С. С. ШАПИНЯН

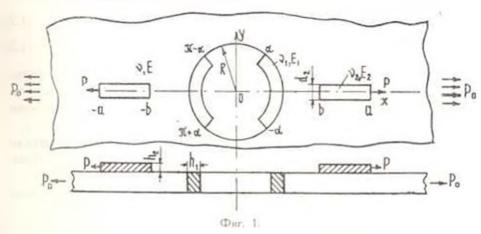
О ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ. УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

В настоящей работе излагается решение двух плоских контактных излач для пластины с кругоным отверстием, когда последняя усилена системов тонких упратих назлачае. На в посе изметных предположений [1—3] решение указанных задач сведено к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений ври определенных граничных условиях. С помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева для поставленых задач получено эффективное решение, содержащее в явном виде характерные особенности контактных напряжений вблизи концов прикрепленных накладок.

1. Пусть упругий лист в виде тонкой бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса R=1, чт. не нарушает общности, усилен системами упругих накладок (стрингеров) таким образом, как ато показано на фиг. 1 и 2. Пусть, далее, этот лист деформируется силами P, действующими соответствению на концах упругих прямолинейных накладок, расположенных симметрично относительно начала координат, и подвержен на бесконечности одностороннему растяжению в направлении оси стрингеров силами интенсивности P

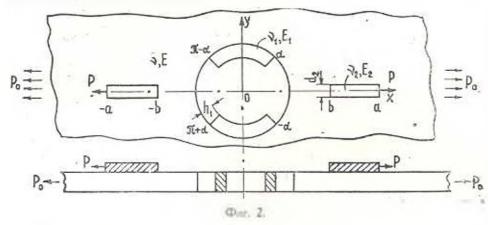
Цель работы заключается в определении закона распределения контактных напряжений под накладками.

В дальнейшем задачу, показанную на фиг. 1, кратко будем именовать первой, а на фиг. 2 — второй контактной задачен соответственно.



Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к криволицейным накладкам, обозначать индексом 1, к прямолицейным

накладкам — индексом 2 и, наконец, к основанию, то есть к иластине с круговым отверстием, без индекса.



Не останавливаясь здесь на подробностях, сразу привелем, следуя работам [3—10], определяющие уравнения, из которых будут определяться неизвестные контактные напряжения, действующие под упругими накладками. Эти уравнения записываются в виде системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\int_{b}^{a} \left[\frac{1}{t - x} + K_{11}(t, x) \right] \varphi'(t) dt + \int_{c}^{a} K_{12}(x, \theta_{0}) \varphi'(\theta_{0}) d\theta_{0} = i * \varphi(x) + P_{0} f_{1}(x)$$

$$\int_{b}^{a} K_{21}(t, \theta) \varphi'(t) dt + \int_{c}^{a} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0} - \theta}{2} + K_{22}(\theta, \theta_{0}) \right] \varphi'(\theta_{0}) d\theta_{0} = i * \varphi(\theta) + P_{0} f_{2}(\theta)$$

при граничных условиях

$$\varphi(b) = 0, \quad \varphi(a) = P \tag{1.2}$$

$$\phi(\theta) = 0$$
 на концах линии L (1.3)

Отметим, что при выводе системы уравнений (1.1) использованы свойства периодичности и симметричности касательных контактных напряжений. При этом, интегралы от ядер Гильберта и Коши следует приимать в смысле главного значения по Коши.

Для первой контактной задачи лимия интегрирования L представляет собой интервал — $u<\theta<\alpha<\pi/2$, а для второй задачи — интервал $0<\alpha<0<\pi-\alpha$.

Здесь параметры λ^* , λ^{**} зависят от геометрических и упругих характеристик стрингеров и пластины и имеют значения

$$V = \frac{2\pi (1+x) \mu (\mu_2 + i_1)}{x d_2 h_2 \mu_2 (2\mu_2 - 3i_2)} \qquad V = \frac{4\pi \mu}{(x-1) h_1 (2\mu_1 + i_1)}$$

где λ , μ — параметры Λ аме, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$. (ν —коэффициент Пуассона), d_z и h_z — соответственно ширана и высота прямолинейных накладок, h_z — ширина криволинейных накладок. Далее

Нетрудна видеть, что ядра K_{ij} (i, j=1, 2) в соответствующих обхастях непрерывны и имеют там же квадратично суммируемые частные принаводные первого порядка.

Контактные напряжения под накладками обеих задач даются формулами

$$q(x) = \phi'(x), (b < x < a), = (0) = \frac{2 \cdot d_0}{(x+1)^2} \varphi'(0), \quad 0 \in L$$

Здесь q(x) — контактное напряжение, действующее под прямолинейными накладками, $\tau(\theta)$ — под криволинейными накладками.

Таким образом, решение поставленных контактных задач сведено в решению системы уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2) и (1.3).

