ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

Г. А. ЗАГОРОДНАЯ, В. М. ФРИДМАН

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА Л. В. КАНТОРОВИЧА В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Излагается вариационный метод решения задачи об упруго-пластической деформации для упрочняющегося материала. Для решения общей задачи теории пластичности предлагается видоизмененный метод Л. В. Канторовича, в котором перемещения и напряженное состояние представляются в виде разложения в ряд по координатным функциям. Коэффициенты разложения зависят от времени (параметра нагружения). Совокупность коэффициентов разложения (векторная функция времени) находится путем приближенного численного решения начальной задачи.

Такой подход для решения конкретной задачи об изгибе балки в первом приближении использован, например, Ю. Н. Работновым [1].

Ниже дается обобщенная формулировка метода и приводится пример решения задачи об упруго-пластическом деформировании осесимметрично нагруженного цилиндра постоянной толщины.

1. Уравнения пластического течения упруго-пластического тела из упрочняющегося материала в общем виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \underline{\dot{x}} - \underline{\dot{f}} = 0 \\ &\operatorname{def} \dot{u} - B(x)\,\dot{\underline{x}} = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$B(x)\,\dot{\underline{x}} = \begin{cases} B_0 \dot{\underline{x}} + F(T)\,\dot{T}\,\underline{\xi} & \text{при } T > 0 \quad \text{(нагружение)} \\ B_0 \dot{\underline{x}} & \text{при } T \leqslant 0 \quad \text{(разгрузка)} \end{cases}$$

$\underline{x}$ — тензор напряжений, u — вектор перемещений, $\underline{f}$ — вектор объемной силы, B_0 — оператор упругих констант, $\underline{\xi} = \operatorname{dev} \underline{x}$ — девиаторная часть тензора напряжений, $T = \frac{1}{2}\,\underline{\xi} \cdot \cdot\, \underline{\xi}$ — интенсивность напряжений сдвига, $F(T)$ — функция, характеризующая упруго-пластические свойства материала.

Условия на границе тела можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\underline{X} - \underline{F} = 0 \text{ на } \Gamma_1 \\ &\underline{U} - \underline{E} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

причем $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ — суммарная поверхность всей рассматриваемой области Ω.

В начальный момент времени при $t = 0$ во всей области величины

$$\underline{x} = 0 \quad \text{и} \quad \underline{u} = 0 \tag{1.3}$$

Можно показать, что система уравнений (1.1) при краевых условиях (1.2) равносильна условию стационарности функционала [2]:

$$I(\underline{x}, \underline{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (-\operatorname{div} \underline{x} + 2\underline{f})\cdot \underline{u} + \underline{x} \,..\, [\operatorname{def} \underline{u} - B(\underline{x})\,\underline{x}]\, d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} (\underline{X} - 2\underline{F})\cdot \underline{U} d\Gamma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} \underline{X}\cdot(\underline{U} - 2\underline{E})\, d\Gamma \tag{1.4}$$

Рассматривая только случай нагружения во всей области Ω, для вариации функции (1.4) получим

$$\delta I(\underline{x}, \underline{u}) = \int_{\Omega} [(-\operatorname{div} \underline{x} - \underline{f})\cdot \delta\underline{u} + \delta\underline{x} \,..\, [\operatorname{def} \underline{u} - B(\underline{x})\,\underline{x}]\, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} (\underline{X} - \underline{F})\cdot \delta\underline{U} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \delta\underline{X}\cdot(\underline{U} - \underline{E})\, d\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

Из (1.5) очевидно, что если выполнено уравнение равновесия, закон пластического течения (1.1) и краевые условия (1.2), то вариация $\delta I(\underline{x}, \underline{u}) = 0$. Справедливо также обратное утверждение о том, что выполнение условия (1.5) равносильно системе уравнений (1.1) и краевым условиям (1.2).

