

Г. С. ВАРДАНИН

К ТЕОРИИ ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ ОДНОГОДНО
 СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

На основе некоторой модификации теории ползучести Н. Х. Арутюнян [1] и использования температурно-временной аналогии [2] получены основные уравнения термоползучести для однородно стареющих тел с учетом зависимости характеристик материала от температуры.

Модифицированные реологические уравнения оказываются более удобными для обобщения на случай неизотермической ползучести стареющих тел в области линейной и нелинейной ползучести.

1. *Модификация основных уравнений теории ползучести однородно стареющих тел.* Основное уравнение линейной теории ползучести, выражающее связь между напряжениями и деформациями для однородно стареющих наследственных сред, при одноосном напряженном состоянии имеет вид [1]

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_0^t \sigma(\tau) \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (1.1)$$

где $E(t)$ — переменный модуль упруго-мгновенной деформации; $C(t, \tau)$ — мера ползучести. Для этих величин часто используются аппроксимации

$$E(t) = E_0(1 - e^{-\beta t}) \quad (1.2)$$

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\beta(t - \tau)}] \quad (1.3)$$

В правой части (1.1), вынося за скобку множитель $1/E(t)$, получим

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left\{ \sigma(t) - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{E(t)}{E(\tau)} + E(t)C(t, \tau) \right] d\tau \right\} \quad (1.4)$$

К выражению в квадратных скобках под знаком интеграла можно добавлять любое постоянное число A , от этого уравнение (1.4) не изменится. Далее, выберем число A так, чтобы при $t = \tau$ выражение (1.4) совпало с законом Гука $\varepsilon(\tau) = \sigma(\tau)/E(\tau)$. Очевидно, что это может быть только при $A = -1$.

Если обозначить полученное в итоге выражение через $S(t, \tau)$

$$S(t, \tau) = \frac{E(t)}{E(\tau)} + E(t) C(t, \tau) - 1 \quad (1.5)$$

получим окончательный вид основного уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) d\tau \right] \quad (1.6)$$

Безразмерную функцию $S(t, \tau)$ назовем функцией ползучести. Она показывает отношение деформации ползучести к упруго-мгновенной деформации к моменту времени t и может рассматриваться как некоторая новая характеристика наследственно-стареющего материала вместо меры ползучести $C(t, \tau)$ [4, 6]. Обозначим

$$\Pi(t, \tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \quad (1.7)$$

тогда

$$S(t, \tau) = \int_0^t \Pi(t, \tau) d\tau \quad (1.8)$$

Основное уравнение (1.6) через ядро ползучести $\Pi(t, \tau)$ записывается в виде

$$E(t)\varepsilon(t) = \varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau) \Pi(t, \tau) d\tau \quad (1.9)$$

Решая уравнение (1.9) относительно $\varepsilon(t)$, получим

$$\varepsilon(t) = E(t)\varepsilon(\tau) - \int_0^t E(\tau)\varepsilon(\tau) R(t, \tau) d\tau \quad (1.10)$$

$R(t, \tau)$ называется ядром релаксации, которое связано с ядром ползучести $\Pi(t, \tau)$ соотношением

$$\Pi(t, \tau) = R(t, \tau) = \int_0^t R(s, \tau) \Pi(t, s) ds \quad (1.11)$$

Вынося в правой части (1.10) за скобку множитель $E(t)$, получим

$$\varepsilon(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{E(\tau)}{E(t)} R(t, \tau) d\tau \right] \quad (1.12)$$

Обозначим

$$\Delta(t, \tau) = \int_0^t \frac{E(\tau)}{E(t)} R(t, \tau) d\tau \quad (1.13)$$

тогда

$$R(t, \tau) = - \frac{E(t)}{E(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta(t, \tau) \quad (1.14)$$

$$\varepsilon(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta(t, \tau) d\tau \right] \quad (1.15)$$

Безразмерную функцию $\Delta(t, \tau)$ назовем функцией релаксации наследственно-стареющего материала. Функции $S(t, \tau)$ и $\Delta(t, \tau)$ определяются по кривым простой ползучести, релаксации и изменению модуля мгновенной деформации $E(t)$.

