ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 6, 1976 Механика

Ш. М. ХАЧАТРЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской задаче для анизотропной полосы. Считается, что плоскость полосы совпадает с плоскостью упругой симметрии материала. На продольных сторонах полосы заданы значения напряжений, а на торцах— различные комбинации торцевых условий.

Применяется асимптотический метод интегрирования, и решение задачи представляется в виде суммы двух решений — незатухающего и типа погранслоя. Показывается возможность сращивания этих двух решений на торцах.

Обсуждается применимость прикладных и асимптотического методов для анизотропных материалов. Показано, что применимость этих методов может существенно зависеть от величины отношения упругих коэффициентов. Анализируется влияние отдельных коэффициентов упругости на применимость гипотезы о недеформируемых нормалях.

1. Рассматривается плоская задача для анизотропной полосы $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a, \quad |y| \leqslant h, \ h \ll a\}$, на продольных сторонах $y = \pm h$ которой заданы значения напряжений

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{a}{h} X^{\pm}(x), \qquad \sigma_y = \pm Y^{\pm}(x) \text{ при } y = \pm h \tag{1.1}$$

а на торцах $x = 0, a$—произвольные пока торцевые условия.

Считаем обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела. Предполагаем также, что плоскость упругой симметрии совпадает с плоскостью xy, то есть практически в этой плоскости имеем общую анизотропию.

Для решения задачи используется асимптотический метод интегрирования [1]. Вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/a$, $\zeta = y/h$, преобразовав соответствующие уравнения теории упругости анизотропного тела, получим систему, содержащую малый параметр $\varepsilon = h/a$ при производных. Решение подобного рода сингулярно возмущенных уравнений складывается [1—3] из двух типов решений — внутреннего, то есть незатухающего при удалении от границы в глубь области решения, и типа погранслоя.

Решение анизотропной полосы известным для изотропного и ортотропного случаев приемом не представляется в виде суммы двух решений—симметричного и кососимметричного, так как в этом случае симметричным и кососимметричным внешним воздействиям не соответствуют такие же напряженно-деформированные состояния.

Внутреннее решение ищем в виде [1]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s} Q^{(s)} \tag{1.2}$$

Q — любое из напряжений или безразмерных перемещений $U = u/a$, $V = v/a$, $Q^{(s)} = 0$ при $s < 0$, q — целое число и выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned} &q = 2 \ \text{для} \ \sigma_x,\ U, \quad q = 1 \ \text{для} \ \sigma_{xy} \\ &q = 3 \ \text{для} \ V, \qquad q = 0 \ \text{для} \ \sigma_y \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2) в уравнения теории упругости, с учетом (1.3) получим систему

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \\ \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s-2)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)} \\ \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{12}\sigma_x^{(s-2)} + a_{22}\sigma_y^{(s-4)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)} \\ \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi} = a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Интегрируя систему (1.4) по ζ, получим

$$\begin{gathered} V^{(s)} = w^{(s)}(\xi) + v^{*(s)}, \qquad U^{(s)} = -\frac{dw^{(s)}}{d\xi}\zeta + u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)} \\ \sigma_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2 w^{(s)}}{d\xi^2}\zeta + \sigma_x^{*(s)} \\ \sigma_{xy}^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{d^3 w^{(s)}}{d\xi^3}\frac{\zeta^2}{2} - p^{(s)}\zeta + \sigma_{xy0}^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)} \\ \sigma_y^{(s)} = -\frac{1}{2}q^{(s)}\zeta^3 + \frac{dp^{(s)}}{d\xi}\frac{\zeta^2}{2} - \frac{d\sigma_{xy0}^{(s)}}{d\xi}\zeta + \sigma_{y0}^{(s)} + \sigma_y^{*(s)} \end{gathered} \tag{1.5}$$

$w^{(s)}$, $u^{(s)}$, $\sigma_{xy0}^{(s)}$ и $\sigma_{y0}^{(s)}$ — неизвестные функции от ξ и подлежат определению, а величины со звездочками — известные функции от ξ, ζ и определяются следующим образом:

