ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 2, 1977 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПО ДВУМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ СТОРОНАМ, С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1]—[5] и др.).

В настоящей статье на основе системы дифференциальных уравнений устойчивости неупругих пластинок [9], учитывающих влияние деформаций поперечных сдвигов [6], рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам. Рассматриваются различные варианты краевых условий на ненагруженных сторонах пластинки. Аналогичная задача для упругих пластинок рассмотрена в работе [10].

1. Пусть в прямоугольной пластинке постоянной толщины h, отнесенной к системе декартовых координат x, y, z, равномерным сжатием вдоль оси ox реализовано безмоментное состояние за пределами упругости материала

$$\sigma_x = -p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_i = p$$
$$e_x = -e_y, \quad e_y = \frac{e_i}{2}, \quad e_{xy} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь σ_x, σ_y, τ_{xy} и e_x, e_y, e_{xy} — компоненты напряжения и деформации, σ_i и e_i — интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига.

Система дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой неупругой пластинки при учете влияния поперечных сдвигов [6], в рамках деформационной теории пластичности [1] и применимости гипотезы непрерывного нагружения выпучиваемой пластинки [7], примет следующий вид:

$$\frac{ph}{J_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{12}{h^3} J_2\left(\frac{4a_{11}}{a_{22}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{12}{h^3} J_2 \varphi - \frac{36}{h^3} J_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{12}{h^3} J_2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + \frac{12}{h^3} J_2 \psi - \frac{36}{h^3} J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.2}$$

где

$$a_{11}=\frac{4}{9e_i}\left[3p+\frac{9}{4}e_i^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]$$

$$a_{22}=\frac{4p}{3e_i},\qquad a_{12}=\frac{a_{22}}{2},\qquad a_{33}=\frac{a_{22}}{4} \tag{1.3}$$

w — прогиб пластинки, φ и ψ — функции, характеризующие распределение деформаций поперечных сдвигов в срединной плоскости пластинки. J_1 и J_2 — постоянные, определяемые по выбранному закону изменения этих деформаций по толщине пластинки [6].

Пусть пластинка шарнирно оперта по двум противоположным сторонам $x=0$, $x=a$.

Граничные условия этих сторон имеют вид

при $$x=0,\quad x=a$$

$$w=0,\quad \psi=0 \tag{1.4}$$

$$M_x=-\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{a_{22}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+4\frac{J_1}{a_{22}}\left(a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{a_{22}}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0$$

Решение системы (1.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.4), ищем в виде [10]

$$w=W(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$\varphi=F(y)\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{1.5}$$

$$\psi=\Psi(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Обычным методом, исключая из системы (1.2) функции F и Ψ, придем к следующему уравнению для прогибов:

$$a_{22}\frac{J_1}{J_2}\frac{d^6W}{dy^6}+\left[-a_{22}+\lambda^2\frac{J_1}{J_2}\left(a_{22}-4a_{11}+\frac{48p}{h^3}\frac{J_1}{J_2}\right)\right]\frac{d^4W}{dy^4}+$$

$$+\lambda^2\left\{2a_{22}-\frac{60p}{h^2}\frac{J_1}{J_2}+\lambda^2\frac{J_1}{J_2}\left[5a_{11}-2a_{22}+\frac{96p}{h^2}\frac{J_1}{J_2}\left(1-2\frac{a_{11}}{a_{22}}\right)\right]\right\}\frac{d^2W}{dy^2}+$$

$$+\lambda^2\left(1+\frac{J_1}{J_2}\lambda^2\right)\left(\frac{12p}{h^2}-a_{11}\lambda^2+\frac{48p}{h^2}\frac{J_1}{J_2}\lambda^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\right)W=0 \tag{1.6}$$

В случае, когда края пластинки $y=0$, $y=b$ совершенно свободны, критическое значение напряжения p_* определится из условия равенства нулю последнего члена уравнения (1.6)*), то есть

*) Это следует из решения устойчивости шарнирно опертой бесконечной полосы [9].

$$p_0 = \frac{a_{11}\gamma_1^2 h^2}{12\left(1 + 4k\gamma_1^2 \frac{a_{11}}{a_{22}}\right)} \tag{1.7}$$