Из (1.5) следует, что функция ползучести $S(t, \tau)$ удовлетворяет свойствам

$$S(\tau, \tau) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t, \tau) = \Psi(\tau) \quad (1.16)$$

где $\Psi(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция, характеризующая старение материала. Исходя из этого, для $S(t, \tau)$ можно принять аппроксимирующее выражение, аналогичное (1.3):

$$S(t, \tau) = \Psi(\tau) F(t - \tau) = \Psi(\tau) [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}] \quad (1.17)$$

В этом случае ядро ползучести $\Pi(t, \tau)$ на основании (1.7) определяется выражением

$$\Pi(t, \tau) = [\Psi'(\tau) + \lambda\Psi(\tau)] e^{-\lambda(t-\tau)} - \Psi'(\tau) \quad (1.18)$$

Соответствующее ядро релаксации $R(t, \tau)$ определим из интегрального уравнения (1.11). Так как ядро этого интегрального уравнения согласно (1.18) является вырожденным, то оно сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t^2} + [1 + \Psi'(t)] \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial t} = 0 \quad (1.19)$$

с начальными условиями

$$R(\tau, \tau) = \Pi(\tau, \tau) = \lambda\Psi(\tau) \quad (1.20)$$

$$R_t'(\tau, \tau) = \Pi_t'(\tau, \tau) = \Pi_\tau^2(\tau, \tau) = -\tau[\lambda\Psi^2(\tau) + \lambda\Psi(\tau) + \Psi'(\tau)] \quad (1.21)$$

Решая уравнение (1.19) с учетом начальных условий (1.20) и (1.21), для резольвенты $R(t, \tau)$ получаем следующее выражение:

$$R(t, \tau) = i \left\{ \Psi(\tau) - [i\Psi^2(\tau) + i\Psi(\tau) + \Psi''(\tau)] \int_0^{\tau} e^{-i\tau s} ds \right\} \quad (1.22)$$

где

$$\Psi(\tau) = i \int_0^{\tau} [1 + \Psi(s)] ds \quad (1.23)$$

2. *Область нелинейной ползучести.* Следуя [Н. Х. Арутюнян [1]], примем, что упруго-мгновенные деформации последственно-старееющего тела линейно связаны с напряжениями, а деформации ползучести — ислинейно, через функцию

$$f[\varepsilon(\tau)] = \varepsilon(\tau) + b\varepsilon^2(\tau) \quad (2.1)$$

Используя принцип наложения, в случае одноосного напряженного состояния для относительной деформации $\varepsilon(t)$ при переменных напряжениях $\varepsilon(t)$ получим следующее выражение:

$$E(t)\varepsilon(t) = \varepsilon(t) + \int_0^t f[\varepsilon(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) d\tau \quad (2.2)$$

С учетом (1.7) и (2.1) уравнение (2.2) принимает вид

$$E(t)\varepsilon(t) = \varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(\tau) \Pi(t, \tau) d\tau + b \int_0^t \varepsilon^2(\tau) \Pi(t, \tau) d\tau \quad (2.3)$$

Точное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3) связано с серьезными математическими трудностями и в настоящее время не найдено. В связи с этим в [1] аналогичное уравнение сводится к нелинейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, решение которого при $E(t) = \text{const}$ находится методом последовательных приближений.

Пользуясь методом, предложенным в [3], найдем приближенное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3) в замкнутом виде при переменном модуле $E(t)$.

Введем интегральные операторы

$$\bar{\Pi}\varphi = \int_0^t \varphi(\tau) \Pi(t, \tau) d\tau, \quad \bar{R}\varphi = \int_0^t \varphi^2(\tau) R(t, \tau) d\tau \quad (2.4)$$

Операторы $\bar{\Pi}$ и \bar{R} , согласно (1.9) и (1.10), связаны соотношением

$$\frac{1}{1 + \bar{\Pi}} = 1 - \bar{R} \quad (2.5)$$

Основное уравнение (2.3) в операторной записи примет вид

$$b\bar{\Pi} \dot{\varepsilon}(t) + (1 + \bar{\Pi}) \varepsilon(t) - E(t) \varepsilon(t) = 0 \quad (2.6)$$

Рассматривая уравнение (2.6) как квадратное уравнение относительно $\varepsilon(t)$, получим

$$\varepsilon = -\frac{1}{2b} \frac{1 + \bar{\Pi}}{\bar{\Pi}} \pm \sqrt{\frac{1}{4b^2} \frac{(1 + \bar{\Pi})^2}{\bar{\Pi}^2} + \frac{E\varepsilon}{b\bar{\Pi}}} \quad (2.7)$$

Положительный знак перед радикалом в выражении (2.7) взят, исходя из физических соображений, когда при $\varepsilon > 0$, $\dot{\varepsilon} > 0$.

