1.37) \end{aligned}$$

Оценим внутренний интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln |1 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho^2 \rho_0^2| - \right. \\ & \left. - \ln |\rho^2 - 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2| \right|^2 \rho_0 d\rho_0 d\theta_0 < \\ & < 4\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{n(n+1)(n+2)} + 4\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho_0^{2n-2}}{n(n+1)(n+2)} + 3\pi \quad (1.38) \end{aligned}$$

Подставляя (1.37) в (1.36), получаем

$$\iint_{|\xi| \leq 1} \iint_{|\eta| \leq 1} |K_0(x, y; \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta dx dy < \frac{N^2}{8} \left(\frac{\pi^4}{45} + \frac{17}{24} \right) \quad (1.39)$$

где N — верхняя грань функций $f_0(x, y)$.

2. Для решения интегрального уравнения (1.34) его ядро заменим вырожденным. Разложим ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций

$$\{\varphi_k(x, y), \varphi_m(\xi, \eta)\} \quad (k, m = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

в виде

$$K_0(x, y; \xi, \eta) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x, y) \varphi_m(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

Для коэффициентов A_{km} получаем следующее выражение:

$$A_{km} = \int_{|z| \leq 1} \int_{|\tau| \leq 1} \left\{ \int_{|z| \leq 1} \int_{|\tau| \leq 1} K_0(x, y; \xi, \eta) \varphi_k(x, y) dx dy \right\} \varphi_m(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

После несложных преобразований интегральное уравнение принимает вид

$$\mu_0(x, y) - \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x, y) \int_{|z| \leq 1} \int_{|\tau| \leq 1} \varphi_m(\xi, \eta) \varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta = F_0(x, y) \quad (2.4)$$

Как известно [4], решение интегрального уравнения с вырожденным ядром можно свести к решению линейной системы алгебраических уравнений.

После некоторых вычислений получаем [1]

$$\mu_0(x, y) = F_0(x, y) + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N X_m A_{km} \right\} \varphi_m(x, y) \quad (2.5)$$

где постоянные X_k определяются из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m - \sum_{k=1}^N A_{mk} X_k = F_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

где

$$F_m = \int_{|z| \leq 1} \int_{|\tau| \leq 1} F_0(x, y) \varphi_m(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

Подставляя полученное значение для $\mu_0(x, y)$ из (2.5) в (1.33) и учитывая (1.29), находим решение задачи в следующей форме:

$$T^*(\xi_0, \tau_0) = T_0 \int_{|z| \leq 1} \int_{|\tau| \leq 1} F_0(\xi, \eta) G(\xi_0, \tau_0; \xi, \eta) d\xi d\eta + \sum_{k=1}^N Y_k \int_{|z| \leq 1} \int_{|\tau| \leq 1} G(\xi_0, \tau_0; \xi, \eta) \varphi_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.8)$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^N X_m A_{km} \quad (2.9)$$

3. В качестве примера рассмотрим стержень, область S поперечного сечения которого ограничена эпитрохонидным овалом, параметрическое уравнение которого имеет вид

$$x = R \left(\cos \theta + \frac{a}{3} \cos 3\theta \right), \quad y = \sqrt{6} R \left(\sin \theta + \frac{a}{3} \sin 3\theta \right) \quad (3.1)$$

$$R > 0; \quad 0 < a < 1$$

После аффинного преобразования (1.11) области S на S^* (3.1) преобразуется к виду

$$x_1 = R \left(\cos \vartheta + \frac{2}{3} \cos 3\vartheta \right), \quad y_1 = R \left(\sin \vartheta + \frac{2}{3} \sin 3\vartheta \right) \quad (3.2)$$

