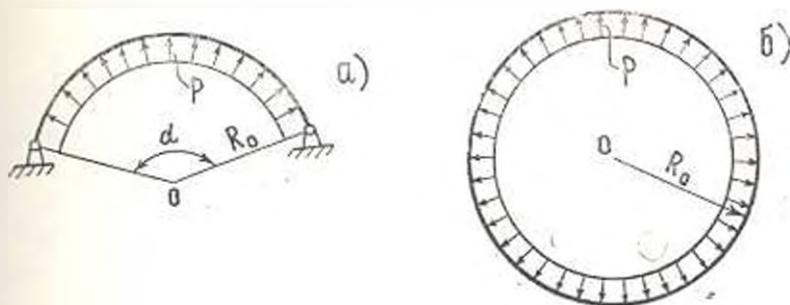


А. А. ЧАХОЯН

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

1. В некоторых практических случаях представляет интерес задача о колебаниях мягкой цилиндрической оболочки, подверженной внутреннему давлению, в частности, это относится к гибкому ограждению аппарата на воздушной подушке. Ниже рассматривается задача о свободных колебаниях такой оболочки, которая считается безмоментной и нерастяжимой, кроме того, будем пренебрегать весом оболочки. Поперечное сечение оболочки показано на фиг. 1а, причем невозмущенной формой сечения оболочки служит дуга окружности, определяемая радиусом  $R_0$  и центральным углом  $\alpha$ ; полученные ниже результаты относятся, в частности, к случаю  $\alpha = 2\pi$  (фиг. 1б). Величину давления  $p$  будем считать неизменной в процессе колебаний. Хотя в принципе можно было бы учесть изменение давления, возникающее в связи с изменением внутреннего объема оболочки, однако это привело бы к поправкам второго порядка малости. Считая задачу плоской, отнесем все рассуждения к оболочке, размер которой вдоль образующей равен единице.



Фиг. 1.

На фиг. 2 показан элемент оболочки  $AB$ , в состоянии равновесия, причем  $\varphi$  — полярная координата точки  $A$ ,  $N = pR_0$  — окружное нормальное усилие. В смещенном положении элемента ( $AB$ ) на элемент действуют усилия  $N_0 + N$  и  $N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \alpha} d$ , где  $N$  — динамическая добавка, возникающая при колебаниях оболочки. Обозначив через  $u$  и  $v$  радиальное и тангенциальное перемещения точки  $A$ , можно найти угол поворота касательной в этой точке

$$\eta = \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \quad (1.1)$$

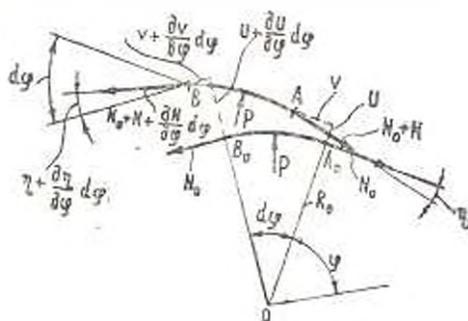
Кроме того, запишем условия нерастяжимости [1]

$$u = - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad (1.2)$$

Дифференциальные уравнения колебаний элемента оболочки в проекциях на направления  $x$  и  $y$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho R_0 d\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho R_0 d\varphi \cos \eta - (N_0 + N) \sin \eta - \\ &- \left( N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \varphi} d\varphi \right) \sin \left( d\varphi - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} d\varphi \right) \\ \rho R_0 d\varphi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= - \rho R_0 d\varphi \sin \eta - (N_0 - N) \cos \eta + \\ &+ \left( N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \varphi} d\varphi \right) \cos \left( d\varphi - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} d\varphi \right) \end{aligned}$$

где  $\rho$  — приведенная плотность (масса оболочки на единицу площади ее срединной поверхности).



Фиг. 2.

После упрощений имеем

$$\rho R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N + N_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \rho R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial \varphi} \quad (1.3)$$

Исключая отсюда  $N$ , с учетом (1.1) и (1.2) получаем дифференциальное уравнение относительно перемещения  $v$  в виде

$$\rho R_0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \varphi^2} \right) + p \left( \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

Принимая по методу Фурье

$$v(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\varphi) T_n(t) \quad (1.4)$$

получим

$$R_0 \left( V_n - \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} \right) \frac{d^2 T_n}{dt^2} + p \left( \frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} \right) T_n = 0$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + k_n T_n = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + 2\beta_n \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} - (2\beta_n - 1) V_n = 0 \quad (1.6)$$

где

$$2\beta_n = 1 + p \frac{R_0 k_n^2}{p}$$

$k_n$  — постоянная разделения, имеющая смысл собственной частоты. Решения дифференциальных уравнений (1.5) и (1.6) имеют вид

$$T_n = D_{1n} \sin k_n t + D_{2n} \cos k_n t \quad (1.7)$$

$$V_n = C_{1n} \sin z_{1n} \varphi + C_{2n} \cos z_{1n} \varphi + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n} \varphi + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n} \varphi \quad (1.8)$$

где

$$z_{1n} = \sqrt{V \frac{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1 + \beta_n}{\beta_n}}, \quad z_{2n} = \sqrt{V \frac{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1 - \beta_n}{\beta_n}} \quad (1.9)$$

Постоянные интегрирования  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$ ,  $C_{3n}$  и  $C_{4n}$  можно определить из граничных условий.