Преобразуем выражение (2.7) к виду

$$\varepsilon = -\frac{1}{2b} \frac{1 + \bar{\Pi}}{\bar{\Pi}} + \frac{1}{2b} \frac{1 + \bar{\Pi}}{\bar{\Pi}} \sqrt{1 + 4bE\varepsilon \frac{\bar{\Pi}}{(1 + \bar{\Pi})^2}} \quad (2.8)$$

Малый параметр „ b “ всегда можно выбрать так, чтобы

$$4bE\varepsilon \frac{\bar{\Pi}}{(1 + \bar{\Pi})^2} = q < 1 \quad (2.9)$$

Поэтому пользуясь приближенным равенством

$$\sqrt{1 + q} \approx 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} \quad (2.10)$$

для $\varepsilon(t)$ получим следующее выражение:

$$\varepsilon(t) = \frac{E(t) \varepsilon(t)}{1 + \bar{\Pi}} - b \frac{E^2(t) \varepsilon^2(t) \bar{\Pi}}{(1 + \bar{\Pi})^2} \quad (2.11)$$

В зависимости от реологического поведения материала возможны случаи: а) $\bar{\Pi} < 1$; б) $\bar{R} < 1$.

Пользуясь приближенными равенствами в случае а)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Pi}}{(1 + \bar{\Pi})^2} &= \frac{1}{(1 + \bar{\Pi})^2} - \frac{1}{(1 + \bar{\Pi})^4} \approx \frac{1}{1 + 2\bar{\Pi}} - \frac{1}{1 + 3\bar{\Pi}} \\ &= 1 - \bar{R}_2 - 1 + \bar{R}_3 = \bar{R}_3 - \bar{R}_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

в случае б)

$$\frac{\bar{\Pi}}{(1 + \bar{\Pi})^2} = (1 - \bar{R})^2 - (1 - \bar{R})^3 \approx 1 - 2\bar{R} - 1 + 3\bar{R} = \bar{R} \quad (2.13)$$

где \bar{R}_2 и \bar{R}_3 — операторы, ядра $R_2(t, \tau)$ и $R_3(t, \tau)$ которых являются резольвентами ядер соответственно $2\Pi(t, \tau)$ и $3\Pi(t, \tau)$, получим следующие замкнутые выражения для $\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= E(t)\varepsilon(t) - \int_0^t E(\tau)\varepsilon(\tau)R(t, \tau)d\tau + \\ &+ b \int_0^t E^2(\tau)\varepsilon^2(\tau)[R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)]d\tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

или

$$\varepsilon(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_0^t [E(\tau)\varepsilon(\tau) + bE^2(\tau)\varepsilon^2(\tau)]R(t, \tau)d\tau \quad (2.15)$$

3. *Основные уравнения термоползучести наследственно-стареющих тел.* При постоянной температуре T_0 (комнатная температура) модуль упругости $E(t)$ и функция ползучести $S(t, \tau)$ наследственно-стареющего материала определяются выражениями (1.2) и (1.17). При произвольной температуре $T(x, t) = T_0 + \theta(x, t)$ модуль упругости можно определить из зависимости

$$E(T, t) = E_0(T)[1 - e^{-\psi(T)t}] \quad (3.1)$$

где функции $E_0(T)$ и $\psi(T)$ удовлетворяют условиям

$$E_0(T_0) = E_0, \quad \psi(T_0) = 1 \quad (3.2)$$

Функцию $\psi(T)$ примем в виде

$$\psi(T) = \frac{1}{t} \int_0^t a[T(x, \tau)]d\tau \quad (3.3)$$

В случае стационарных температур

$$T(x, t) = T(x), \quad \psi(T) = a(T) \quad (3.4)$$

Функция $a(T)$, согласно температурно-временной аналогии [2], для многих вязко-упругих материалов в достаточно широком диапазоне изменения температур определяется выражением

$$a(T) = \exp \frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \quad (3.5)$$

где C_1 и C_2 — константы материала.

