

Ր. Մ. ԿԻՐԱԿՕՅԱՆ

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НАИМЕНЬШЕГО ОБЪЕМА ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Задачи проектирования трехслойных конструкций наименьшего объема в рамках теории идеально-пластического материала при кусочно-линейных поверхностях текучести рассматривались во многих работах (напр., [1]—[5] и др.).

Проектированию однослойных конструкций наименьшего объема на основе теории идеальной пластичности посвящено сравнительно мало исследований ([6]—[8] и др.).

Наиболее полное представление о современном состоянии оптимального проектирования тонкостенных конструкций можно составить с помощью работ [9]—[11].

В настоящей статье рассматривается осесимметричная задача проектирования круглой однослойной пластинки наименьшего объема в рамках деформационной теории произвольно упрочняющегося материала при заданной изгибающей нагрузке. Нахождение оптимизирующей толщины пластинки сводится к решению краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Следуя [13], путем введения неизвестной постоянной и специальных обозначений, решение отмеченной краевой задачи сводится к решению задачи Коши для линейной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Показывается, что для заземленных по контуру пластинок рассматриваемая задача не имеет решения, то есть не существует такого совместного поля перемещений, которое при данном уровне упрочнения одновременно удовлетворяло бы уравнению равновесия и достаточному условию минимальности объема пластинки [3]. Задача же шарнирно опертых пластинок имеет решение, причем не только при свободном опирании, но и при наличии опорных моментов, приложенных в положительном направлении.

В качестве примера рассмотрен случай шарнирно опертой пластинки, несущей равномерно распределенную поперечную нагрузку и положительные равномерно распределенные по контуру изгибающие моменты. Решение получается для произвольно упрочняющегося материала, обсуждение же вопроса эквивалента материала производится при линейном упрочнении.

1. Известно [3], что постоянство работы напряжений на деформации единичного объема является достаточным условием для обеспечения наименьшего объема пластинки. Это условие в случае осесимметричного поперечного изгиба пластинки можно записать в виде

$$\frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{h} = \text{const} > 0 \quad (1.1)$$

где  $h$ —толщина,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ —изгибающие моменты и соответствующие кривизны.

В рамках деформационной теории произвольно упрочняющегося материала имеем [13]

$$M_1 = -\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2}\right) J(P_1), \quad M_2 = -\left(\kappa_2 + \frac{\kappa_1}{2}\right) J(P_1) \quad (1.2)$$

где

$$J(P_1) = h^3 F(h\sqrt{P_1}), \quad F(h\sqrt{P_1}) = \frac{\sqrt{3}}{(h\sqrt{P_1})^2} \int_0^{\frac{h\sqrt{P_1}}{\sqrt{3}}} \varepsilon_i \varepsilon_i d\varepsilon_i \quad (1.3)$$

Здесь  $\varepsilon_i$  и  $\rho_i$ —интенсивности деформаций сдвигов и касательных напряжений,  $P_1$ —неотрицательная квадратичная форма

$$P_1 = \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 \quad (1.4)$$

С учетом (1.2)—(1.4) условию (1.1) можно придать вид

$$(h\sqrt{P_1})^2 F(h\sqrt{P_1}) = \text{const} > 0 \quad (1.5)$$

Имея в виду неотрицательность  $F$ , условие (1.5) можно заменить идентичным, но более простым условием

$$h\sqrt{P_1} = \sqrt{3} \varepsilon_i \Big|_{z=\pm h/2} = \sqrt{3} \varepsilon_1 = \text{const} > 0 \quad (1.6)$$

Кроме простоты, условие (1.6) имеет еще одно важное преимущество по сравнению с условием (1.5). Оно заключается в том, что условие (1.6) не зависит от физико-механических свойств материала, в силу чего оно позволяет получить решение задачи в общем случае, при произвольном упрочнении. Замена условия (1.5) условием постоянства интенсивности деформаций сдвигов крайних плоскостей пластинки  $\varepsilon_i/z = \pm h/2 = \varepsilon_1$  представляется целесообразной, так как при упрочнении материала значение интенсивности сдвигов является прочностной характеристикой пластинки и исходным данным для определения допустимого значения  $h\sqrt{P_1}$ .

Таким образом, для обеспечения наименьшего объема пластинки достаточно, чтобы интенсивность деформаций сдвигов  $\varepsilon_i$  на крайних плоскостях пластинки  $z = \pm h/2$  приняла постоянное значение  $\varepsilon_1$ .