Отображающая функция области S^* плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$, ограниченной овалом (3.2), на единичный круг плоскости $z = z + iz$ имеет вид

$$z_1 = w_1(z) = R \left(z + \frac{2}{3} z^3 \right) \quad (3.3)$$

Тогда $f_0(z, \vartheta)$ и $F_0(z, \vartheta)$ в полярной системе координат даются в виде

$$\begin{aligned} f_0(\rho, \vartheta) &= \frac{\mu A_2 R^4}{2Q} \left\{ \frac{4x^2 (g_1 - g_2) (2z\rho^4 + \rho^2 + x^2\rho^6 \cos 2\vartheta)}{1 + 2z\rho^2 \cos 2\vartheta + x^2\rho^4} + \Psi_0(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_2(\rho) \cos 2\vartheta + \Psi_4(\rho) \cos 4\vartheta + \Psi_6(\rho) \cos 6\vartheta + \Psi_8(\rho) \cos 8\vartheta \right\} \\ F_0(\rho, \vartheta) &= \frac{\mu A_2 R^4}{2Q} \left\{ \frac{4x^2 (g_1 - g_2) (2z\rho^4 + \rho^2 + x^2\rho^6 \cos 2\vartheta)}{1 - 2z\rho^2 \cos 2\vartheta + x^2\rho^4} + \gamma_0(\rho) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2(\rho) \cos 2\vartheta - \gamma_4(\rho) \cos 4\vartheta - \gamma_6(\rho) \cos 6\vartheta + \gamma_8(\rho) \cos 8\vartheta \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

где

$$\lambda_1 = C_2/A_1, \quad \lambda_2 = C_2/A_2, \quad g_1 = (B_1 + C_1 T_0)/A_1, \quad g_2 = (B_2 - C_2 T_0)/A_2 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\rho) &= (g_1 + g_2) \left[\left(1 + \frac{4x^2}{9} \right) \rho^2 - \frac{4x^2}{3} \rho^4 + \frac{16x^2}{9} \rho^6 + \frac{x^4}{9} \rho^{10} \right] - \\ &\quad - 2(g_1 - g_2) \left(\frac{4}{3} \rho^2 - \rho^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\rho) &= -(g_1 + g_2) (3\rho^2 - 6\rho^4 + x^2\rho^6 - 2x^2\rho^8) \frac{4x}{9} + \\ &\quad + (g_1 - g_2) \left(\rho^2 - \frac{16x^2}{9} \rho^4 + \frac{5x^2}{3} \rho^6 \right) \end{aligned}$$

$$\Psi_4(\rho) = \frac{x^4}{9} [2x(g_1 + g_2)(3\rho^2 - 2) + (g_1 - g_2)(15 - 4x^2\rho^2 + 7x^2\rho^4)]$$

$$\Psi_6(\rho) = \frac{x^6}{9} (g_1 - g_2)(7 + x^2\rho^4); \quad \Psi_8(\rho) = \frac{x^8}{9} (g_1 - g_2)\rho^2 \quad (3.6)$$

$\gamma_2(\rho)$ получается из $\Psi_2(\rho)$ при замене g_1 и g_2 соответственно на λ_1 и λ_2 .

Ортонормированную систему функций (2.1) возьмем в виде

$$\left\{ \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \rho^k \cos k\theta, \sqrt{\frac{2(m-1)}{\pi}} \rho^m \cos m\theta \right\} \quad (3.7)$$

($k, m = 1, 2, \dots$)