Для отыскания решения напряженное состояние $\underline{x}$ и перемещение $\underline{u}$ будем аппроксимировать независимо и одновременно:

$$\underline{x} = \underline{x}_e + \sum_{i=k}^{n} \alpha_i(t)\, \underline{x}_i$$

$$\underline{u} = \underline{u}_e + \sum_{i=r}^{n} \beta_i(t)\, \underline{u}_i \tag{1.6}$$

где $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ — функции только времени t; $\underline{x}_i$ и $\underline{u}_i$ — координатные функции, а функции $\underline{x}_e$ и $\underline{u}_e$ представляют собой решение „упругой" задачи

$$\operatorname{div} \underline{x}_e - \underline{f} = 0$$

$$\operatorname{def} \underline{u}_e - B\underline{x}_e = 0 \tag{1.7}$$

причем

$$\underline{X}_e - \underline{F} = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } \underline{U}_e - \underline{E} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{1.8}$$

В силу начальных условий (1.3) имеем

$$\alpha_i(0) = 0, \quad \beta_i(0) = 0 \tag{1.9}$$

Для простоты будем считать, что решение «упругой» задачи известно. Для производных, имея в виду (1.6), можно записать:

$$\underline{x} = \underline{x}_* + \sum_{i=-k}^{n} \alpha_i \underline{x}_i \tag{1.10}$$

$$\underline{u} = \underline{u}_* + \sum_{i=-r}^{n} \beta_i \underline{u}_i$$

и для вариаций

$$\delta\underline{x} = \sum_{i=-k}^{n} \delta\alpha_i \underline{x}_i \quad \text{и} \quad \delta\underline{u} = \sum_{i=-r}^{n} \delta\beta_i \underline{u}_i \tag{1.11}$$

Координатные функции $\underline{x}_i$ и $\underline{u}_i$ выберем таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

а) $$\operatorname{div} \underline{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i = -k, \ldots, -1, 0 \\ \neq 0 & \text{для } i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{1.12}$$

б) $$\operatorname{def} \underline{u}_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i = -r, \ldots, -1, 0 \\ \neq 0 & \text{для } i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{1.13}$$

в) однородным краевым условиям, то есть

$$\underline{X}_i = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \underline{U}_i = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{1.14}$$

Подставляя ряды (1.10), (1.11) в условие стационарности (1.5) и учитывая краевые условия (1.8) и (1.14), а также условия (1.7), (1.12) и (1.13), получим

$$\delta I(\underline{x}, \underline{u}) = \int_\Omega \Big\{ -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{div} \underline{x}_i \cdot \sum_{j=-r}^{n} \delta\beta_j \underline{u}_j +$$

$$+ \sum_{i=-k}^{n} \delta\alpha_i \underline{x}_i \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \operatorname{def} \underline{u}_j - F(T) T \underline{\varepsilon} - \sum_{j=-k}^{n} \alpha_j B_0 \underline{x}_j \Big) \Big\} d\Omega \tag{1.15}$$

Приравняем нулю коэффициенты при вариациях $\delta\alpha_i$ и $\delta\beta_i$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Omega \operatorname{div} \underline{x}_i \cdot \underline{u}_j d\Omega = 0 \quad \text{для} \quad j = -r, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_\Omega \operatorname{def} \underline{u}_i \cdot \underline{x}_j d\Omega - \sum_{i=-k}^{n} \alpha_i \int_\Omega B_0 \underline{x}_i \cdot \underline{x}_j d\Omega - \tag{1.16}$$

$$- \int_\Omega F(T) T \underline{\varepsilon} \cdot \underline{x}_j d\Omega \quad \text{для} \quad j = -k, \ldots, n$$