2. Займемся сначала решением первой контактной задачи. Решение (1.1) для этого случая представим в виде

$$\varphi'(x) = \left| 1 - \left(\frac{2x - a - b}{a - b} \right)^2 \right|^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} y_m T_m \left(\frac{2x - a - b}{a - b} \right), \quad b < x < a$$

$$\psi'(b) = \frac{\frac{b}{2}}{1 \cdot 2 \cos b - 2 \cos a} \sum_{m=1}^{\infty} z_{m-1} \left(\log \frac{b}{2} \cos \frac{a}{2} \right) \qquad a < b < a$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (n=0,1,2,...)— многочлены Чебышева перного рода, а $y_n(m=0,1,2,...)$ и $z_{2m-1}(m=1,2,...)$ неизвестные коэффициенты, которые подлежат определению. Обычным снособом [4—8] определение неизвестных коэффициентов $y_n(m=1,2,...)$ и $z_{2m-1}(m=1,2,...)$ можно свести к решению бесконечных систем линейных уравнений. Не останавливаясь на подробностях, сразу приведем окончательный вид этой системы

$$y_{n} + \sum_{m=1}^{\infty} y_{m} (A_{mn} + B_{mn}) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} z_{2m-1} - a_{n}, \quad n = 1, 2, ...$$

$$z_{2n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} z_{2m-1} (E_{m-1} - E_{m}) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} y_{m} = 1, 2, ...$$

где введены обозначения

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^{2} (a - b)} \int_{b}^{a} U_{n-1} \left(\frac{2x - a - b}{a - b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x - a - b}{a - b} \right)^{2}} dx \times \\ \times \int_{a}^{a} K_{11}(t, x) \left[1 - \left(\frac{2t - a - b}{a - b} \right)^{2} \right]^{-1/2} T_{m} \left(\frac{2t - a - b}{a - b} \right) dt \\ m, n = 1, 2, ...$$

$$\begin{split} B_{mn} &= \frac{2i^3}{\pi^2 m_b^2} \int_b^a U_{m-1} \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) U_{n-1} \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) \times \\ &\times \left[1 - \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right)^2 \right] dx, \quad m, \, n=1, \, 2, \dots \\ C_{mn} &= \frac{4}{\pi^2 (a-b)} \int_b^a U_{n-1} \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right)^2} dx \times \\ &\times \int_{-\pi}^a K_{12} \left(x, \, \theta_0 \right) \frac{\sec \frac{\theta_0}{2}}{\sqrt{2 \cos \theta_0 - 2 \cos \pi}} \, T_{2m-1} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \right) d\theta_0 \\ &\qquad m, \, n=1, \, 2, \dots \\ a_n &= \frac{4P_0}{\pi^2 (a-b)} \int_b^a f_1(x) \, U_{n-1} \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right)^2} dx + \\ &+ \int_b^a \left[\frac{4i^3 c}{\pi^2 (a-b)} - \frac{2i^3 y_0}{\pi^2} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) \right] \times \\ &\times U_{n-1} \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right)^2} dx - \\ &- \frac{4y_0}{\pi^2 (a-b)} \int_b^a U_{n-1} \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2x-a-b}{a-b} \right)^2} dx \times \\ &\times \int_b^a K_{11} \left(t, \, x \right) \left[1 - \left(\frac{2t-a-b}{a-b} \right)^2 \right]^{-1/2} dt, \quad n=1, \, 2, \, \dots \\ D_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^a U_{2n-2} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos \pi} \sec \frac{\theta}{2} \, d\theta \times \\ &\times \int_a^a K_{21} \left(t, \, \theta \right) \left[1 - \left(\frac{2t-a-b}{a-b} \right)^2 \right]^{-1/2} T_m \left(\frac{2t-a-b}{a-b} \right) dt \end{split}$$

$$\mathcal{E}_{m} = \frac{1}{\pi^2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \int U_{2n-2} \left(\operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) | 2 \cos \theta - 2 \cos \alpha \sec \frac{\theta}{2} d\theta \times$$

m, n = 1, 2, ...

$$\begin{split} &\times \int_{-\pi}^{\pi} K_{22}\left(\theta,\;\theta_{0}\right) \frac{\sec\frac{\theta_{0}}{2}}{\sqrt{2\cos\theta_{0}-2\cos\alpha}} \, T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_{0}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\right) d\theta_{0} \\ &\qquad \qquad m,\; n=1,\; 2,\; \dots \\ &\quad , \quad F_{mn} = \frac{\lambda^{4/8}\operatorname{csc}\alpha}{\pi^{2}\left(2m-1\right)}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\,\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\right) \times \\ &\quad \times U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\right)\left(2\cos\theta-2\cos\pi\right)\operatorname{sec}^{2}\frac{\theta}{2}\,d\theta, \qquad m,\; n=1,\; 2,\; \dots \\ &\quad , \quad b_{n} = \frac{P_{0}}{\pi^{2}}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f_{2}\left(\theta\right)U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\,\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\right)V_{2}\cos\theta-2\cos\pi\,\operatorname{sec}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta - \\ &\quad -\frac{y_{0}}{\pi^{2}}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\,\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\,\frac{\pi}{2}\right)V_{2}\cos\theta-2\cos\pi\,\operatorname{sec}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta \times \\ &\quad \times \int_{4}^{\pi}K_{91}\left(t,\;\theta\right)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^{2}\right]^{-1/2}dt, \quad n=1,\; 2, \dots \end{split}$$

