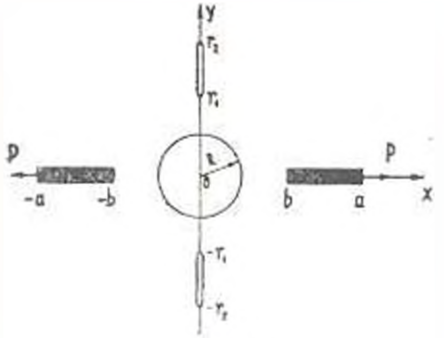
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 2, 1977 Механика

С. С. ШАГИНЯН

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СТРИНГЕРОВ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ, РАССЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ СИММЕТРИЧНЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

1. Пусть бесконечная пластина с круговым отверстием радиуса R, расслабленная двумя радиальными симметричными разрезами, не выходящими на свободную границу кругового отверстия, подкреплена симметрично расположенными и достаточно тонкими упругими стрингерами из одинакового материала. Пусть далее, к концам стрингеров приложены равные по величине и противоположные по направлению силы P (фиг. 1). При нулевом напряженном состоянии на бесконечности требуется найти закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления стрингеров с пластиной и определить коэффициенты интенсивностей разрывающего напряжения в концевых точках симметрично расположенных разрезов.



фиг. 1.

Вследствие симметрии задачи рассмотрим только правую часть данной области. Очевидно, что функцию влияния этой задачи можно представить в следующем виде:

$$V(r) = V_r^Q(r, 0) + V_r^P(r, 0), \quad r > R$$

где смещения $V_r^Q(r, 0)$ обусловлены действием единичных сосредоточенных нагрузок Q, приложенных в симметричных точках пластины с круговым отверстием без разрезов, а упругие смещения $V_r^P(r, 0)$ обусловлены наличием симметрично расположенных разрезов в пластине, расслабленной круговым отверстием.

Эти перемещения даются формулами [1, 2]

$$V_r^q(r, 0) = \frac{\varkappa q}{2\pi\mu(1+\varkappa)}\left\{\ln\frac{r+t}{|r-t|} + \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}\ln\frac{rt+R^2}{rt-R^2} - \right.$$

$$-\frac{R^4 t}{r(r^2t^2-R^4)} - \frac{R^4 r}{t(r^2t^2-R^4)} + \frac{2R^2 rt}{r^2t^2-R^4} +$$

$$\left. + \frac{R^2(R^2-t^2)(R^2-r^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa rt(r^2t^2-R^4)^2} + \frac{R^2}{\varkappa rt}\right\}, \quad R < r < \infty, \quad t > R$$

$$V_r^p(r, 0) = \frac{1}{2\mu}\int_{r_1}^{r_2} G_R(r, s)\,\chi_t(s)\,ds, \quad R \leqslant r < \infty$$

где

$$G_R(r, s) = -\frac{4}{\pi}\frac{s^3 r}{r^2s^2+R^4} + \frac{2(\varkappa-1)}{\pi}\frac{r^3 s}{r^2s^2+R^4} +$$

$$+\frac{2(\varkappa-1)R^2}{\pi}\frac{rs}{r^2s^2+R^4} + \frac{4}{\pi}\frac{rs}{r^2+s^2} - \frac{1+\varkappa}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2R^2 rs}{r^2s^2-R^4}\right) -$$

$$-\frac{1+\varkappa}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{r^2-s^2}{2rs}\right) - \frac{4R^2}{\pi rs} + \frac{4s}{\pi r} -$$

$$-\frac{2(\varkappa-1)}{\pi}\frac{r}{s} - \frac{1+\varkappa}{\pi}, \quad R \leqslant r < \infty, \quad r_1 < s < r_2$$

а функция $\chi_t(s)$ дается формулой

$$\chi_t(s) = \left[1 - \left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right]^{-1/2}\sum_{m=1}^{\infty} x_m T_m\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right), \quad r_1 < s < r_2$$

Коэффициенты χ_n удовлетворяют бесконечным системам линейных уравнений

$$x_n + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m = e_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Вид ядра и свободного члена последней системы приведены в работе [2]. В этих выражениях μ и $\varkappa$ — упругие постоянные материала пластины. Решение указанной бесконечной системы представим в виде

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_n^{(k)} e_k(t), \quad t > R$$

где последовательность чисел $\{\xi_n^{(k)}\}_{n,k=1}^{\infty}$ является решением бесконечной системы

$$\xi_n^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \xi_m^{(k)} = \delta_{nk}, \quad n, \ k = 1, \ 2, \ldots$$

где

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

Если теперь вместо внешних единичных сосредоточенных сил Q взять распределенную касательную нагрузку интенсивности $q(t)$, то в этом случае роль функции $\chi_1(s)$ будет играть функция $\chi^*(s)$, которая будет даваться формулой

$$\chi^*(s) = d_s \sum_{k=1}^{\infty} h_k(s) \int_b^a r_k(t)\, q(t)\, dt$$

Входящая в это выражение функция $h_k(s)$ имеет вид

$$h_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \left[1 - \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \right]^{-1/2} T_m \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

а постоянная d_s — ширина упругих стрингеров.