Из первого уравнения (1.16) в силу (1.13) и (1.14) получаем

$$\dot{\alpha}_i = 0 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.17}$$

Из второго уравнения (1.16), вводя функцию $\varphi(2T^2) = \dfrac{F(T)}{2T}$ и учитывая для неположительных индексов выражения (1.13) и (1.17), после ряда преобразований получим

$$\sum_{i=-k}^{0} (A_{ij} + B_{ij})\dot{\alpha}_i + \dot{\gamma}_j = 0 \qquad \text{для } j = -k, \ldots, -1, 0 \tag{1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\dot{\beta}_i - \sum_{i=-k}^{0} (A_{ij} + B_{ij})\dot{\alpha}_i - \dot{\gamma}_j = 0 \qquad \text{для } j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.19}$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ji} = \int_{\Omega} \varphi(\underline{\xi} \ldots \underline{\xi})\, \psi_i \psi_j \, d\Omega \\ B_{ij} &= B_{ji} = \int_{\Omega} \underline{x}_i \ldots B_0 \underline{x}_j \, d\Omega \\ C_{ij} &= \int_{\Omega} \operatorname{def} \underline{u}_i \ldots \underline{x}_j \, d\Omega \\ \dot{\gamma}_j &= \int_{\Omega} \varphi(\underline{\xi} \ldots \underline{\xi})\, \psi_j \dot{\psi}_e \, d\Omega \end{aligned} \tag{1.20}$$

причем

$$\psi_j = \underline{\xi} \ldots \underline{\xi}_j, \quad \dot{\psi}_e = \underline{\xi} \ldots \underline{\xi}_e \tag{1.21}$$

В системе (1.18), (1.19) коэффициенты B_{ij}, C_{ij} определены, если выбраны координатные функции $\underline{x}_i$ и $\underline{u}_i$, а A_{ij} и $\dot{\gamma}_j$ являются функциями только девиаторной части напряженного состояния и, следовательно, зависят только от коэффициентов $\alpha_{-k}, \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0$. Поэтому система уравнений (1.18) решается независимо от (1.19). Решение начальной задачи (1.18), (1.19) может быть найдено известными численными методами.

Для $i = 0, -1, \ldots, -r$ выполняется условие $\operatorname{def} \underline{u}_i = 0$, то есть для этих индексов $\underline{u}_i$ представляют собой жесткие смещения. Коэффициенты β_i при этих смещениях, естественно, остаются неопределенными.

Окончательно для напряженного состояния и перемещения можно записать:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \sum_{i=k}^{n} \alpha_i(t)\,\underline{x}_i$$
$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)\,\underline{u}_i \qquad (1.22)$$

2. Рассмотрим приложение изложенного здесь метода к задаче о вращающемся цилиндре постоянной толщины, нагруженном осесимметрично по внутренней и наружной поверхностям. Как в упругой задаче, предполагается, что поперечные сечения цилиндра, достаточно удаленные от его торцов, остаются плоскими и что осевая относительная деформация по всему цилиндру постоянна. Упругое решение задачи известно.

Координатные функции для определения напряженного состояния ($i = -k, \ldots, 1.0$), согласно (1.12) и (1.14), должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\frac{d(r\sigma_{ri})}{dr} - \sigma_{\theta i} = 0 \qquad (2.1)$$

и краевым условиям

$$\sigma_{ri} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и при} \quad r = 1 \qquad (2.2)$$

Для торцов цилиндра, как и в упругой области, положим

$$\int_{S_\tau} \sigma_{zi}\,dS_\tau = 0 \qquad (2.3)$$

где S_τ — площадь торца.

Условиям (2.2) удовлетворяет, например, функция

$$\sigma_{ri} = \frac{1 - r_0}{i\pi r} \sin \frac{i\pi(r - r_0)}{1 - r_0} \qquad (2.4)$$

Из (2.1) получаем

$$\sigma_{\theta i} = \cos \frac{i\pi(r - r_0)}{1 - r_0} \qquad (2.5)$$

а требование (2.3) приводит к выражению

$$\sigma_{zi} = \mu(\sigma_{\theta i} + \sigma_{ri}) \qquad (2.6)$$

Для положительных i выберем

$$\sigma_{ri} = -\frac{(i-1)\pi}{1 - r_0} \sin \frac{(i-1)\pi(r - r_0)}{1 - r_0}$$
$$\sigma_{\theta i} = \frac{1}{r} \cos \frac{(i-1)\pi(r - r_0)}{1 - r_0} \qquad (2.7)$$
$$\sigma_{zi} = \mu(\sigma_{\theta i} + \sigma_{ri})$$

Координатные функции для перемещений u_i находятся путем решения статической задачи под действием выбранных объемных нагрузок, но для упругого тела более простого, чем рассматриваемое, полагая, например, модуль упругости E равным единице, а коэффициент поперечной деформации μ равным нулю [3].