Здесь $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x)/\sin \arccos x$ (n = 1, 2, ...) — много-члены Чебышева второго рода, а постоянные c и y_0 определяются из граничных условий (1.2), (1.3) и имеют значения

$$c = P | d_a, \quad y_0 = 2P / \neg d_a (a - b)$$

Переидем теперь к решению второй контактной задачи. С помощью функционального соотношения

$$\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi-2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0} - \theta_{0}}{2} T_{2m-1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - 2\theta_{0}}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi - 2\pi}{4} \right) \frac{\sec \frac{\pi - 2\theta_{0}}{4}}{\sqrt{2 \sin \theta_{0} - 2 \sin \theta_{0}}} d\theta_{0} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \csc \frac{\pi - 2\pi}{4} U_{2m-2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - 2\theta}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi - 2\pi}{4} \right) \sec \frac{\pi - 2\theta}{4}$$

$$m = 1, 2, \dots, \qquad (\pi - 2)$$

ко орос весьма просто получается из соответствующего функционального соотношения, припеденного в работах [7, 10], и представляя искомые функции в виде разложений

$$\mathfrak{p}'(x) = \left[1 - \left(\frac{2x - a - b}{a - b}\right)^2\right]^{-1} \sum_{a=0}^{\infty} \left(\frac{2x - a - b}{a - b}\right)^a b < x < a$$

$$y'(0) = \frac{\sec \frac{\pi - 2^{9}}{4}}{y \cdot 2 \sin \theta - 2 \sin \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} z_{m-12} T_{2m-1} \left(tg \frac{\pi - 2\alpha}{4} \cot g \frac{\pi - 2\alpha}{4} \right)$$

$$2 \le 9 < \pi - 2$$

лля определения неизвестных коэффициентов y_{m+1-1} и $|z_{2m-1+m-1}|$ получим бесконечную систему линейных уравнений со структурой, похожей системе бесконечных уравнений (1.4) первой контактиой задачи.

3. Исследование полученных бесконечных систем можно провести совершенно аналогичным способом, как это сделано в работах [4—8]. При этом можно показать такие интервалы изменения значений параметров л. и л. для которых написанные системы уравнений вполне регулярны.

Далее, можно показать, что свободные члены этих систем стремятся κ нулю при $n\to\infty$ не медленее, чем n^{-1} .

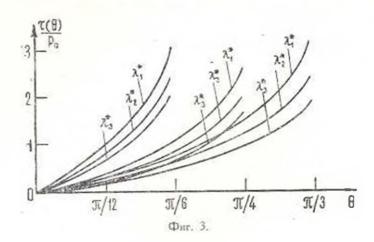
Перейдем к обсуждению числовых результатов. Численная реализация получениых формул произведена на ЭВМ «Напри-2» в случае, когда прямолинейные накладки отсутствуют, а пластина, усиленная на круговой границе симметрично расположенными криволинейными накладками, деформируется одностороние растягивающими усилиями $P_{\rm m}$ равномерно распределенными на бесконечности. При этом предполагалось, что ширина криволинейных накладок $h_{\rm h} = 0.25$ см. а в качестве материала основания для обеих задач взят алюминии (катанный) с упругими постоянными $E = 0.69 \cdot 10^{\circ}$ кг см., у = 0.3. Остальные параметры варьировались различными способами. Эти вариации включали выбор материала накладок, а также длины участков контакта. Параметр $h_{\rm m}$ в обеих задачах давался формулой

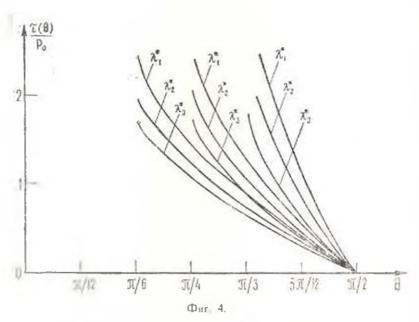
$$i^* = \frac{\pi (1 + v_1) (1 - 2v_1) E}{2 (1 - v_1) E}$$

и принимал гри значения в зависимости от выбора материала накладок Значению =1.7442 соответствует углеродистая сталь с упругими постоянными $E_1=2.1\cdot 10^6$ кг смг, $\nu_1=0.24$; значению $\nu_2^*=2.8316$ соответствует меды с упругими постоянными $E_1=1.1\cdot 10^6$ кг смг, $\nu_1=0.31$ и, наконец, $\nu_2=4.2494$ дюралюминий (катанный) с упругими постоянными $E_1=0.71\cdot 10^6$ кг/смг, $\mu_2=0.32$.