С учетом этого обстоятельства, задаче проектирования пластинки наименьшего объема можно придать следующую формулировку: для данной изгибающей нагрузки и постоянного значения  $\varepsilon_1$  определить ту толщину  $h$ , при которой удовлетворяются уравнение равновесия и соответствующие краевые условия пластинки.

Внеся значения изгибающих моментов (1.2) в дифференциальное уравнение равновесия пластинки

$$\frac{dM_1}{dr} + \frac{M_1 - M_2}{r} = -\frac{1}{r} \int_0^r q r dr \quad (1.7)$$

и имея в виду, что  $F$  постоянна, получим

$$\frac{d}{dr} \left[ h^3 \left( x_1 + \frac{x_2}{2} \right) \right] + \frac{h^3}{2r} (x_1 - x_2) - \frac{1}{r} \int_0^r q r dr = 0 \quad (1.8)$$

С помощью (1.6), исключив толщину  $h$  из (1.8) и учитывая, что в осесимметричном случае изгиба круглых пластинок

$$x_1 = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad x_2 = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad x_3 = \frac{d}{dr} (r x_2) = x_2 + r \frac{dx_2}{dr} \quad (1.9)$$

где  $w(r)$  — прогиб пластинки, находим

$$\begin{aligned} & 3 \left[ 9x_2 \frac{dx_2}{dr} + 5r \left( \frac{dx_2}{dr} \right)^2 + 3rx_2 \frac{d^2 x_2}{dr^2} + 2r^2 \frac{dx_2}{dr} \frac{d^2 x_2}{dr^2} \right] \left( 3x_2 + 2r \frac{dx_2}{dr} \right) - \\ & - 4 \left( 3 \frac{dx_2}{dr} + r \frac{d^2 x_2}{dr^2} \right) \left[ 3x_2^2 + 3rx_2 \frac{dx_2}{dr} + r^2 \left( \frac{dx_2}{dr} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{4 \left[ 3x_2^2 + 3rx_2 \frac{dx_2}{dr} + r^2 \left( \frac{dx_2}{dr} \right)^2 \right]^{5/2}}{3 \sqrt{3} F^2 V r} \int_0^r q r dr = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Следуя [13], положим

$$r = C e^{-\varphi}, \quad \frac{h_0}{2z_2} x_2 = -x, \quad \frac{dx}{d\varphi} = v \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_0$  — предел упругих деформаций материала,  $C$  — неизвестная постоянная,  $h_0$  — толщина пластинки в ее центре  $r=0$  ( $\rho=\infty$ ). С учетом (1.11), вместо нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (1.10), получим следующую систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{d\varphi} = v \quad (1.12)$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = v \frac{30x^2 - 39xv + 10v^2 + (\bar{P}_x)^{5/2} \frac{q}{v} e^{-2\varphi}}{15x^2 - 24xv + 8v^2} = \varphi(x, v)$$

где

$$\bar{q} = \frac{8\varepsilon_0^2 C^2 q_{cr} e^{2\varphi}}{3 \sqrt{3} F h_0^2 z_2} \int_0^r \frac{q}{q_{cr}} e^{-2\varphi} d2\varphi, \quad \bar{P}_x = 3x^2 - 3xv + v^2 \quad (1.13)$$

$q_{cp}$  — среднее значение распределенной нагрузки.

В центре пластинки ( $r=0$ ,  $\rho=\infty$ ) кривизны  $\chi_1$  и  $\chi_2$  отрицательны и равны между собой, вследствие чего из (1.9) следует, что  $v=0$  и относительная кривизна  $\chi = \chi_0 = \frac{\sigma_1}{2t_1}$  положительна.

Таким образом, представление (1.12) позволяет краевую задачу формально свести к задаче Коши с начальными условиями

$$\rho = \infty, \quad \chi = \chi_0, \quad v = 0 \quad (1.14)$$

Как нетрудно заметить, численное интегрирование уравнений (1.12) при начальных условиях (1.14), заданных для бесконечно удаленной точки, невозможно реализовать. С целью нахождения начальных условий при конечном  $\rho$  решение (1.12) в окрестности  $\rho=\infty$  представим в виде

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 + b_1 e^{-2\rho} + \dots \\ v &= b_2 e^{-2\rho} + \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Нагрузку пластинки представим в виде

$$q(r) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \quad (1.16)$$

где  $a$  — радиус пластинки.