2. Для закрепленной неполной оболочки граничные условия  $v_n(0, t) = v_n(\alpha, t) = 0$  и  $u_n(0, t) = u_n(\alpha, t) = 0$  с учетом (1.2) и (1.4) приводят к однородной системе уравнений

$$C_{2n} + C_{4n} = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} + C_{3n} z_{2n} = 0$$

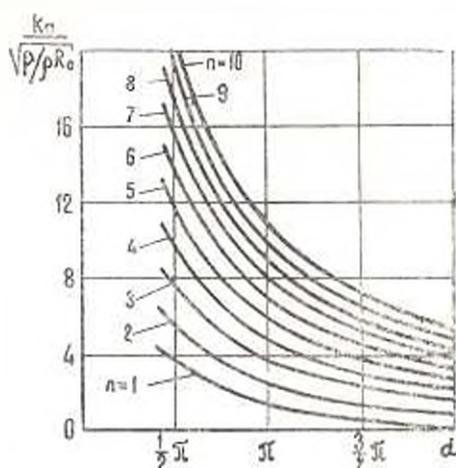
$$C_{1n} \sin z_{1n} \alpha + C_{2n} \cos z_{1n} \alpha + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n} \alpha + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n} \alpha = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} \cos z_{1n} \alpha - C_{2n} z_{1n} \sin z_{1n} \alpha + C_{3n} z_{2n} \operatorname{ch} z_{2n} \alpha + C_{4n} \operatorname{sh} z_{2n} \alpha = 0$$

Из условия существования нетривиального решения получим

$$2 z_{1n} z_{2n} (\cos z_{1n} \alpha \operatorname{ch} z_{2n} \alpha - 1) + (z_{1n}^2 - z_{2n}^2) \sin z_{1n} \alpha \operatorname{sh} z_{2n} \alpha = 0 \quad (2.1)$$

Выражая  $z_{1n}$  и  $z_{2n}$  через  $k_n$ , получаем трансцендентное уравнение относительно  $k_n$ . Результаты решения уравнения показаны на фиг. 3, где  $n$  — номер частоты (вычисления были выполнены на ЭЦВМ «Нанри-К»).



Фиг. 3.

3. Для свободной оболочки (фиг. 16) граничные условия переходят в условия периодичности

$$\begin{aligned} v(0, t) &= v(2\pi, t), & v(0, t) &= v(2\pi, t) \\ \gamma(0, t) &= \gamma(2\pi, t), & N(0, t) &= N(2\pi, t) \end{aligned}$$

Второе из этих условий, согласно (1.2), принимает вид  $\frac{\partial v}{\partial \varphi}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial \varphi}(2\pi, t)$ . Согласно (1.1), третье условие приводит к равенству  $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(0, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(2\pi, t)$ . Аналогично с помощью (1.3) можно записать четвертое условие в виде  $\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3}(0, t) = \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3}(2\pi, t)$ . Учитывая (1.4) и (1.8), получим две системы уравнений

$$C_{1n} \sin 2\pi z_{1n} + C_{2n} (\cos 2\pi z_{1n} - 1) = 0 \quad (3.1)$$

$$C_{1n} (\cos 2\pi z_{1n} - 1) - C_{2n} \sin 2\pi z_{1n} = 0$$

$$C_{3n} \operatorname{sh} 2\pi z_{2n} + C_{4n} (\operatorname{ch} 2\pi z_{2n} - 1) = 0 \quad (3.2)$$

$$C_{3n} (\operatorname{ch} 2\pi z_{2n} - 1) + C_{4n} \operatorname{sh} 2\pi z_{2n} = 0$$

Система (3.2) при  $k_n \neq 0$  имеет только тривиальное решение  $C_{3n} = C_{4n} = 0$ , а из условия существования нетривиального решения системы (3.1)

$$\begin{vmatrix} \sin 2\pi z_{1n} & \cos 2\pi z_{1n} - 1 \\ \cos 2\pi z_{1n} - 1 & -\sin 2\pi z_{1n} \end{vmatrix} = 0$$

получаем уравнение

$$\cos 2z_{1n} = 1 \quad (3.3)$$

Следовательно,  $z_{1n} = n$ , где  $n$  — целое положительное число. Для собственных частот свободных колебаний получим

$$k_n = n \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{p}{2R_0}} \quad (3.4)$$

Когда  $n = 1$ , получается  $k_1 = 0$ . В этом случае имеем  $u = -C_{11}D_{21} \cos \varphi + C_{11}D_{01} \sin \varphi$ ,  $v = C_{21}D_{01} \sin \varphi + C_{21}D_{21} \cos \varphi$  и оболочка движется как твердое тело. Для больших номеров

$$k_n \approx n \sqrt{\frac{p}{2R_0}} \quad (3.5)$$

4. Таким образом, вопрос о собственных частотах решается с помощью трансцендентного уравнения (2.1) (см. также график на фиг. 3) или формулами (3.4). Во всех случаях собственные частоты пропорциональны квадрату корню из величины внутреннего давления  $p$ .

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 29 III 1976

Ա. Ա. ՉԱԿՈՅԱՆ

ԿԵՐԲԻՆ, ՀԵՇՄԱՆ ԱՋԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ԿՆԹԱԿԱ ԱՆԻՈՒՄԵՆՏ  
ԳԱՆԱՆԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՀԱՃԱԿԱՆԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ու մ փ ա փ ու լ ու մ

Բերվում է ներքին ճնշման տակ դոմեթոլ անկշրտ փափուկ դրանային թաղանթի ադամ տատանումների վերաբերյալ խնդրի լուծումը: Թաղանթը ենթադրվում է անձղելի: Խնդրի հարթ դրվածքով ստացվել են թաղանթի տատանումների սեփական հաճախականությունների որոշման համար արտահայտություններ:

## NATURAL VIBRATION OF AN IMPONDERABLE CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO INNER PRESSURE

A. A. CHAKHOYAN

S u m m a r y

The solution to a problem of natural vibration of an imponderable soft cylindrical shell subjected to inner pressure is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.