Дифференциальное уравнение, выражающее условие равновесия элемента цилиндра и объемных нагрузок $p_i(r)$, записывается в виде

$$\frac{d(r\sigma_{ri})}{dr} - \sigma_{\theta i} = -p_i(r) \tag{2.8}$$

При $E=1$ и $\mu=0$ получим

$$\sigma_{ri} = \varepsilon_{ri}, \quad \sigma_{\theta i} = \varepsilon_{\theta i} \tag{2.9}$$

Учитывая далее, что

$$\varepsilon_{ri} = \frac{1}{b}\frac{du_{ri}}{dr} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\theta i} = \frac{1}{b}\frac{u_{ri}}{r} \tag{2.10}$$

где b — наружный радиус цилиндра, после подстановки (2.9) в (2.8), а затем в (2.1) будем иметь:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru_{ri})}{dr}\right] = -b\frac{p_i(r)}{r} \tag{2.11}$$

Интегрируя (2.11) дважды и определяя постоянные интегрирования из условия однородности краевых условий тензора напряжений для рассматриваемого тела, то есть полагая при $r=r_0$ и $r=1$

$$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} = \frac{1}{b}\frac{du_{ri}}{dr} = 0$$

получим

$$\frac{1}{b}u_{ri} = \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} r\int_{r_0}^{r}\frac{p_i(r)}{r}\,dr\,dr + \frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

где

$$C_1 = \frac{2C_2}{r_0^2}, \qquad C_2 = -\frac{1}{2}\int_{r_0}^{1}\left(r + \frac{1}{r}\right)p_i(r)\,dr$$

Возьмем в качестве $p_i(r)$ функцию

$$p_i(r) = \left[\frac{1}{r} + \left|\frac{(i-1)\pi}{1-r_0}\right|^2 r\right]\cos\frac{(i-1)\pi(r-r_0)}{1-r_0} + \frac{(i-1)\pi}{1-r_0}\sin\frac{(i-1)\pi(r-r_0)}{1-r_0}$$

Тогда постоянные интегрирования будут равны

$$C_1 = \frac{1}{r_0}, \qquad C_2 = \frac{1}{2} r_0$$

и функция

$$u_{zi} = b \cos \frac{(i-1)\pi (r - r_0)}{1 - r_0} \quad (\text{для } i = 1, 2, \ldots, n)$$

Для ε_{zi} и $\varepsilon_{\theta i}$ по (2.10) получим

$$\varepsilon_{zi} = -\frac{(i-1)\pi}{1 - r_0} \sin \frac{(i-1)\pi (r - r_0)}{1 - r_0}$$

$$\varepsilon_{\theta i} = \frac{1}{r} \cos \frac{(i-1)\pi (r - r_0)}{1 - r_0}$$

На торцах однородное краевое условие записывается в виде

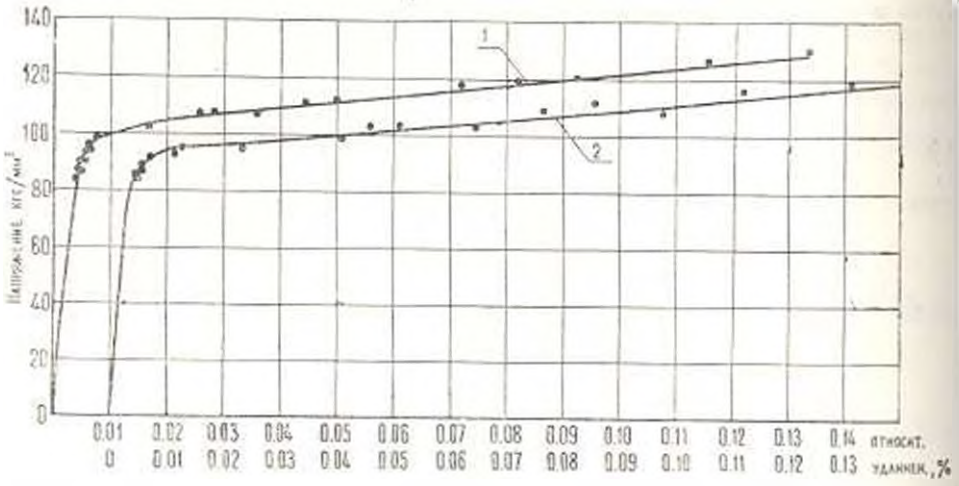
$$\int_{S_T} \sigma_{zi} dS_T = \int_{S_T} \sigma_{zi} dS_T = 0$$