С учетом (1.11), (1.13) и (1.16) имеем

$$\bar{q}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{q}_n e^{-2n\rho}, \quad \bar{q}_n = \frac{16 \sqrt{3} q_n a^2}{3 | 3 (2-n) t H_{n-1}^{2,2} } \frac{q_0}{q_{cp}} \left(\frac{C}{a}\right)^{n+1} \quad (1.17)$$

Подставляя (1.15) в (1.12) и приравнявая коэффициенты при  $e^{-2\rho}$  для  $v_1$  и  $b_1$  с учетом (1.17) получим

$$b_1 = \frac{31 \sqrt{3}}{40} \sqrt{3} \bar{q}_0, \quad b_2 = -2b_1 \quad (1.18)$$

где

$$\bar{q}_0 = \frac{C^2}{3 | 3 t H_{-1}^{2,2} } q_0 \quad (1.19)$$

С учетом (1.18) и (1.15) для больших  $\rho$  имеем

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 + \frac{31 \sqrt{3}}{40} \sqrt{3} \bar{q}_0 e^{-2\rho} + \dots \\ v &= -\frac{31 \sqrt{3}}{20} \sqrt{3} \bar{q}_0 e^{-2\rho} + \dots \end{aligned} \quad (1.20)$$

Теперь для некоторого достаточно большого  $\rho_1$  из (1.20) можно определить  $\chi_1$  и  $v_1$ .

Перепишем уравнения (1.12) в конечных разностях

$$\Delta z = v \Delta r, \quad \Delta v = z(r, v) \Delta r. \quad (1.21)$$

В качестве начальных условий имеем

$$z = z_1, \quad x = x_1, \quad v = v_1. \quad (1.22)$$

Задаваясь некоторым значением безразмерного  $\bar{q}_0$  и отношения  $\frac{C}{a}$ , с помощью (1.21) и (1.22) вычисляем последовательные значения  $x$  и  $v$  до тех пор, пока не удовлетворится граничное условие пластинки.

В случае защемления это условие имеет вид

$$x = 0, \quad \left( \frac{dw}{dr} \Big|_{r=r_0} = -\frac{2\varepsilon_0}{h_0} r x \Big|_{r=r_0} = 0 \right) \quad (1.23)$$

В случае шарнирного опирания

$$\frac{3x - 2v}{(P_1)^{3/2}} - \bar{M}_1 = 0, \quad \left( M_1 \Big|_{r=r_0} = \frac{q_0}{q_0} C^2 \bar{M}_1 \Big|_{r=r_0} = 0 \right) \quad (1.24)$$

При шарнирном опирании, когда по шарнирно-опертому краю пластинки приложены постоянные равномерно распределенные изгибающие моменты с интенсивностью  $M_1^0$ , граничное условие будет

$$\frac{3x - 2v}{(P_1)^{3/2}} = \bar{M}_1^0 \quad (1.25)$$

Пусть граничное условие удовлетворяется при  $r = r_0$ . Тогда, согласно (1.11),

$$\frac{C}{a} = e^{\bar{q}_0} \quad (1.26)$$

Значение  $e^{\bar{q}_0}$ , вообще говоря, не будет совпадать с первоначальным значением  $C/a$ . Этого можно добиться, решая трансцендентное уравнение

$$\frac{C}{a} = e^{\bar{q}_0 \left( \frac{C}{a} \right)} \quad (1.27)$$

для чего следует повторить решение для разных первоначальных значений  $C/a$ .

Заметим, что этот вопрос в случае равномерной нагрузки решается очень просто. Тогда не нужно задаваться первоначальным значением неизвестного отношения  $C/a$ , оно определяется непосредственно из (1.26), без решения трансцендентного уравнения.

После определения неизвестной постоянной  $C$  из (1.19) для толщины пластинки в ее центре находим

$$h_0 = \frac{C}{z_0} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{3 | 3f\varepsilon_0 q_0}} \quad (1.28)$$

Толщина же произвольного сечения пластинки с помощью (1.6) определится формулой

$$h(\rho) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\bar{P}_1}} x_0/h_0 \quad (1.29)$$

Имея значения толщины произвольного сечения, для объема пластинки  $V_{\text{сер}}$  получим

$$V_{\text{сер}} = 2\sqrt{3}\pi \sqrt{\frac{2q_0}{3\sqrt{3}F\varepsilon_1 q_0}} C^3 \int_{\rho_a}^{\infty} e^{-2\rho} (\bar{P}_1)^{-1/2} d\rho \quad (1.30)$$

Прогобы пластинки вычисляются по формуле [14]

$$w(\rho) = \frac{2\varepsilon_1}{h_0} C^2 \int_{\rho_a}^{\infty} \rho e^{-2\rho} d\rho \quad (\rho_a \leq \rho < \infty) \quad (1.31)$$

где для  $\rho$  при больших  $\rho$  можно использовать асимптотическое разложение (1.20).