Согласно формуле (2.3) для коэффициентов Фурье получается выражение

$$\begin{aligned} A_{km} = & \frac{\mu R^4 \sqrt{m-1}}{2-Q \sqrt{k-1}} \left\{ \frac{1}{9} (i_1 + i_2) \left(\frac{9+4x^2}{(2k-4)(2k+6)} - \frac{12x^2}{(2k+6)(2k+8)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{16x^2}{(2k+8)(2k+10)} + \frac{x^4}{(2k+12)(2k+14)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{x}{3} (i_1 - i_2) \left(\frac{4}{(2k-4)(2k+6)} - \frac{3}{(2k+6)(2k+8)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{6}{(2k+2)(2k+4)} - \frac{6x^2}{(2k+6)(2k+8)} \right) \right\} z_{km}^{(0)} + \\ & + \left[\frac{4x}{9} (i_1 + i_2) \left(\frac{3\rho}{(\rho+4)(\rho+6)(\rho+8)} + \frac{x^2(\rho+4)}{(\rho+8)(\rho+10)(\rho+12)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{9} (i_1 - i_2) \left(\frac{9}{(\rho+4)(\rho+6)} - \frac{16x^2}{(\rho+6)(\rho+8)} - \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{15x^2}{(\rho+8)(\rho+10)} \right) \right] z_{km}^{(2)} + \left[\frac{2x^2(i_1 + i_2)(\rho-12)}{9(\rho+6)(\rho+8)(\rho+10)} - \right. \\ & \left. + \frac{7}{9} (i_1 - i_2) \left(\frac{15}{(\rho+6)(\rho+8)} - \frac{4x^2}{(\rho+8)(\rho+10)} - \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7x^2}{(\rho+10)(\rho+12)} \right) \right] z_{km}^{(4)} + \frac{x^2}{(\rho+12)(\rho+14)} \left\{ z_{km}^{(6)} - \frac{x^2(i_1 - i_2)}{9(\rho+10)(\rho+12)} z_{km}^{(8)} \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

где

$$z_{km}^{(i)} = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \pi, & k = m \end{cases}, \quad z_{km}^{(i)} = \begin{cases} 0, & m = |k \pm i| \\ \pi/2, & m = |k \pm i| \end{cases} \quad (i=2, 4, 6, 8; m, k=1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

для краткости обозначено $\rho = k + m$.

После некоторых вычислений находим из (2.8) решение в следующей форме:

$$T^*(\rho, \theta) = T_0 + \Phi_*(\rho, \theta) + \frac{\sqrt{2(1-\nu^2)}}{4 \sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\sqrt{k+1}} \rho^k \cos k\theta \quad (3.10)$$

гас

$$Y_k = \sum_{m=1}^N A_{km} X_m \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(z, \beta) = & \frac{\pi A_0 R^4}{2Q} \left[\frac{4z^2}{9} (g_1 - g_2) \left| \frac{z(1-z^2)}{36} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k} \rho^{2k}}{k+1} \cos 2k\beta \left(\frac{1-\rho^{2k+2}}{3k+1} - \frac{z^2(1-\rho^{2k+6})}{3k+9} \right) \right] + \right. \\ & + (g_1 + g_2) \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{2z^2}{27} + \frac{z^4}{324} \right) - \left(1 + \frac{4z^2}{9} \right) \frac{z^4}{4} + \frac{4z^2 \rho^4}{27} - \frac{z^2 \rho^8}{9} - \right. \\ & \left. - \frac{z^2 \rho^{12}}{324} + \frac{4z \rho^2}{3} \cos 2\beta \left(\frac{z^2}{180} - \frac{1}{12} + \frac{\rho^2}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^2 \rho^4}{45} - \frac{z^2 \rho^8}{36} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{z^2 \rho^4}{9} \cos 4\beta \right] + \frac{\pi A_0 R^4 (g_1 - g_2)}{18Q} \left[3z \left(\frac{1-z^2}{12} - \frac{1-z^4}{4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{z^2}{4} \cos 2\beta \left((1-z^2) \left(\frac{3z^2}{2} - 2z^2 \rho^4 + \frac{3z^2 \rho^8}{2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{9}{2} (1-z^2) - 4z^2 (1-z^4) + \frac{5z^4}{2} (1-z^2) - \frac{3}{2} (1-z^6) - 2z^2 (1-z^8) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3z^2}{2} (1-z^{10}) \right] + \frac{z \rho^2}{8} \cos 4\beta \left[(1-z^2) \left(\frac{3z^2}{2} - \frac{z^2 \rho^4}{3} + \frac{z^2 \rho^8}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{2} (1-z^2) - z^2 (1-z^4) + \frac{7z^4}{6} (1-z^2) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} (1-z^{10}) + \frac{z^2}{3} (1-z^{12}) - \frac{z^2}{2} (1-z^{14}) \right] + \frac{z^2 \rho^6}{12} \cos 6\beta \left[(1-z^2) \left(\frac{z^2}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{z^2 \rho^4}{18} \right) + \frac{7}{2} (1-z^2) + \frac{z^2}{6} (1-z^4) - \frac{1}{2} (1-z^{10}) - \frac{z^2}{18} (1-z^{16}) \right] + \\ & \left. + \frac{z^2 \rho^8}{16} \cos 8\beta \left[\frac{1}{2} (1-z^2) + \frac{z^2}{18} (1-z^{10}) - \frac{1}{18} (1-z^{14}) \right] \right] \quad (3.12) \end{aligned}$$