Естественно, в остальных всех случаях граничных условий на краях $y=0$, $y=b$ можно положить

$$p = \alpha p_0, \quad \alpha > 1 \tag{1.8}$$

Имея в виду (1.8) и то обстоятельство, что в (1.6) W участвует лишь в четных производных, характеристическое уравнение представим в виде

$$Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 = 0 \tag{1.9}$$

где

$$Z = h^2\omega^2 \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 + \beta\left(1 - 4\gamma + \frac{2\alpha\beta\gamma}{5 + 2\beta\gamma}\right) \\ a_2 &= \beta\left\{20 - 25\frac{\alpha\beta\gamma}{5 + 2\beta\gamma} + \beta\left[5\gamma - 2 + \frac{4\alpha\beta\gamma(1 - 2\gamma)}{5 + 2\beta\gamma}\right]\right\} \\ a_3 &= \gamma\beta^3(\alpha - 1)(\beta + 10) \\ \beta &= \gamma_1^2 h^2, \qquad \gamma = \frac{a_{11}}{a_{22}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Пользуясь выражениями (1.1), легко получить интервал изменения

$$\frac{1}{4} \leqslant \gamma \leqslant 1 \tag{1.12}$$

Нетрудно заметить, что при отыскании нижнего критического напряжения, при котором обычно $m = 1$,

$$0 < \beta < 1 \tag{1.13}$$

Из условия положительности свободного члена a_3 следует, что уравнение (1.9) имеет по крайней мере один отрицательный действительный корень $Z_1 < 0$. Согласно обозначению (1.10), этому корню соответствуют фундаментальные решения уравнения (1.6) типа

$$\sin\omega_1 y \quad \text{и} \quad \cos\omega_1 y, \quad \omega_1 = h\sqrt{-z_1} \tag{1.14}$$

Вычисления показывают, что минимумы безразмерной функции

$$\Phi(Z) = Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 \tag{1.15}$$

во всех возможных интервалах параметров

$$1 \leqslant \alpha \leqslant 10, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1/4 \leqslant \gamma \leqslant 1 \tag{1.16}$$

отрицательны

$$-187.94 \leq \Phi_{\min} \leq -33.25 \tag{1.17}$$

и достигаются при положительных $z = z_0(\alpha, \beta, \gamma)$

$$Z_0 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0 \qquad (5.50 < z_0 < 7.66) \tag{1.18}$$

Из этого следует, что остальные два корня уравнения (1.9), вообще, независимо от степени развития пластического деформирования, являются различными положительными числами.

Фундаментальные решения дифференциального уравнения (1.6), соответствующие положительным корням Z_2 и Z_3, с учетом (1.10) будут

$$\begin{gathered} \operatorname{sh} \omega_2 y, \quad \operatorname{ch} \omega_2 y, \quad \operatorname{sh} \omega_3 y, \quad \operatorname{ch} \omega_3 y \\ \omega_2 = \frac{1}{h}\sqrt{Z_2}, \qquad \omega_3 = \frac{1}{h}\sqrt{Z_3} \end{gathered} \tag{1.19}$$

Решая уравнение (1.9), для ω_i получим

$$\begin{gathered} \omega_1 = \frac{1}{h}\left[2\sqrt{-\frac{\xi}{3}}\cos\left(\frac{\delta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{a_1}{3}\right]^{1/2} \\ \omega_2 = \frac{1}{h}\left[2\sqrt{-\frac{\xi}{3}}\cos\frac{\delta}{3} - \frac{a_1}{3}\right]^{1/2} \\ \omega_3 = \frac{1}{h}\left[-2\sqrt{-\frac{\xi}{3}}\cos\left(\frac{\delta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}\right]^{1/2} \end{gathered} \tag{1.20}$$

$$\xi = -\frac{a_1^2}{3} + a_2, \qquad \cos\delta = -\frac{q}{2\sqrt{-(\xi/3)^3}}, \quad q = 2\left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения, на основе вышесделанного анализа, представим в виде

$$\begin{gathered} W(y) = C_1 \sin\omega_1 y + C_2 \cos\omega_1 y + C_3 \operatorname{sh}\omega_2 y + \\ + C_4 \operatorname{ch}\omega_2 y + C_5 \operatorname{sh}\omega_3 y + C_6 \operatorname{ch}\omega_3 y \end{gathered} \tag{1.21}$$

где C_i — произвольные постоянные.