В нижеприведенной таблице приведены результаты вычисления значений некоторых расчетных величин пластинки при постоянной нагрузке  $q_0$  для трех случаев:  $z_1 = 0$ , ( $z_0 = 0.5$ ),  $z_1 = \frac{h}{8}$ , ( $\nu_0 = \frac{2}{3}$ ) и  $z_1 = \frac{h}{4}$ , ( $\nu_0 = 1$ ), где  $z_1$  — толщина зоны пластических деформаций\*.

Следует отметить, что эта таблица носит относительный характер и представляет собой общее решение задачи при произвольном упрочнении материала. В каждом конкретном случае для данного закона упрочнения и заданного значения  $h$   $\bar{P}_1 = \sqrt{3} \tau_1$ , с помощью этой таблицы можно определить все необходимые величины. Это делается следующим порядком. С самого начала определяется неизвестная постоянная  $C$ . Затем с помощью (1.3) и (1.28) вычисляется значение толщины пластинки в ее центре  $h_0$ . Далее, используя формулы пересчета

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{2\varepsilon_1}{h_0} (x - \nu), & z_2 &= -\frac{2\varepsilon_1}{h_0} x, & h &= \sqrt{3} x_0 h_0 \bar{h} \\ M_1 &= \frac{q_0}{q_0} C^2 \bar{M}_1, & M_2 &= \frac{q_0}{q_0} C^2 \bar{M}_2, & w &= \frac{2\varepsilon_1}{h_0} C^2 \bar{w} \end{aligned} \quad (1.32)$$

определяются кривизны  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ , толщина  $h$ , изгибающие моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и прогиб  $w$  произвольного сечения пластинки  $\rho$  (или  $\frac{r}{a} = e^{2\sigma - \rho}$ ).

Как видно из третьих и четвертых столбцов табл. 1, при удалении от центра пластинки  $\rho = \infty$  значения  $\chi$ , начиная от  $\chi_0 > 0$ , монотонно возраст-

\* Вычисления проводились на машине «Напри-2». Машинное время—12 мин. В таблице приведены результаты вычислений только для некоторых  $\rho$ .

Таблица 1

$\beta$	$\nu_0=0.5, \quad \rho_0=0.0674, \quad \frac{C}{a}=1.0697, \quad \bar{q}_0=10$				$\nu_0=1, \quad \rho_0=0.045, \quad \frac{C}{a}=2.1598, \quad \bar{q}_0=10$										
	$\frac{r}{a}$	$\kappa$	$-\nu$	$\bar{h}$	$\bar{M}_1$	$\bar{M}_2$	$\bar{m}$	$\rho$	$\frac{r}{a}$	$\kappa$	$-\nu$	$\bar{h}$	$\bar{M}_1$	$\bar{M}_2$	$\bar{m}$
3	0	0.5	0	1.154	2.309	2.309	0.275	3.0	0	1.003	0.006	0.578	0.571	0.571	0.133
2.4	0.057	0.501	0.003	1.149	2.287	2.283	0.274	2.6	0.160	1.007	0.015	0.569	0.562	0.560	0.131
2.0	0.145	0.503	0.006	1.141	2.259	2.250	0.271	2.0	0.292	1.025	0.051	0.549	0.527	0.519	0.125
1.7	0.195	0.506	0.011	1.129	2.218	2.202	0.267	1.8	0.357	1.038	0.081	0.535	0.503	0.490	0.120
1.4	0.264	0.510	0.021	1.109	2.143	2.114	0.260	1.6	0.436	1.058	0.129	0.514	0.466	0.448	0.113
1.0	0.394	0.524	0.052	1.050	1.939	1.879	0.241	1.4	0.533	1.092	0.215	0.481	0.412	0.388	0.102
0.8	0.481	0.537	0.084	0.996	1.759	1.675	0.223	1.3	0.589	1.116	0.285	0.458	0.376	0.348	0.095
0.6	0.587	0.559	0.145	0.912	1.491	1.381	0.196	1.2	0.651	1.149	0.388	0.428	0.332	0.301	0.085
0.4	0.717	0.600	0.283	0.774	1.096	0.965	0.153	1.1	0.719	1.196	0.552	0.390	0.278	0.245	0.073
0.2	0.876	0.693	0.778	0.522	0.518	0.407	0.081	1.0	0.795	1.264	0.842	0.339	0.214	0.181	0.058
0.1	0.968	0.824	2.456	0.266	0.139	0.093	0.024	0.9	0.878	1.375	1.452	0.267	0.136	0.107	0.038
0.08	0.987	0.890	4.645	0.166	0.055	0.033	0.010	0.8	0.970	1.617	4.273	0.146	0.042	0.028	0.011
0.068	0.999	0.992	25.964	0.036	0.003	0.001	0.001	0.79	0.980	1.665	5.274	0.127	0.031	0.021	0.007
0.0674	1	1.021	258.1	0.004	0	0	0	0.77	1.0	1.812	11.075	0.072	0.010	0.006	0