Постоянные X_m определяются из уравнения (2.6), где F_m даны в виде

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{|\sqrt{6\pi} z_1 A_2 R^4}{2Q} \left[\frac{z}{9} (z_1 + z_2) \left(1 + \frac{4z^2}{15} \right) + \right. \\ & \left. + (z_1 - z_2) \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{18} - \frac{z^4}{3} + \frac{z^2}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$F_4 = \frac{\sqrt{10\pi\alpha^2\mu A_2 R^4}}{2Q} \left| \frac{\alpha(\nu_1 + \nu_2)}{90} + (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha^2}{6} - \frac{2\alpha^6}{11} + \frac{2\alpha^{10}}{13} \right) \right|$$

$$F_6 = \frac{\sqrt{14\pi\alpha^2\mu A_2 R^6}}{2Q} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{1}{18} - \frac{\alpha^2}{162} - \frac{\alpha^{11}}{8} + \frac{\alpha^{13}}{9} \right)$$

$$F_8 = \frac{\sqrt{18\pi\alpha^2\mu A_2 R^8}}{2Q} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{1}{162} - \frac{2\alpha^4}{21} + \frac{2\alpha^{16}}{23} \right) \quad (3.13)$$

$$F_m = -\frac{2\mu A_2 R^{2m+2}}{Q} \sqrt{2\pi(m+1)} (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{1}{5m+2} - \frac{\alpha^2}{5m+6} \right) \quad (3.14)$$

($m \neq 2, 4, 6, 8$)

Подставляя из (3.10) в (1.18), получаем уравнение для нахождения параметра Q .

Температуру на оси стержня, то есть при $\rho=0$, обозначим через T_1 . Тогда из (3.10) и (3.12) получаем

$$T_1 = T_0 + \frac{\mu A_2 R^4}{2Q} \left[(g_1 + g_2) \left(\frac{1}{4} - \frac{2x^2}{27} + \frac{x^4}{324} \right) + (g_1 - g_2) \frac{\alpha(2x^2 - 9)}{162} \right] \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (1.18), после вычисления получаем уравнение для нахождения Q в виде

$$Q = 4\pi^2 \mu R^4 A_1^2 (l^2 - \beta), \quad x^2 = M_0^2 \mu \alpha^2 R^4 A_1^2 (l^2 + \beta) \quad (3.16)$$

где

$$l = \frac{1}{4} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{108} \quad (3.17)$$

$$\beta = \frac{l}{2} [(g_1 + g_2) + (\nu_1 + \nu_2) T_1] + \frac{x}{12} [(g_1 - g_2) + (\nu_1 - \nu_2) T_1] \quad (3.18)$$

β выражается через неизвестную величину T_1 . Для нахождения β из (3.15) и (3.18) получаем следующее уравнение:

$$\beta^3 - b_1 \beta^2 + b_2 \beta - b_3 = 0 \quad (3.19)$$

где

$$b_1 = \frac{l}{2} [(g_1 + g_2) + (\nu_1 + \nu_2) T_0] + \frac{x}{12} [(g_1 - g_2) + (\nu_1 - \nu_2) T_0]$$

$$b_2 = b_1 l^2 - \frac{\mu A_2}{8\pi^2 \mu A_1^2 R^4} \left[\frac{l}{2} (\nu_1 + \nu_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{12} (\nu_1 - \nu_2) \right] \left[(g_1 + g_2) \left(\frac{1}{4} + \frac{2x^2}{27} + \frac{x^4}{324} + \frac{x(2x^2 - 9)}{162} (g_1 - g_2) \right) \right] \quad (3.20)$$

Решая уравнение (3.19) и подставляя значение β в (3.16), получаем Q . Используя (3.18), находим T_1 , то есть температуру на оси стержня.