На основе этих формул горизонтальные смещения точек положительной полуоси ($r \geqslant R$) абсцисс будут

$$V(r) = \frac{\varkappa d_s}{2\pi\mu(1+\varkappa)} \int_b^a \left[\ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{\varkappa^2 + 1}{2\varkappa} \ln \frac{rt + R^2}{rt - R^2} - \right.$$

$$- \frac{R^4 t}{r(r^2t^2 - R^4)} - \frac{R^4 r}{t(r^2t^2 - R^4)} + \frac{2R^2 rt}{r^2t^2 - R^4} +$$

$$\left. + \frac{R^2(t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2t^2 + R^4)}{\varkappa rt(r^2t^2 - R^4)^2} + \frac{R^2}{\varkappa rt} \right] q(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{r_1}^{r_2} G_R(r, \ s)\, \chi^*(s)\, ds, \quad R \leqslant r < \infty$$

Подставив в эту формулу значение функции $\chi^*(s)$, получим

$$V(r) = \frac{\varkappa d_s}{2\pi\mu(1+\varkappa)} \int_b^a \left[\ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{\varkappa^2 + 1}{2\varkappa} \ln \frac{rt + R^2}{rt - R^2} + \right.$$

$$+ R^2 \left(\frac{r^2 - R^2}{r^2} + \frac{t^2 - R^2}{t^2} \right) \frac{rt}{r^2t^2 - R^4} +$$

$$+ R^2 \frac{(t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2t^2 - R^4)}{\varkappa r t\,(r^2t^2 - R^4)^2} + \frac{R^2}{\varkappa r t}\Bigg]\, q(t)\, dt +$$

$$+ \frac{d_s}{2\mu} \sum_{k=1}^{\infty} h_k^*(r) \int_b^a e_k(t)\, q(t)\, dt$$

где обозначено

$$h_k^*(r) = \int_{r_1}^{r_2} G_R(r, s)\, h_k(s)\, ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Так как функция влияния этой задачи уже найдена, запишем, не останавливаясь на подробностях, основное определяющее уравнение поставленной контактной задачи. Оно имеет вид

$$\int_b^a \left[\frac{1}{t-r} + K_R(r, t) + \frac{\pi(\varkappa+1)}{\varkappa} \sum_{k=1}^{\infty} e_k(t) \frac{h_k^*(r)}{dr}\right] \theta'(t)\, dt = \lambda\theta(r) \tag{1.1}$$

$$b < r < a$$

К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия

$$\theta(b) = 0, \qquad \theta(a) = P/d_s \tag{1.2}$$

выражающие условие равновесия стрингеров.

Отметим, что первый интеграл в левой части (1.1) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Контактное напряжение дается формулой

$$q(r) = \theta'(r), \quad b < r < a$$

Постоянная величина λ является комбинацией упругих и геометрических характеристик пластины и стрингеров и имеет вид

$$\lambda = \frac{2\pi\mu(1+\varkappa)}{\varkappa d_s h_s E_s}$$

где параметры h_s и E_s — соответственно высота и модуль Юнга стрингеров.

Функция $K_R(r, t)$, входящая в состав ядра сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1), выражается формулой

$$K_R(r, t) = \frac{1}{r+t} - R^2 \frac{\varkappa^2+1}{\varkappa} \frac{t}{r^2t^2 - R^4} + \frac{2R^4 t}{r^2(r^2t^2 - R^4)} -$$

$$- R^2 t \left(\frac{r^2 - R^2}{r^2} + \frac{t^2 - R^2}{t^2}\right) \frac{r^2t^2 + R^4}{(r^2t^2 - R^4)^2} +$$

$$+ \frac{2R^2(t^2 - R^2)(r^2t^2 + R^4)}{\varkappa t\,(r^2t^2 - R^4)^2} + \frac{2R^2 t\,(R^2 - t^2)(R^2 - r^2)}{\varkappa (r^2t^2 - R^4)^2} -$$

$$-\frac{R^2(t^2-R^2)(r^2-R^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa r^2t(r^2t^2-R^4)^2}-$$

$$-\frac{4R^2t(t^2-R^2)(r^2-R^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa(r^2t^2-R^4)^3}-\frac{R^2}{\varkappa r^2t},\qquad b\leqslant r,\ t\leqslant a$$

2. Решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) представим в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода

$$\theta'(r)=\left[1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}y_mT_m\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right),\quad b<r<a$$

где $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Известным способом [1—6], не останавливаясь здесь на подробностях, для определения коэффициентов разложения $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$y_n+\sum_{m=1}^{\infty}(A_{mn}+B_{mn}+C_{mn})\,y_m=(a_n-b_n-A_{0n}-C_{0n})\,y_0,\quad n=1,\ 2,\ldots$$

где введены обозначения

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^2(a-b)}\int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\,dr\,\times$$

$$\times\int_b^a K_R(r,t)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}T_m\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)dt$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ n=1,\ 2,\ldots$$

$$B_{mn}=\frac{2\lambda}{\pi^2m}\int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)U_{m-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)\left[1-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2\right]dr,\quad m,\ n=1,\ 2,\ldots$$

$$C_{mn}=\frac{4(\varkappa+1)}{\pi\varkappa(a-b)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_b^a\frac{dh_k(r)}{dr}\,U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\,dr\int_b^a e_k(t)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}\times$$

$$\times T_m\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)dt,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ n=1,\ 2,\ldots$$

$$a_n = \frac{2\lambda}{\pi} \int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right) \sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\, dr, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2\lambda}{\pi^2} \int_b^a \arccos\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right) U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right) \times$$

$$\times \sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\, dr, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x)/\sin \arccos x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Коэффициент y_0 определяется из граничных условий (1.2) и имеет значение

$$y_0 = 2P/\pi d_*(a-b)$$

Без особого затруднения можно показать, что для любого значения параметра λ полученная бесконечная система квазивполне регулярна, а для некоторого диапазона изменения значений этого параметра она вполне регулярна. Кроме того, можно показать, что свободный член этой системы убывает со скоростью не медленнее, чем n^{-1}.

Определим коэффициенты интенсивностей разрывающего напряжения $\sigma_\theta(r, \pi/2)$ в концевых точках симметрично расположенных разрезов. Аналогично тому, как это сделано в работе [2], для коэффициентов интенсивностей разрывающего напряжения в этом случае будем иметь

$$N(r_1) = \lim_{r \to r_1 - 0} \sigma_\theta(r, \pi/2) \sqrt{r_1 - r} =$$

$$= -\sqrt{r_2 - r_1}\, d_* \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \int_b^a e_k(t)\, q(t)\, dt$$

$$N(r_2) = \lim_{r \to r_2 + 0} \sigma_\theta(r, \pi/2) \sqrt{r - r_2} =$$

$$= \sqrt{r_2 - r_1}\, d_* \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \int_b^a e_k(t)\, q(t)\, dt$$

Автор благодарен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 28 VI 1976

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ՈՒԺԻ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻՑ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՃԵՂՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է հարթ կոնտակտային խնդիր կլոր անցքով սալի համար, երբ վերջինս թուլացված լինելով երկու շառավղային ճեղքերով, ուժեղացված է սիմետրիկ դասավորված առաձգական վերադիրներով։ Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերը կենտրոնացված բեռի տեսքով կիրառված են վերադիրների ծայրերում առանցքային տարբեր ազդեցություններով։

Դիտարկված խնդրի լուծումը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում բերված է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը։ Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ ստացված է այդ հավասարման էֆեկտիվ լուծումը։

LOAD TRANSFER FROM TWO SYMMETRICAL STIFFENERS TO AN INFINITE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE WEAKENED BY TWO SYMMETRICAL RADIAL CUTS

S. S. SHAHINIAN

Summary

In the present paper the problem of load transfer from two symmetrical stiffeners to an infinite plate with a circular hole, weakened by two symmetrical radial cuts, not extending beyond the free circular boundary, is considered.

The problem is defined in the form of singular integro-differential equation under definite boundary conditions.

The solution is presented in the form of expansion by Chebishev polynomials of the first kind. As to the unknown expansion coefficients, a quasi-quite regular infinite system of linear algebraic equations is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 3.
2. *Мхитарян С. М., Шагинян С. С.* О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами. Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. 63, № 4.
3. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на своей границе упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1.

4. *Arutunian N. K., Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeneers. Frends in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary volume. Wolters-Nordorff publ., 1971.

5. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, № 5.

6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1971, т. 35, № 1.