С учетом (1.21) из (1.8) получим неоднородные дифференциальные уравнения относительно F и Ψ. Не вдаваясь в подробности, приводим общие решения этих уравнений*)

$$\begin{gathered} F(y) = C_1 A_1 \sin\omega_1 y + C_2 A_1 \cos\omega_1 y + C_3 A_2 \operatorname{sh}\omega_2 y + C_4 A_2 \operatorname{ch}\omega_2 y + \\ + C_5 A_3 \operatorname{sh}\omega_3 y + C_6 A_3 \operatorname{ch}\omega_3 y \\ \Psi(y) = C_1 B_1 \cos\omega_1 y - C_2 B_1 \sin\omega_1 y + C_3 B_2 \operatorname{ch}\omega_2 y + C_4 B_2 \operatorname{sh}\omega_2 y + \\ + C_5 B_3 \operatorname{ch}\omega_3 y + C_6 B_3 \operatorname{sh}\omega_3 y \end{gathered} \tag{1.22}$$

*) Возникающие дополнительные постоянные равны нулю, в чем легко убедиться подстановкой полученных решений в систему (1.6).

где приняты обозначения:

$$A_1 = -\frac{1}{12\,J_1(\omega_1^2+\omega_4^2)}\left[\beta^{3/2}\left(\frac{36p}{h^2}k - a_{11}\right) - \gamma_1 a_{22}\omega_1^2 h^3\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{12J_1(\omega_2^2-\omega_4^2)}\left[\beta^{3/2}\left(\frac{36p}{h^2}k - a_{11}\right) - \gamma_1 a_{22}\omega_2^2 h^3\right]$$

$$A_3 = \frac{1}{12J_1(\omega_3^2-\omega_4^2)}\left[\beta^{3/2}\left(\frac{36p}{h^2}k - a_{11}\right) - \gamma_1 a_{22}\omega_3^2 h^3\right] \qquad (1.23)$$

$$B_1 = -\frac{\gamma_1}{\omega_1}\left(A_1 - \frac{ph\gamma_1}{J_2}\right), \qquad B_2 = \frac{\gamma_1}{\omega_2}\left(A_2 - \frac{ph\gamma_1}{J_2}\right)$$

$$B_3 = \frac{\gamma_1}{\omega_3}\left(A_3 - \frac{ph\gamma_1}{J_2}\right), \qquad \omega_4^2 = -3\gamma_1^2 + 4\gamma_1^2\gamma + \frac{1}{k}$$

С учетом (1.5), (1.21) и (1.22) из соответствующих выражений для изгибающих и крутящих моментов находим

$$M_y = (C_1M_1\sin\omega_1 y + C_2M_1\cos\omega_1 y + C_3M_2\,\mathrm{sh}\,\omega_2 y +$$
$$+ C_4M_2\,\mathrm{ch}\,\omega_2 y + C_5M_3\,\mathrm{sh}\,\omega_3 y + C_6M_3\,\mathrm{ch}\,\omega_3 y)\sin\gamma_1 x$$
$$H = (C_1H_1\cos\omega_1 y - C_2H_1\sin\omega_1 y + C_3H_2\,\mathrm{ch}\,\omega_2 y +$$
$$+ C_4H_2\,\mathrm{sh}\,\omega_2 y + C_5H_3\,\mathrm{ch}\,\omega_3 y + C_6H_3\,\mathrm{sh}\,\omega_3 y)\frac{a_{23}}{24}\cos\gamma_1 x, \qquad N_2 = J_2$$

где

$$M_1 = \frac{a_{23}h^3}{24}(2\omega_1^2 + \gamma_1^2) - \frac{3}{2}a_{22}J_1\frac{e_i}{p}(2B_1\omega_1 + \gamma_1 A_1)$$

$$M_2 = -\frac{a_{23}h^3}{24}(2\omega_2^2 - \gamma_1^2) + \frac{3}{2}a_{22}J_1\frac{e_i}{p}(2B_2\omega_2 - \gamma_1 A_2) \qquad (1.24)$$

$$H_1 = -\gamma_1\omega_1 h^3 + 18J_1\frac{e_i}{p}(A_1\omega_1 + \gamma_1 B_1)$$

$$H_2 = -\gamma_1\omega_2 h^3 + 18J_1\frac{e_i}{p}(A_2\omega_2 - \gamma_1 B_2)$$

$$H_3 = -\gamma_1\omega_3 h^3 + 18J_1\frac{e_i}{p}(A_3\omega_3 - \gamma_1 B_3)$$

Имея выражения фундаментальных решений, можно для каждого конкретного случая крепления ненагруженных краев пластинки записать матрицу, собственные числа которой являются критическими значениями сжимающего напряжения.