Из (3.15), (3.16) и (3.18) можно получить

$$M_0 = H \sqrt{\nu [l^2 + (b_1 + \nu_1 \nu)^2]} \quad (3.21)$$

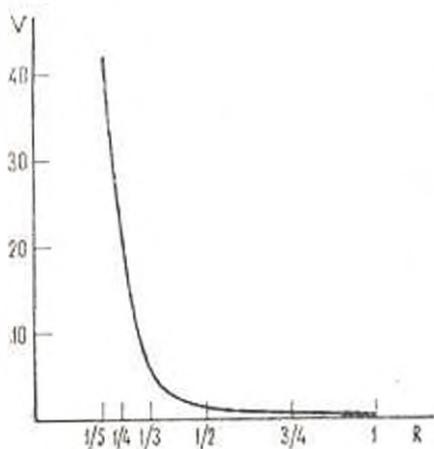
где

$$H = \left| \frac{16 \pi^{1/2} \alpha_1 c_1 A_1^2 R^4}{\lambda \omega k_{\tau} A_2} \right|^{1/2}, \quad \tau_1 = \frac{1}{2} (i_1 + i_2) + \frac{\pi}{12} (i_1 - i_2)$$

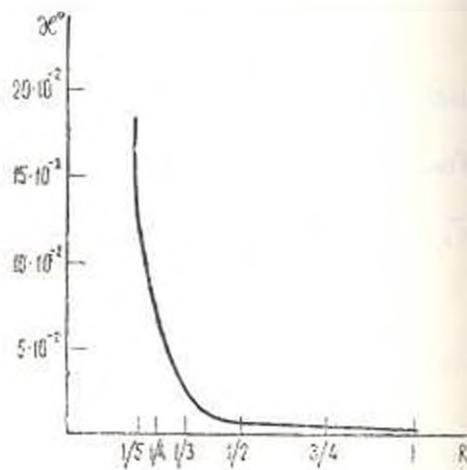
$$\tau_2 = (g_1 + g_2) \left(\frac{1}{4} + \frac{2x^2}{27} + \frac{x^4}{324} \right) + (g_1 - g_2) \frac{x(2x^2 - 9)}{162} \quad (3.22)$$

Здесь $\nu = T_1 - T_0$ — перепад температур, M_0 — амплитуда момента M .

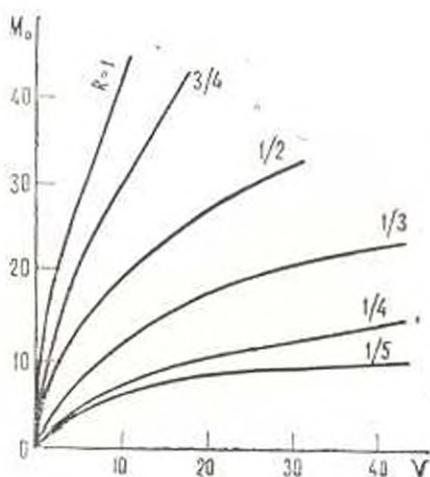
Заметим, что в полученном решении, если принять $|E_1| = |E_2|$, получается решение для изотропного вязко-упругого стержня.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На основании формул (3.15)—(3.18) и (3.21) построен график. На фиг. 1 показано соотношение между перепадом температур ν и величиной R , входящей в уравнение овала, на фиг. 2 — связь между углом закручивания α и величиной R , на фиг. 3 — соотношение между амплитудой момента и перепадом температур.