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta} \left(a_{12}\sigma_x^{(s-2)} + a_{22}\sigma_y^{(s-4)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s-3)}\right) d\zeta$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta} \left(a_{16}\sigma_x^{(s-1)} + a_{26}\sigma_y^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \xi}\right) d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial \xi} - a_{12}\sigma_y^{(s-2)} - a_{16}\sigma_{xy}^{(s-1)}\right) \tag{1.6}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi} d\zeta, \qquad \sigma_y^{*(s)} = -\int_0^{\zeta} \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial \xi} d\zeta$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим, что $u^{(s)}$ и $w^{(s)}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} = p^{(s)} \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{3a_{11}} \frac{d^4 w^{(s)}}{d\xi^4} = q^{(s)} \tag{1.8}$$

где

$$p^{(s)} = -X_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)\right)$$

$$q^{(s)} = Y_2^{(s)} + \frac{dX_2^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{2}\left| \sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_y^{*(s)}(\zeta = -1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1)}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)}{\partial \xi} \right|$$

$$X_1^{(s)} = 1/2\,(X^{+(s)} + X^{-(s)}), \qquad X_2^{(s)} = 1/2\,(X^{+(s)} - X^{-(s)}) \tag{1.9}$$

$$Y_1^{(s)} = 1/2\,(Y^{+(s)} - Y^{-(s)}), \qquad Y_2^{(s)} = 1/2\,(Y^{+(s)} + Y^{-(s)})$$

$$X^{\pm(0)} = X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0, \qquad s > 0$$

$\sigma_{xy0}^{(s)}$ и $\sigma_{y0}^{(s)}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy0}^{(s)} &= X_2^{(s)} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = -1)\right) - \frac{1}{2a_{11}} \frac{d^3 w^{(s)}}{d\xi^3} \\ \sigma_{y0}^{(s)} &= Y_1^{(s)} - \frac{1}{2} \frac{dp^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{2}\left(\sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_y^{*(s)}(\zeta = -1)\right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, все величины будут определены, если известны $u^{(s)}$, $w^{(s)}$. Последние определяются по формулам

$$\frac{1}{a_{11}} u^{(s)} = u_0^{(s)} + C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)} \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{3a_{11}} w^{(s)} = w_0^{(s)} + C_3^{(s)} \frac{\xi^3}{6} + C_4^{(s)} \frac{\xi^2}{2} + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)} \tag{1.12}$$

$$u_0^{(s)} = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} p^{(s)} d\xi, \qquad w_0^{(s)} = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} q^{(s)} d\xi$$

При $s=0$ уравнения (1.7) и (1.8) можно получить, если принять известную гипотезу о недеформируемых нормалях. Для каждого приближения s для определения $u^{(s)}$ и $w^{(s)}$ решаются одни и те же уравнения (1.7), (1.8) и меняется лишь вид нагрузки. В частности,

$$p^{(0)} = -X_1, \qquad p^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{a_{16}}{a_{11}}\left(-Y_2 + \frac{dX_2}{d\xi}\right)$$

$$p^{(2)} = \left(\frac{1}{6}\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{1}{6}\frac{a_{66}}{a_{11}}\right)\frac{d^2X_1}{d\xi^2} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{dY_1}{d\xi}$$

$$q^{(0)} = Y_2 + \frac{dX_2}{d\xi}, \qquad q^{(1)} = -\frac{2}{3}\frac{a_{16}}{a_{11}}\frac{d^2X_1}{d\xi^2} \tag{1.13}$$

$$q^{(2)} = \left(\frac{4}{15}\frac{a_{16}^2}{a_{11}^2} - \frac{3}{10}\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{2}{5}\frac{a_{66}}{a_{11}}\right)\frac{d^2Y_2}{d\xi^2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{30}\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{1}{5}\frac{a_{66}}{a_{11}} + \frac{4}{5}\frac{a_{16}^2}{a_{11}^2}\right)\frac{d^3X_2}{d\xi^3}$$

Из (1.9), (1.13) видно, что величина вносимой поправки зависит не только от изменяемости внешней нагрузки, но и от отношения упругих коэффициентов. В частности, если $a_{16}/a_{11} = O(\varepsilon^{-1})$, то вносимая поправка от первого приближения будет порядка первого члена и асимптотика (1.3), а следовательно, и гипотеза о недеформируемых нормалях перестанут быть верными для анизотропного случая. В изотропном и ортотропном случаях $p^{(1)} = q^{(1)} = 0$ и вносимая поправка будет сказываться со второго приближения, то есть гипотеза о недеформируемых нормалях в изотропном случае имеет большую точность, нежели в анизотропном случае.