Полагая, как и в упругой зоне, ε_{zi} независящим от радиуса и постоянным по длине цилиндра, получим $\varepsilon_{zi} = 0$.

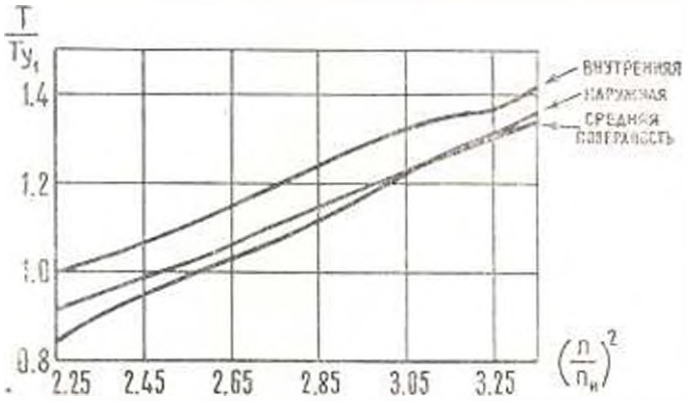
Диагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций для всех индексов равны нулю.

Рассмотренная задача реализована на ЭВМ. Производились, в частности, расчеты бандажных колец роторов современных мощных турбогенераторов. Бандажное кольцо представлялось в виде цилиндра, нагруженного собственной центробежной силой и центробежной силой обмотки, равномерно распределенной по внутренней поверхности. Производились расчеты для определения достаточного числа учитываемых координатных функций в напряжениях и деформациях, которые показали, что число членов ряда достаточно брать равным трем-четырем. Погрешность для интенсивности касательных напряжений во всем диапазоне нагружения не превышала 3—5%.

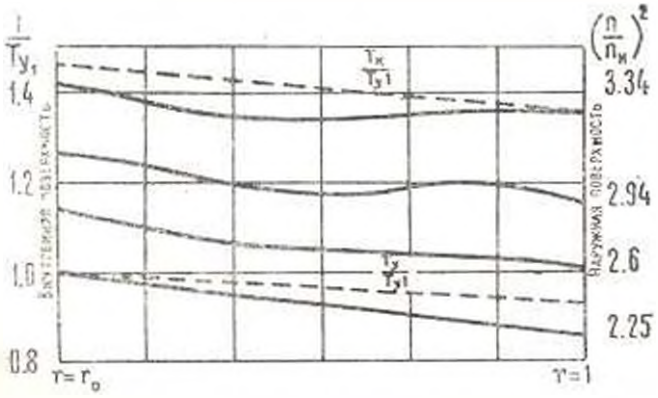
Истинная диаграмма растяжения материала бандажного кольца, полученная на образцах, вырезанных из наружной и внутренней поверхностей, представлена на фиг. 1. Результаты расчета бандажного кольца ротора турбогенератора мощностью 300 тыс. *квт* представлены на фиг. 2—4, где обозначено через n — скорость вращения, $n_н = 3000$ *об/мин* — номинальная скорость вращения, T_s, T_{s1} и T_k — интенсивности напряжений сдвига при пределе пропорциональности, то же на внутренней поверхности и при начале разрушения. Пластическое течение, как видно из фиг. 3, начинается с внутренней поверхности и наступает при скорости вращения 4500 *об/мин*. Окончание счета происходит вследствие достижения интенсивности касательных напряжений предельного значения на наружной поверхности кольца при скорости вращения 5470 *об/мин*, а коэффициент запаса по предельной нагрузке для данного бандажного кольца при разгонной скорости вра-



Фиг. 1. Истинная диаграмма растяжения образца из бандажной стали, 1 — внутренняя, 2 — наружная поверхности.