2. В качестве примеров рассмотрим следующие три варианта граничных условий:

а) край $y = 0$ шарнирно оперт $(w = M_y = \varphi = 0)$

а край $y = b$ — свободен $(M_y = \psi = H = 0)$ (2.1)

б) край $y = 0$ шарнирно оперт, а край $y = b$ жестко заделан

$$\left(w = \varphi = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3e_1}{p}\frac{h}{2}\psi = 0\right) \tag{2.2}$$

в) край $y = 0$ свободен, а край $y = b$ жестко заделан (2.3)

Записывая соответствующие граничные условия для каждого варианта, получим однородную систему шести уравнений относительно шести постоянных интегрирования C_i. Критические значения напряжения получатся как собственные числа определителя этой системы.

В случае а) определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & M_1 & 0 & M_2 & 0 & M_3 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_3 \\ M_1\sin\omega_1 b & M_1\cos\omega_1 b & M_2\mathrm{sh}\,\omega_2 b & M_2\mathrm{ch}\,\omega_2 b & M_3\mathrm{sh}\,\omega_3 b & M_3\mathrm{ch}\,\omega_3 b \\ B_1\cos\omega_1 b & -B_1\sin\omega_1 b & B_2\mathrm{ch}\,\omega_2 b & B_2\mathrm{sh}\,\omega_2 b & B_3\mathrm{ch}\,\omega_3 b & B_3\mathrm{sh}\,\omega_3 b \\ H_1\cos\omega_1 b & -H_1\sin\omega_1 b & H_2\mathrm{ch}\,\omega_2 b & H_2\mathrm{sh}\,\omega_2 b & H_3\mathrm{ch}\,\omega_3 b & H_3\mathrm{sh}\,\omega_3 b \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4}$$

Если везде жесткости поперечных деформаций сдвигов считать бесконечно большими, то получится решение задачи по классической постановке.

В нижеприведенной таблице представлены значения критического напряжения по классической $(p_{кл})$ и уточненной $(p_{ут})$ теориям.

Расчеты проводились для случая линейного упрочнения материала, когда

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{h^2}{10}, \quad \left[f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right] \tag{2.5}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}, \quad \lambda = \frac{1}{6}, \quad G = 7\cdot 10^5 \ кг/см^2, \quad \sigma_s = 2\cdot 10^3 \ кг/см^2$$

Таблица 1

случай а)			случай б)			случай в)		
$p_{кл}$ в 10^3 кг/см^2	$p_{ут}$	$p_{кл}/p_{ут}$	$p_{кл}$	$p_{ут}$	$p_{кл}/p_{ут}$	$p_{кл}$	$p_{ут}$	$p_{кл}/p_{ут}$
192.88	123.43	1.56	440.93	264.17	1.67	250.82	134.09	1.91

Как видно из третьих столбцов таблицы, при рассмотренных граничных условиях пластинки учет влияния поперечных сдвигов уменьшает нижние критические нагрузки примерно в полтора—два раза.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 III 1976

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ԵԶՐԵՐՈՎ ՀՈԴԱԿԱՊՈՐԵՆ ՀԵՆՎԱԾ ՈՉ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Ոչ առաձգական սալերի կայունության ուսումնասիրման համար ստացված դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի հիման վրա [9], որը հաշվի է առնում լայնական սահքի դեֆորմացիաների ազդեցությունը, դիտարկվում է երկու հանդիպակաց եզրերով հոդակապորեն հենված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը։

Դիտարկվում են սալի չբեռնված կողերի եզրային պայմանների մի քանի տարբերակներ։

ON STABILITY OF NON-ELASTIC RECTANGULAR PLATES HINGE-SUPPORTED ON TWO OPPOSITE SIDES WITH DUE REGARD TO THE EFFECT OF TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

In terms of a system of differential equations of stability of non-elastic plates [9], regarding the effect of transversal deformation displacements the problem of stability of non-elastic rectangular plates hinge-supported on their two opposite sides is considered.

Various cases of boundary conditions on non-loaded sides of the plates are dealt with.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., Физматгиз, 1969.
3. *Хорн М.* Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, № 1, 1965.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
5. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформации поперечных сдвигов. ПММ, 1963, т. XXVII, в. 4.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., Физматгиз, 1967.
7. *Shanley F. R.* Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, 1947, v. XIV, No. 5.
8. *Работнов Ю. Н., Шестерикова С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, в. 3.
9. *Киракосян Р. М.* Об устойчивости пластинок за пределами упругости с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
10. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Прикл. механ. АН УССР, 1966, т. II, в. 2.