тают, а значения  $U$ , наоборот, убывают и при некоторых умеренных  $\kappa$  стремятся к минус бесконечности. Это означает, что нигде невозможно удовлетворить условие жесткого защемления  $\kappa=0$ .

Таким образом, для защемленной однослойной пластинки невозможно найти такое совместное поле перемещений, которое при данном постоянном уровне упрочнения материала на крайних плоскостях  $z = \pm h/2$  удовлетворяло бы уравнению равновесия. Следовательно, достаточное условие минимума объема (1.6) для защемленной пластинки является нереализуемым ограничением, тем самым оправдывается известное сомнение, высказанное в работе [3], относительно существования конструкций такого рода вообще.

Что касается случая свободного шарнирного опирания, то, как нетрудно заметить из шестых столбцов таблицы, поставленная задача имеет решение, так как можно удовлетворить условию равенства нулю изгибающего момента  $M_1 = \frac{q_0}{4\sigma} C M_1$ .

Здесь уместно отметить, что относительный изгибающий момент  $M_1 = (3\kappa - 2\nu)(3\kappa^2 - 3\kappa\nu + \nu^2)^{-3/2}$  монотонно убывает и стремится к нулю за счет того, что знаменатель  $(3\kappa^2 - 3\kappa\nu + \nu^2)^{3/2}$  возрастает гораздо быстрее, чем его числитель  $3\kappa - 2\nu$ . При этом любопытна следующая деталь, что  $U$  от умеренных значений стремится к минус бесконечности настолько быстро, что длина участка больших кривизн  $\kappa$ , для которых не допустима геометрически линейная постановка, составляет всего лишь 0,11 часть диаметра пластинки. Поэтому полученное решение шарнирно-опертой пластинки можно считать негодным лишь в очень узкой полосе вблизи у опорной кромки, где обычно не пользуются классическим решением и, учитывая передеформирующие условия и некоторые конструктивные соображения, утолщают пластинку. Имея в виду то обстоятельство, что в силу наличия неизвестной постоянной  $C$  краем пластинки может служить любое  $\rho$ , легко заключить, что можно удовлетворить также условию опирания (1.25), когда на краю пластинки приложены изгибающие моменты  $M_1^0$ . Очевидно, что этот случай свободен от отмеченного выше недостатка, связанного с появлением больших значений кривизны  $\kappa$ , вблизи у опорной кромки пластинки.

## 2. В случае линейного упрочнения

$$\varepsilon_i = E\varepsilon_i \left[ 1 - \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_i} \right) \right] \quad (2.1)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\lambda$  — параметр упрочнения материала, для постоянной  $F$  из (1.3) получим

$$F = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \left[ 1 - \lambda \left( 1 - \frac{3\varepsilon_s}{2\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_s^3}{2\varepsilon_1^3} \right) \right] \quad (2.2)$$

Через  $\nu$  обозначен коэффициент Пуассона.