Формулы (1.9), (1.13) показывают, что характер внутреннего напряженного состояния может существенно зависеть от отношении a_{ij}/a_{11} и здесь первостепенную важность имеет отношение a_{16}/a_{11}. Влияние остальных отношений коэффициентов упругости будет существенным, если $a_{66}/a_{11} = O(\varepsilon^{-2})$, $a_{26}/a_{11} = O(\varepsilon^{-3})$, $a_{22}/a_{11} = O(\varepsilon^{-4})$, то есть поправку к внутреннему напряженному состоянию, определяемому прикладной теорией, в первую очередь нужно связывать с более точным учетом сдвиговых факторов [4].

В вышеуказанных предельных случаях или надо отыскать другую асимптотику, которая в исходном приближении будет резко отличаться от асимптотики, соответствующей гипотезе недеформируемых нормалей, или решить задачу другим способом как существенно двухмерную.

Формулы (1.11) и (1.12) показывают, что произволов внутренней задачи недостаточно для удовлетворения условиям при $x=0$, a в каждой точке торца. Чтобы удовлетворять торцевым условиям достаточно точно, необходимо иметь решение типа погранслоя.

2. Для построения погранслоя вблизи торца $\xi=0$ в уравнениях теории упругости сделаем новую замену переменных $t=\xi/\varepsilon$. Этим преобразованием выделяется дифференцирование в продольном направлении [3].

Решение вновь полученных уравнений ищем в виде функций типа погранслоя [5]

$$R_p = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{-\varkappa_p + s} R_p^{(s)}(\zeta)\exp(-\lambda t) \tag{2.1}$$

где R_p—любое из напряжений и перемещений, $\varkappa_p$—показатель интенсивности, $\lambda=\mathrm{const}$ характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния. Для погранслоя, соответствующего краю $\xi=0$, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$.

Числа $\varkappa_p$ выбираются так, чтобы получить непротиворечивую систему [5, 6]. Этому условию удовлетворяют

$$\varkappa_{\sigma_{ij}} = \varkappa, \qquad \varkappa_{u_i} = \varkappa + 1 \tag{2.2}$$

здесь σ_{ij}—любое из напряжений, u_i—любое из безразмерных перемещений, $\varkappa$ определится при рассмотрении вопроса взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием.

В результате имеем следующую систему относительно величин $R_p^{(s)}$:

$$-\lambda\sigma_{xp}^{(s)} + \frac{d\sigma_{xyp}^{(s)}}{d\zeta} = 0, \qquad -\lambda\sigma_{xyp}^{(s)} + \frac{d\sigma_{yp}^{(s)}}{d\zeta} = 0$$

$$-\lambda u_p^{(s)} = a_{11}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yp}^{(s)} + a_{16}\sigma_{xyp}^{(s)} \tag{2.3}$$

$$\frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta} = a_{12}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yp}^{(s)} + a_{26}\sigma_{xyp}^{(s)}$$

$$\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta} - \lambda v_p^{(s)} = a_{16}\sigma_{xp}^{(s)} + a_{26}\sigma_{yp}^{(s)} + a_{66}\sigma_{xyp}^{(s)}$$

решением которой является

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \frac{F_n''}{\lambda_n^2}A_n^{(s)}, \qquad \sigma_{xyp}^{(s)} = \frac{F_n'}{\lambda_n}A_n^{(s)}, \qquad \sigma_{yp}^{(s)} = A_n^{(s)}F_n(\zeta)$$

$$u_p^{(s)} = -\left(a_{11}\frac{F_n''}{\lambda_n^3} + a_{12}\frac{F_n}{\lambda_n} + a_{16}\frac{F_n'}{\lambda_n^2}\right)A_n^{(s)} \tag{2.4}$$

$$v_p^{(s)} = -\left[a_{11}\frac{F_n'''}{\lambda_n^4} + (a_{12}+a_{66})\frac{F_n'}{\lambda_n^2} + a_{26}\frac{F_n}{\lambda_n} + 2a_{16}\frac{F_n''}{\lambda_n^3}\right]A_n^{(s)}$$

$F_n(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{11}F_n^{\mathrm{IV}} + 2\lambda_n a_{16}F_n''' + \lambda_n^2(a_{66} + 2a_{12})F_n'' + 2\lambda_n^3 a_{26}F_n' + \lambda_n^4 a_{22}F_n = 0 \tag{2.5}$$