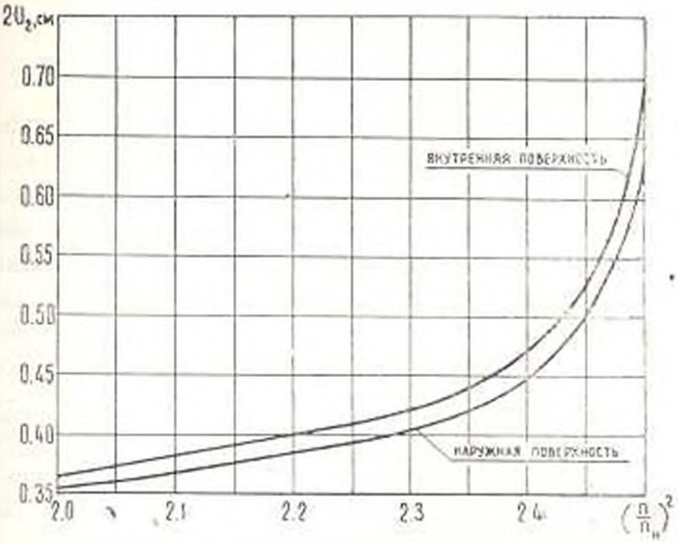


Фиг. 2. Изменение интенсивности касательных напряжений в бандажном кольце от скорости вращения.



Фиг. 3. Распределение интенсивности касательных напряжений по сечению бандажного кольца при различных скоростях вращения.

щения 3600 *об/мин* оказался равным 2.3, что на 40% больше, чем при расчете по максимальным эквивалентным напряжениям.



Фиг. 4. Приращения диаметров бандажного кольца.

Одновременно вычислялась и радиальная деформация кольца. Приращения внутреннего и наружного диаметров кольца в зависимости от скорости вращения даны на фиг. 4, из которой видно, что почти сразу за скоростью вращения 4500 *об/мин*, соответствующей началу пластического течения, наблюдается резкое возрастание радиальной деформации.

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступила 22 III 1976

Գ. Ա. ԶԱԿԻՐՈՎԱ, Վ. Ս. ԴՐԻԳՈՎ

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀՈՍՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ Լ. Վ. ԿԱՆՏՈՐՈՎԻՉԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ամրապնդվող նյութի համար առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիայի խնդրի լուծման համար առաջարկվում է Լ. Վ. Կանտորովիչի ձևափոխված եղանակը։ Տեղափոխությունները և լարումները ներկայացվում են ըստ կոորդինատային ֆունկցիաների վերլուծությունների տեսքով։ Տրվում են եղանակի ընդհանրացված ձևակերպումը և առանցքասիմետրիկ ձևով բեռնված հաստատուն հաստությամբ գլանի առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիայի խնդրի լուծման օրինակը։

MODIFICATION OF L. V. KANTOROVITCH METHOD IN THE THEORY OF PLASTIC FLOW

G. A. ZAGORODNAYA, V. M. FRIDMAN

S u m m a r y

The modified L. V. Kantorovitch method of solving the problem of plasto-elastic deformation for strain-hardening material is proposed. The shifts and stressed states are expressed as a series in coordinate functions. The generalized formulation of the method and the example of solving the problem of plasto-elastic deformation of axial-symmetrically loaded cylinder of constant thickness are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Теория получести элементов конструкций. «Наука», 1966, 637—640.
2. *Sanders I. L., Mc Comb H. G., Schlechte F. R.* A variational theorem for creep with applications to plates and columns. NACA, Rep. No. 1342, 1957.
3. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Видоизменение метода Бубнова—Галеркина—Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 1.