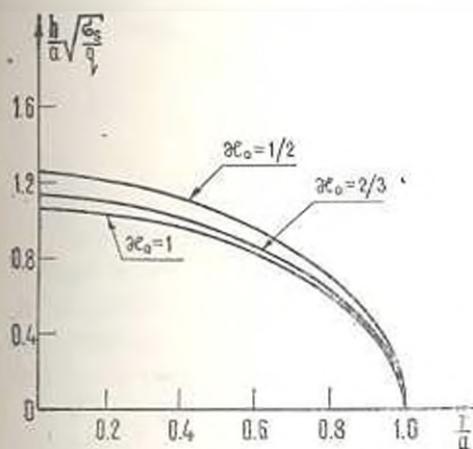
Ограничиваясь случаем равномерно распределенной нагрузки  $q_0$ , с учетом (1.17) имеем

$$\frac{1}{q_0} = \frac{q_0 C^2}{3 \sqrt{3} F h_0^2 \kappa_0^2} \quad (2.3)$$

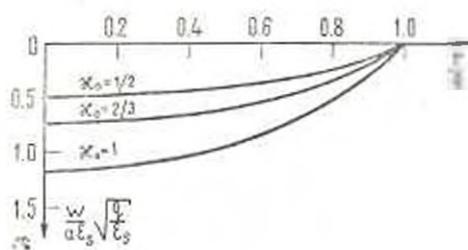
Рассмотрим следующий численный пример:

$$\frac{q}{E} = 10^{-5}, \quad \lambda = 0.95, \quad \nu = 0.5 \quad (2.4)$$

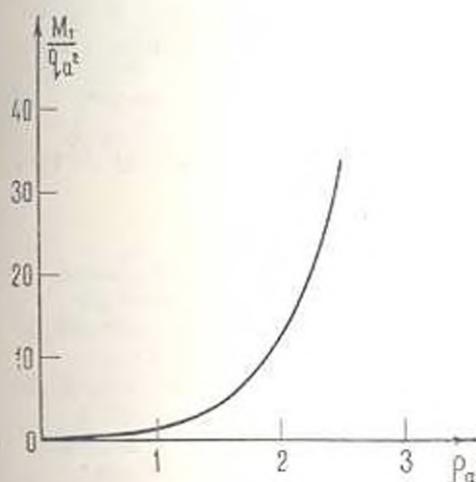
На основании таблицы и формул пересчета (1.32) на фиг. 1 и 2 построены графики изменения толщины и прогиба пластинки для трех случаев ( $\alpha_0 = 0.5, 2/3$  и 1).



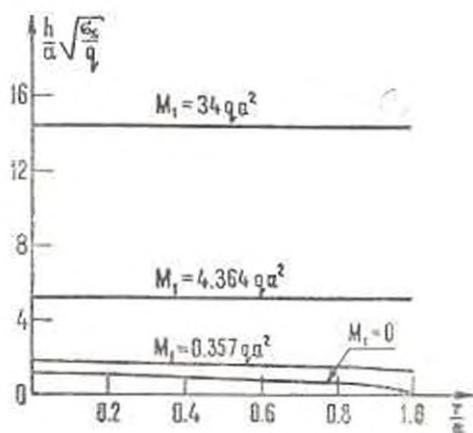
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



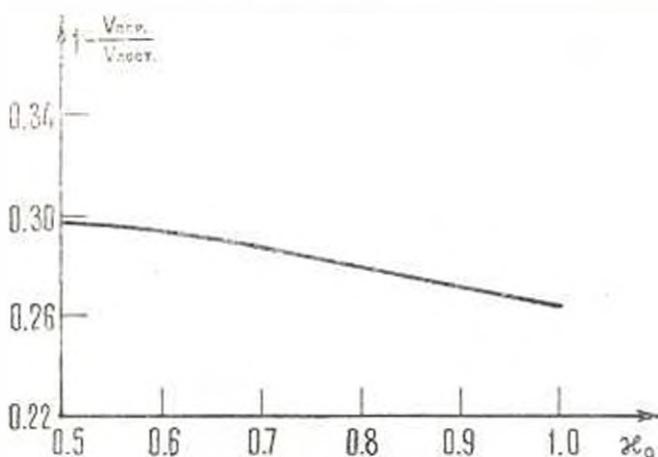
Фиг. 4.

На фиг. 3 построен график зависимости между опорным моментом и соответствующим значением  $\rho_a$ , принимаемым в качестве координаты края пластинки.

С увеличением значения опорного момента при неизменной поперечной нагрузке оптимизирующая толщина стремится к постоянной величине. Этот очевидный факт при  $\alpha_0 = 0.5$  проиллюстрирован на фиг. 4.