и условиям

$$F_n(\pm 1) = F_n'(\pm 1) = 0 \tag{2.6}$$

являющимся следствием из условий $\sigma_{yp} = \sigma_{xyp} = 0$ при $\xi = \pm 1$. В зависимости от вида корней соответствующего (2.5) характеристического уравнения [7]

а) $\alpha + i\beta, \quad \alpha - i\beta$, б) $\alpha_1 + i\beta_1, \quad \alpha_2 + i\beta_2 \quad (\beta, \beta_1, \beta_2 > 0)$

возможны следующие решения задачи (2.5)—(2.6):

а) $$F_n(\zeta) = e^{\alpha\lambda_n\zeta}\left(\cos\beta\lambda_n \sin\beta\lambda_n\zeta - \zeta\sin\beta\lambda_n\cos\beta\lambda_n\zeta\right) \tag{2.7}$$

где λ_n—корень уравнения

$$\sin 2\beta\lambda_n - 2\beta\lambda_n = 0 \tag{2.8}$$

и

$$F_n(\zeta) = e^{\alpha\lambda_n\zeta}\left(\sin\beta\lambda_n\cos\beta\lambda_n\zeta - \zeta\cos\beta\lambda_n\sin\beta\lambda_n\zeta\right) \tag{2.9}$$

$$\sin 2\beta\lambda_n + 2\beta\lambda_n = 0 \tag{2.10}$$

б) $$F_n(\zeta) = \frac{1}{D_{11}^{(n)}}\Big[\left(D_{11}^{(n)}\cos\beta_1\lambda_n\zeta + D_{12}^{(n)}\sin\beta_1\lambda_n\zeta\right)e^{\alpha_1\lambda_n\zeta} + \left(D_{13}^{(n)}\cos\beta_2\lambda_n\zeta + D_{14}^{(n)}\sin\beta_2\lambda_n\zeta\right)e^{\alpha_2\lambda_n\zeta}\Big] \tag{2.11}$$

$$\left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2\right]\cos 2(\beta_1 - \beta_2)\lambda_n - \left[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2\right]\cos 2(\beta_1 + \beta_2)\lambda_n - 4\beta_1\beta_2 \operatorname{ch} 2(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda_n = 0 \tag{2.12}$$

Через $D_{1i}^{(n)}$ обозначены алгебраические дополнения первой строки следующей матрицы:

$$\begin{Vmatrix} d_{11}^{(n)} & d_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & d_{14}^{(n)} \\ d_{21}^{(n)} & d_{22}^{(n)} & d_{23}^{(n)} & d_{24}^{(n)} \\ d_{31}^{(n)} & d_{32}^{(n)} & d_{33}^{(n)} & d_{34}^{(n)} \\ d_{41}^{(n)} & d_{42}^{(n)} & d_{43}^{(n)} & d_{44}^{(n)} \end{Vmatrix}$$

где

$$d_{11}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}\cos\beta_1\lambda_n, \qquad d_{12}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}\sin\beta_1\lambda_n$$

$$d_{13}^{(n)} = e^{\alpha_2\lambda_n}\cos\beta_2\lambda_n, \qquad d_{14}^{(n)} = e^{\alpha_2\lambda_n}\sin\beta_2\lambda_n$$

$$d_{21}^{(n)} = e^{-\alpha_1\lambda_n}\cos\beta_1\lambda_n, \qquad d_{22}^{(n)} = -e^{-\alpha_1\lambda_n}\sin\beta_1\lambda_n$$

$$d_{23}^{(n)} = e^{-\alpha_2\lambda_n}\cos\beta_2\lambda_n, \qquad d_{24}^{(n)} = -e^{-\alpha_2\lambda_n}\sin\beta_2\lambda_n$$

$$d_{31}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}(\alpha_1\cos\beta_1\lambda_n - \beta_1\sin\beta_1\lambda_n), \qquad d_{32}^{(n)} = e^{\alpha_1\lambda_n}(\alpha_1\sin\beta_1\lambda_n + \beta_1\cos\beta_1\lambda_n)$$