Из выражения (3.1) видно, что действие температуры эквивалентно трансформированию шкалы времени. Причем эта трансформация пропорциональна $\psi(T)$.

Введем новую шкалу времени ξ, η

$$\xi = \xi(x, t) = \rho [T(x, t)] t, \quad \eta = \xi(x, \tau) = \rho [T(x, \tau)] \tau \quad (3.6)$$

В приведенной шкале времени ξ, η модуль упругости $E(T, \xi)$ и функция ползучести $S(\xi, \eta)$ определяются выражениями

$$E(T, \xi) = E_0(T) (1 - e^{-\xi}) \quad (3.7)$$

$$S(\xi, \eta) = W(\eta) [1 - e^{-\eta(1-\xi)}] \quad (3.8)$$

Здесь

$$\xi - \eta = \int_0^t \alpha [T(x, \tau)] d\tau \quad (3.9)$$

Таким образом, основное уравнение линейной термоползучести в шкале времени ξ, η для наследственно-стареющих тел запишется в виде

$$E(T, \xi) [\varepsilon(\xi) - \alpha \Theta(\xi)] = \varepsilon(\xi) + \int_0^\xi \sigma(\eta) \Pi(\xi, \eta) d\eta \quad (3.10)$$

где

$$\Pi(\xi, \eta) = - \frac{\partial}{\partial \eta} S(\xi, \eta) \quad (3.11)$$

В шкале времени t, τ уравнение (3.10) принимает вид

$$E(T, \xi(t)) [\varepsilon(t) - \alpha \Theta(t)] = \varepsilon(t) + \int_0^t \sigma(\tau) \Pi[\xi(t), \xi(\tau)] d\tau \quad (3.12)$$

Решение уравнений (3.10) и (3.12) дает напряжения соответственно в приведенной шкале времени ξ, η и в шкале истинного времени t, τ :

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) = E(T, \xi) [\varepsilon(\xi) - \alpha \Theta(\xi)] - \\ - \int_0^\xi E(T, \eta) [\varepsilon(\eta) - \alpha \Theta(\eta)] R(\xi, \eta) d\eta \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) = E[T, \xi(t)] [\varepsilon(t) - \alpha \Theta(t)] - \\ - \int_0^t E[T, \xi(\tau)] [\varepsilon(\tau) - \alpha \Theta(\tau)] R[\xi(t), \xi(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (3.14)$$

Основное уравнение нелинейной термоползучести для наследственно-стареющих тел получим на основании (2.3) с учетом (3.6)

$$E(T, \xi) [\xi(t) - \alpha^{\theta}(\xi)] = z(\xi) + \int_0^{\xi} z(\tau) \Pi(\xi, \tau) d\tau + b \int_0^{\xi} z^2(\tau) \Pi(\xi, \tau) d\tau \quad (3.15)$$

или в шкале истинного времени t :

$$E[T, \xi(t)] [\xi(t) - \alpha^{\theta}(t)] = z(t) + \int_0^t z(\tau) \Pi[\xi(t), \xi(\tau)] d\tau + b \int_0^t z^2(\tau) \Pi[\xi(t), \xi(\tau)] d\tau \quad (3.16)$$

Решение нелинейного уравнения (3.16) получим на основании (2.14) и (2.15) в виде

$$z(t) = E[T, \xi(t)] [\xi(t) - \alpha^{\theta}(t)] - \int_0^t E[T, \xi(\tau)] [\xi(\tau) - \alpha^{\theta}(\tau)] R[\xi(t), \xi(\tau)] d\tau + b \int_0^t E^2[T, \xi(\tau)] [\xi(\tau) - \alpha^{\theta}(\tau)]^2 [R_1[\xi(t), \xi(\tau)] - R_2[\xi(t), \xi(\tau)]] d\tau \quad (3.17)$$

или

$$z(t) = E[T, \xi(t)] [\xi(t) - \alpha^{\theta}(t)] - \int_0^t E[T, \xi(\tau)] [\xi(\tau) - \alpha^{\theta}(\tau)] + b E^2[T, \xi(\tau)] [\xi(\tau) - \alpha^{\theta}(\tau)]^2 R[\xi(t), \xi(\tau)] d\tau \quad (3.18)$$

4. *Растяжение бруса массовыми силами.* В качестве примера применения полученных в п. 3 реологических уравнений рассмотрим растяжение бруса массовыми силами при неоднородном нагреве в условиях нелинейной ползучести и старения материала.