Ниже даны значения T , и κ^0 в зависимости от R . При этом использованы данные, соответствующие одному из видов полиэтилена [5]

$$A_2 = 2A_1, B_2 = 2B_1, C_2 = 2C_1, A_0 = 3.4 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, B_0 = 3.87 \cdot 10^2 \text{ кг/см}^2 \\ C_2 = 3.87 \text{ кг/см}^2 \text{ град}, k = 0.000234 \text{ ккал/кгм}, \alpha, \epsilon_1 = 0.28 \text{ ккал/мчас град}$$

$$\omega = 100 \text{ 1/с}, T_0 = 20^\circ, M_0 = 10 \left[\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right] \text{ см}, \lambda = 0.25, \nu = 2$$

$R = 1$	$3/4$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$
$T_1 = 20.0782$	20.2471	21.2512	26.3342	40.0192	68.8750
$\kappa^0 = 2.6 \cdot 10^{-4}$	$8.22 \cdot 10^{-4}$	$4.16 \cdot 10^{-3}$	$2.106 \cdot 10^{-2}$	$6.656 \cdot 10^{-2}$	$16.25 \cdot 10^{-2}$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Если полученное решение для ортотропного стержня сравнить с решением для изотропного стержня, можно заметить, что в решение для ортотропного стержня входит слагаемое, появляющееся за счет анизотропии.

Если $|E_1| > |E_2|$, то температура в стержне больше, чем при $|E_1| < |E_2|$.

Ериванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 22 IV 1970

Վ. Բ. ՎԵՐԵՆՅԱՆ, Թ. Ա. ԻԵՏՅԱՆ

ՄԱՆՈՒՑԻԿ ԱՌԱՋՎԱԿԱՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՊՐԻՉՄԱՏԻԿ ԶՈՎԻ ՈՒՐՈՒՄԸ ՎԵՐՄԱՑԻՈՆ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկված է մածուցիկ-առաձուլական օրթոտրոպ n : կլոր կարվածքով պրիզմատիկ ձողի ուղրուժք վիբրացիան ուժի ազդեցության տակ Ազդող բևոր փոխվում է հաստատուն ամպլիտուդայով, հարմանիկ օրենքով:

Կոմպլեքս մոդուլի բաղադրիչները կապեն կախված են առաջանման հաճախականությունից և ջերմաստիճանից, որի հետևանքով դիսսիպատիվ ուժերի աշխատանքի շնորհիվ տեղի է ունենում ջերմության անջատում:

Դիտարկված է ջերմաստիճանի բաշխումը սահմանային ստացիոնար դեպքում:

Հնդունված է, որ ձողի կողմնային մակերևույթի վրա ջերմաստիճանը անփոփոխ է և հավասար է միջավայրի ջերմաստիճանին: Բացի այդ, ընդունված է, որ ձողի առանցքի երկայնքով ջերմաստիճանը չի փոխվում:

ON TWISTING OF AN ORTHOTROPIC VISCOUS-ELASTIC PRISMATIC ROD UNDER VIBRATIONAL LOAD

G. B. VERMISHIAN, B. A. MELTONIAN

Summary

The twisting of an orthotropic viscous-elastic prismatic rod of non-circular cross-section under vibrational load has been studied. The applied load changes according to the harmonic law with a constant amplitude. The components of the complex modulus essentially depend on the frequency of vibration and temperature, with heat being evolved due to dissipative forces. The distribution of temperature in boundary stationary case has been considered. The temperature on the boundary surface of the rod has been taken invariable and equal to the ambient temperature. Besides, the temperature along the rod's axis is assumed to be invariable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вермишян Г. Б., Галич А. А. Кручение вязко-упругого призматического стержня при действии вибрационной нагрузки. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
2. Вермишян Г. Б. Кручение вязко-упругого составного призматического стержня под действием вибрационной нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 1.
3. Галич А. А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
5. Галич А. А., Перлов Н. П. Изгиб балок из полимерного материала под действием вибрационной нагрузки. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.