$$d_{33}^{(n)}=e^{\alpha_2\lambda_n}(\alpha_2\cos\beta_2\lambda_n-\beta_2\sin\beta_2\lambda_n),\qquad d_{34}^{(n)}=e^{\alpha_2\lambda_n}(\alpha_2\sin\beta_2\lambda_n+\beta_2\cos\beta_2\lambda_n)$$

$$d_{41}^{(n)}=e^{-\alpha_1\lambda_n}(\alpha_1\cos\beta_1\lambda_n-\beta_1\sin\beta_1\lambda_n)$$

$$d_{42}^{(n)}=e^{-\alpha_1\lambda_n}(-\alpha_1\sin\beta_1\lambda_n+\beta_1\cos\beta_1\lambda_n)$$

$$d_{43}^{(n)}=e^{-\alpha_2\lambda_n}(\alpha_2\cos\beta_2\lambda_n+\beta_2\sin\beta_2\lambda_n)$$

$$d_{44}^{(n)}=e^{-\alpha_2\lambda_n}(-\alpha_2\sin\beta_2\lambda_n+\beta_2\cos\beta_2\lambda_n)$$

Считаем, что в (2.4) и в дальнейшем там, где какая-либо функция умножается на произвол пограислоя $A_k^{(n)}$, производится суммирование по всем значениям немого индекса n, соответствующего всем корням λ_n. $\operatorname{Min}\operatorname{Re}\lambda_n$ практически будет характеризовать быстроту затухания пограислоя. Это затухание будет медленнее, чем в изотропном и ортотропном случаях, так как α, α_i отличны от нуля.

В табл. 1 приведены упругие коэффициенты и значения параметров α_i, β_i, входящих в уравнение (2.12), для материалов СВАМ 5:1 и СВАМ 15:1. Упругие постоянные взяты из [8], где φ—угол между главными направлениями анизотропии и координатными осями. В табл. 2 приведены значения первых нескольких корней $\lambda_n=x_n+iy_n$ трансцендентного уравнения (2.12) для этих материалов.

Напряжения σ_{xxp}, σ_{xyp} в произвольном поперечном сечении самоуравновешены, то есть

$$\int\limits_{-1}^{1}\sigma_{xp}d\zeta=0,\qquad\int\limits_{-1}^{1}\zeta\sigma_{xp}d\zeta=0,\qquad\int\limits_{-1}^{1}\sigma_{xyp}d\zeta=0\tag{2.13}$$

перемещения же аналогичным равенствам, вообще говоря, не удовлетворяют. (2.13) легко установить, если непосредственно вычислить эти интегралы и учесть (2.6).

Аналогичным образом строится пограислой вблизи торца $\xi=1$. Если отсчет вести от $x=0$, данные $R_p^{(2)}$ этого пограислоя получаются из приведенного формальной заменой t на $t_1=1/\varepsilon-t=(a-x)/h$.

Приведенные выше результаты относятся к плоскому напряженному состоянию. Известной заменой упругих коэффициентов a_{ij} на $\beta_{ij}=a_{ij}-(a_{i3}a_{j3})/a_{33}$ ($i, j=1, 2, 6$) можно получить данные для плоской деформации. Отметим также, что решение типа пограислоя в нашем случае одновременно является точным решением.

Интеграл задачи представим в виде

$$J=Q+R_p^{(1)}+R_p^{(2)}\tag{2.14}$$

Представление (2.14) содержит достаточное число произволов для удовлетворения торцевым условиям.

Таблица 1

Материал	$a_{11}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{22}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{12}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{66}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{16}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	$a_{26}\cdot10^{-5}$ $см^2/кг$	α_1	β_1	α_2	β_2
СВАМ 5:1 $\varphi=45^\circ$	0.675	0.675	−0.374	0.832	0.0887	0.0887	0.61128	0.79142	−0.74269	0.66964
СВАМ 15:1 $\varphi=30^\circ$	0.430	0.400	−0.280	1.660	0.304	0.050	−0.78453	1.34211	0.07689	0.61518

Таблица 2

n	СВАМ 5:1 $\varphi=45^\circ$		СВАМ 15:1 $\varphi=30^\circ$	
	x_n	y_n	x_n	y_n
1	1.717576	1.640117	1.979940	1.115331
2	2.868292	2.704967	3.260595	1.676184
3	5.182160	4.849278	5.960421	2.866730