Как показывают вычисления, при одинаковой относительной глубине проникания пластической зоны  $z_0/h = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \nu_0$  оптимальная пластинка всегда в центре толще, чем пластинка постоянной толщины, то есть

$$h_{opt}^{max} > h_{const} \quad (2.5)$$



Фиг. 5.

На фиг. 5 показано изменение экономии в объеме оптимальной пластинки  $\mu = 1 - V_{opt}/V_{const}$  в зависимости от  $\nu_0$ . Как и следовало ожидать, при возрастании  $z_0$  (то есть  $z_0/h$ ) величина экономии материала уменьшается.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Получено 22 III 1976

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԱՌԱՉԳԱՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՍՇԻՐԱՆԵՑ ԳՈՐԻՅ  
ԱՐԽԵՆԱՓՈՒՐ ՄԱՎԵԼԻ ԿՈՒ ՍԱԼԻ ՄԻ ԽՆԳԻՆ ՄՈՍԿՆ

Ա ռ փ ո փ ո ս լ

Տրված ծոց բեռի համար կամայական ամրացնողիչ նյութի դեֆորմացիոն տեսության շրջանակներում դիտարկվում է ամենափոքր ծավալի կտրուկի նախագծման խնդիրը: Օպտիմալ հաստության սրտչումբ բերվում է նրկրող կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար և գրային խնդրի լուծմանը: Անհայտ հաստատունի ներմուծման և հատուկ նշանակումների միջոցով նշված կրային խնդրի լուծումը բերվում է առաջին կարգի Լրկու գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմեր համար կոչու խնդրի լուծմանը:

Յույց է տրվում, որ կորագծով ամրակցված սալի համար դիտարկվող խնդիրը լուծում չունի, իսկ հողակապորեն հենված սալի խնդիրը լուծում ունի, բնդ որում ոչ միայն ազատ հենման, այլև դրական ուղղությամբ կիրառված հենարանային ծողղ մոմենտների առկայությամբ դեպքում:

Դիտարկվում է թվային օրինակ:

## ON ONE PROBLEM FOR A CIRCULAR PLATE OF THE SMALLEST VOLUME BEYOND ELASTICITY OF MATERIAL

R. M. KIRAKOSIAN

### S u m m a r y

The problem of designing a one-layer circular plate of the smallest volume under a specified bending load for arbitrary hardened material is considered in terms of the deformation theory. The determining of the optimum thickness is reduced to the solution of a boundary problem for a non-linear differential equation of the second order.

By introducing an unknown constant and special designations, the solution of the above problem is reduced to that of the Cauchy problem for a linear system of two differential equations of the first order.

For plates fastened along the contour the problem in question is shown to have no solution.

The problem of hinge-supported plates may be solved not only for free-support conditions, but for supporting moments, applied in positive direction, as well.

A numerical example is presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Друккер Д., Шилл Р. Границы для проектирования конструкций минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
2. Фрайбергер В. О проектировании цилиндрических слоистых оболочек минимального веса. Сб. Механика, 1958, 3 (49).
3. Шилл Р. Методы оптимального проектирования конструкций. Сб. Механика, 1962, 2 (72).
4. Шамисв Ф. Г. О проектировании оболочек минимального веса. Изв. АН АзССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1963, № 3.
5. Шилл Р. Методы оптимального проектирования при действии ряда независимых систем нагрузок. Сб. Механика, 1964, 2 (84).
6. Прагер В. Проектирование пластинок наименьшего веса. Сб. Механика, 1956, 6 (40).
7. Гопкинс и Прагер. Пределы экономии материала в пластинках. Сб. Механика, 1956, 6 (40).
8. Деятарь А. С., Варнак М. Ш. Оптимизационная задача для пластинки переменной толщины. Изв. высш. учебн. завед. «Стр-во и архит.», 1974, № 9.
9. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Теория оптимального проектирования в строительной механике теории упругости и пластичности. Сб. «Итоги науки», Упругость и пластичность. ВИНТИ АН СССР, 1966.

10. Чжи С. Я., Пратер В. Последние достижения в оптимальном проектировании конструкций. Сб. Механика, 1969, 6 (118).
11. Чирас А. А., Боржаускас Э., Каржанскас Р. П. А. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Стройиздат, 1974.
12. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластики и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
13. Ильющин А. А. Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
14. Киракосян Р. М. Упруго-пластический осесимметричный изгиб круглой защемленной пластинки под действием конусообразно распределенной переменной нагрузки. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, т. XXV, № 1.