Пусть напряжение в сечении x бруса известно $\sigma = \sigma(x, t)$, температура $T = T_0 + \theta(x, t)$ задана. Тогда приведенное время, согласно (3.6), известно (построен график ξ по t при различных x). Пусть известны также модуль упругости $E(x, t)$ и кривая ползучести в возрасте τ_1 (известна функция ползучести $S(t, \tau_1)$). Требуется найти смещение $u(x, t)$.

Согласно (3.16) имеем разрешающее уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha^{\theta}(x, t) + \frac{z(x, t)}{E(x, t)} + \frac{1}{E(x, t)} \int_0^t [z(x, \tau) + b z^2(x, \tau)] \Pi[\xi(x, t), \xi(x, \tau)] d\tau \quad (4.1)$$

Если поле сил стационарно

$$\sigma(x, t) = \sigma(x) H(t - \tau_1) \quad (4.2)$$

где $H(t - \tau_1)$ — единичная функция Хевисайда, то

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \sigma H(x, t) + \frac{\sigma(x)}{E(x, t)} - \frac{\sigma(x) + b\sigma^2(x)}{E(x, t)} S[\sigma(x, t), \sigma(x, \tau_1)] \quad (4.3)$$

Интегрируя уравнение (4.3) от нуля до x , получим

$$u(x, t) = \sigma \int_0^x H(x, t) dx + \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E(x, t)} dx + \int_0^x \frac{\sigma(x) + b\sigma^2(x)}{E(x, t)} S[\sigma(x, t), \sigma(x, \tau_1)] dx \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) исключено жесткое смещение, то есть учтено условие $u(0, t) = 0$.

В заключение отметим, что приведенные в настоящей работе уравнения неадиабатической ползучести могут быть обобщены для неоднородно стареющих тел. Для этого можно воспользоваться теорией ползучести, предложенной для таких тел Н. Х. Арутюняном [5].

Московский инженерно-строительный институт

им. В. В. Куйбышева

Получила 3 VI 1976

Հ. Ս. ՂԱՐՄԱՆՅԱՆ

ՇԱՐՄԱՆԻՑԻ ՄԵՐԱՑՈՂ ԿՈՆԻԹԵՐԻ ՋԵՐՄԱՆՅԱՆ ԽՈՂԻՔԻ
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՐՉՁ

Ա մ փ ո Վ: ո լ մ

Ն. Ս. Ղարմաճյանի ազգի տեսության որոշ ձևափոխման և չիր (ու ժամանակային անալոգիայի) օգտագործման հիման վրա ստացվում են ձևա-
ցող կոնիտերի համար չիրմային ազգի հիմնական նախաստորանները կոնիտերի
նախկոնությունների վրա չիրմաստորանների ազդեցության նախատեսումը:

Արդյունքի որակի գերազանցումը և ծավալային ու ժամանակային ձևափոխումների ձևափոխումը:

ON THERMOVISCOELASTICITY OF HOMOGENEOUSLY AGEING MEDIA

G. S. VARDANIAN

S u m m a r y

Some principle equations of thermoviscoelasticity for homogeneous ageing with characteristics depending on temperature are obtained by means of certain modification of N. Chr. Harutunian's creep theory and temperature — time analogy.

A numerical example is presented for a bar under tension by its weight.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутунян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—А. Гостехиздат, 1952.
2. Фэрри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М. ИЛ, 1963.
3. Ризовский М. П. Об одном способе решения нелинейных уравнений теории ползучести. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, т. XII, № 1.
4. Варданян Г. С. Вопросы подобия при моделировании ползучести бетона поляризационно-оптическим методом. «Проблемы ползучести и усадки бетона», сб. трудов МИСИ, 1974, № 113, 14—25.
5. Арутунян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. МГТТ, 1976, № 3, 153—164.
6. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. М. Стройиздат, 1973.