3. Пусть на торце $x=0$ заданы значения напряжений

$$\sigma_x = \varphi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(\zeta) \tag{3.1}$$

Подставляя (2.14) в (3.1), учитывая (1.2), (2.1) и что при $\xi=0$ проявляет себя первый погранслой, получим

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xp}^{(s)} + \sigma_x^{(s+2+\varkappa)} = \varphi_1^{(s+\varkappa)} \\ &\sigma_{xyp}^{(s)} + \sigma_{xy}^{(s+1+\varkappa)} = \varphi_2^{(s+\varkappa)} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \xi = 0 \ (l = 0) \tag{3.2}$$

Условия (3.2) будут непротиворечивыми, то есть позволяют последовательно определить постоянные в решениях внутренней задачи и погранслоя, если $\varkappa = -2$. Запишем условия (3.2) в виде

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)}(\xi = 0), \quad \sigma_{xyp}^{(s)} = \varphi_2^{(s-2)} - \sigma_{xy}^{(s-1)}(\xi = 0) \tag{3.3}$$

Правые части (3.3) должны удовлетворять условиям (2.13), откуда находим следующие значения произволов внутренней задачи:

$$C_1^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\varphi_1^{(s)} - \sigma_x^{*(s)}(\xi = 0)\right] d\zeta$$

$$C_2^{(s)} = X_2^{(s)}(0) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}^{*(s)}(0,\ 1) + \sigma_{xy}^{*(s)}(0,\ -1)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi = 0)\, d\zeta - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_2^{(s-1)}\, d\zeta$$

$$C_4^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\sigma_x^{*(s)}(\xi = 0) - \varphi_1^{(s-2)}\right] d\zeta \tag{3.4}$$

$$\left(\varphi_i^{(0)} = \varphi_i, \quad \varphi_i^{(s)} \equiv 0, \quad s \neq 0, \quad i = 1,\ 2\right)$$

Если на краю $\xi = 1$ также заданы значения напряжений, то от этих условий вытекают те же значения произволов внутренней задачи, так как считается обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела. Перемещения будут определены с точностью жесткого смещения. Из условий отсутствия жесткого смещения

$$u(1,\ 0) = 0, \quad v(1,\ 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\substack{\xi=1\\ \zeta=0}} = 0 \tag{3.5}$$

определяются произволы $C_3^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ и $C_6^{(s)}$. Остаются неопределенными произволы погранслоя $A_n^{(s)}$ и $B_n^{(s)}$ ($B_n^{(s)}$ — произвол погранслоя, соответствующий краю $\xi = 1$). Для определения $A_n^{(s)}$ и $B_n^{(s)}$ можно применять приближенные методы, в частности, метод коллокации или метод Трефтца [9, 10].

Если на краю $\xi = 1$ заданы значения перемещений

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \tag{3.6}$$

то можно применять вариационный принцип Кастилиано [11], который в нашем случае примет вид

$$\int_{-1}^{1} \left[(u - \varphi_1)\,\delta\sigma_x + (v - \varphi_2)\,\delta\tau_{xz} \right]_{\xi=1} d\zeta = 0 \tag{3.7}$$

Учитывая, что $C_1^{(s)}$, $C_3^{(s)}$, $C_4^{(s)}$ и $A_n^{(s)}$ уже известны, то есть они не варьируются, из (3.7), используя (2.14), получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно произволов погранслоя $B_n^{(s)}$:

$$a_{nm} B_n^{(s)} + a_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1,\ 2, \ldots) \tag{3.8}$$

где

$$a_{nm} = \int_{-1}^{1} (u_n \sigma_m + v_n \tau_m)\, d\zeta$$

$$a_{0m}^{(s)} = \int_{-1}^{1} \left[u^{*(s-1)}(\xi = 1)\,\sigma_m + v^{*(s)}(\xi = 1)\,\tau_m \right] d\zeta -$$

$$- \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \left(\varphi_1^{(s-3)} \sigma_m + \varphi_2^{(s-3)} \tau_m \right) d\zeta$$

Через σ_n, τ_n, u_n, v_n обозначены коэффициенты при $A_n^{(s)}$ в выражениях соответственно для $\sigma_{xp}^{(s)}$, $\tau_{xzp}^{(s)}$, $u_p^{(s)}$, $v_p^{(s)}$, заданные формулой (2.4).