На фиг. 3 и 4, соответствующих первой и второй контактным задачам, показаны закономерности изменения контактного напряжения в зависимости от материалов контактирующих пар и длин участков контакта. Было замечено следующее: с возрастанием значений параметра λ^{-} , то есть, когда материал накладок становится более податливым, контактное напряжение под упругими криволинейными накладками уменьшается. Этот факт становится более наглядным, когда увеличивается длина участка контакта.

Далее, определены вначения нормального напряжения (r, θ) в точке $M(R, \pi/2)$ для различных коптактирующих пар и длин участков кон-





гакта. Эти результаты приведены в табл. 1 и 2, соответствующих первому и второму контактным задачам.

Таблица 1				Tabauya 2			
20	=0			1/4	- 9		
	a == π/6	α=π/4	α π/3	6.	z = n/6	a = 7/4	2 = 7/3
1.7442	2.5882	2.2339	1.9722	1.7442	0.3483	0.2329	-0.0407
2.8316	2.6337	2.3486	2.1720	2.8316	0.7167	0.6124	0.3198
4.2494	2.6799	2.4552	2.3440	4,2494	1.0506	0,9768	0.6819

Реэюмируя анализ полученных числовых данных, можно утверждать, что усиление круговой границы пластины упругими накладками положи-

тельно влияет на напряженное состояние пластины в целом. При этом эффективность усиления пластины с круговым отверстием указанным образом более очевидна и случае второй контактной задачи.

Автор благодарен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и обсуждение результатов.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 18 VII 1976-

Մ. Մ. ՇԱՀԻԿՅԱՆ

ԱՌԱԶԴԱԿԱՆ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ։ ՄԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Uniforminad

Աշխատանքում դիտարկված են երկու կոնտակտալին խնդիրներ կլորանցքով սալի համար, երբ վերջինս ուժեղացված է բարակ առաձգական վերադիրների համակարդով։ Հիմնվելով հայտնի հնքադրությունների վրա [1—3], դիտարկված խնդիրների լուծումները բերված են սինդուլյար ինտերըուդիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների լուծմանը։ Ձերիշևի օր-քողոնալ բազմանդամների օդտադործումով ստացված են այդ որոշիշ հավասարումների լուծունների կենկտիվ լուծումները, որոնք բացահայտ տեսքով պարունակում են կոնտակտային լարումներին թնորոշ նգակիությունները առաձգական վերադիրների ծայրակնանիի չրջակայքում։

Մի թանի մասնավոր գեպքերի Համար ստացված են Բվային արդյունը։ ներ, որոնը ներկայացված են գրաֆիկների և ազյուսակների տեսքով։

TWO CONTACT PROBLEMS FOR A PLATE WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED BY ELASTIC STIFFENERS

S. S. SHAHINIAN

Summary

The paper deals with contact problems for an infinite plate with a circular hole reinforced by some elastic stiffeners of a small thickness.

The solutions of these problems are reduced to a solution of systems of singular integro-differential equations. The solutions of these equations are found as series over Chebishev polynomials of the first kind.

Quite regular or quasi-quite infinite systems of linear algebraic equations are obtained for the unknown coefficients of the series.

A numerical example is presented.

ANTERATYRA

- Melan E. Ein Beitrag zur theorie geschweisster Verbindungen, Ing.-Arch., 1932.
 Bd. 3, No. 2.
- Аругюнян Н. Х. Контактная зидача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968. т. 32, вып. 4.
- Шозинян С. С. Передала нагрузок от кольцевой пакладки и плоскости с вруговым отверстием. МТТ, 1972. № 9.
- Arutanian N. K., Mkhitarian S. M. Some Contact Problems for a semi-plane with Elastic Stiffeners. Frendsin Elasticity and Thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary volume. Wolters-Nardorlf publ., 1971.
- Аст. онян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. НММ, 1972, т. 36, вып. 5.
- Атаян К. Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругным накладками. МТТ, 1972. № 5.
- Шагинян С. С. Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отперстием, усиленной на своен границе упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, г. XXVII. № 1.
- Шатинян С. С. Некоторые контактные вадачи для бесконечнай пластины с круговым отверстием, успленией упругими накладхами. Докл. АН Арм. ССР, 1974. т. 59, № 3.
- Морарь Г. А. Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
- Марадо Г. А., Полов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упрутими накладками. ПММ, 1971. г. 35. вып. 1.