Таким образом, используя вариационное уравнение (3.7), мы находим оставшиеся произволы в формулах для напряжений и упругих перемещений. Постоянные $C_2^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ и $C_6^{(s)}$ характеризуют жесткое смещение, их можно определить, например, из условий отсутствия жесткого смещения (3.5). На значения $C_2^{(s)}$, $C_5^{(s)}$ и $C_6^{(s)}$, естественно, будут влиять значения произволов погранслоя $B_n^{(s)}$, определяемые из уравнений (3.8).

4. Рассмотрим случай, когда на торцах $\xi = 0, 1$ заданы значения перемещений

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta), \quad (\varphi_1, \varphi_2) \text{ при } \xi = 0,\ 1 \tag{4.1}$$

В этой задаче в силу того, что удовлетворены статические граничные условия, также можно применять вариационное уравнение Кастилиано, которое примет вид

$$\int_{-1}^{1} \left[(u-\varphi_1)\,\delta\sigma_x + (v-\varphi_2)\,\delta\tau_{xy}\right]_{\xi=0} d\zeta +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \left[(u-\varphi_1)\,\delta\sigma_x + (v-\varphi_2)\,\delta\tau_{xy}\right]_{\xi=1} d\zeta = 0 \qquad (4.2)$$

Используя (2.14), из (4.2) получим непротиворечивую систему, если $\varkappa = -4$. Система алгебраических уравнений имеет вид

$$C_1^{(s)} + a_n\left(A_n^{(s+1)} + B_n^{(s+1)}\right) + a_0^{(s)} = 0$$

$$\frac{2}{3}C_3^{(s)} + C_4^{(s)} + b_n\left(A_n^{(s)} + B_n^{(s)}\right) + c_n B_n^{(s-1)} + b_0^{(s)} = 0 \qquad (4.3)$$

$$C_3^{(s)} + 2C_4^{(s)} + c_n\left(A_n^{(s)} + B_n^{(s)}\right) + c_0^{(s)} = 0$$

$$d_{nm}A_n^{(s)} + d_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (4.4)$$

$$d_{nm}B_n^{(s)} + e_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (4.5)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2a_{11}}\int_{-1}^{1} u_n\,d\zeta, \qquad b_n = \frac{1}{2a_{11}}\int_{-1}^{1}(\zeta^2-1)\,v_n\,d\zeta$$

$$c_n = -\frac{1}{a_{11}}\int_{-1}^{1}\zeta u_n\,d\zeta, \qquad d_{nm} = \int_{-1}^{1}(u_n\sigma_m + v_n\tau_m)\,d\zeta$$

$$a_0^{(s)} = \frac{1}{2a_{11}}\int_{-1}^{1}\left(u^{*(s)}(\xi=0) + u^{*(s)}(\xi=1) +\right.$$

$$\left. + a_{11}u_0^{(s)}(\xi=1)\right)d\zeta - \frac{1}{2a_{11}}\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}\left(\varphi_1^{(s-2)} + \varphi_1^{(s-2)}\right)d\zeta \qquad (4.6)$$

$$b_0^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{2}(\zeta^2-1)\left(v^{*(s)}(\xi=0) + v^{*(s)}(\xi=1)\right) - \zeta u^{*(s)}(\xi=1) -\right.$$

$$\left. - a_{11}\zeta^2 u_0^{(s)}(\xi=1) + \frac{3}{2}a_{61}(\zeta^2-1)\,v_0^{(s)}(\xi=1)\right|d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}\zeta\varphi_1^{(s-2)}\,d\zeta - \frac{1}{2a_{11}}\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}(\zeta^2-1)\left(\varphi_2^{(s-3)} + \varphi_2^{(s-3)}\right)d\zeta$$

$$c_0^{(s)} = -\frac{1}{a_{11}} \int_{-1}^{1} \zeta \left(u^{*(s)}(\xi = 0) + u^{*(s)}(\xi = 1) + \right.$$

$$\left. + a_{11} u_0^{(s)}(\xi = 1)\right) d\zeta + \frac{1}{a_{11}} \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \zeta \left(\varphi_1^{(s-2)} + \psi_1^{(s-2)}\right) d\zeta$$

$$d_{0m}^{(s)} = \int_{-1}^{1} \left(u^{*(s-1)}(\xi = 0)\,\sigma_m + v^{*(s)}(\xi = 0)\,\tau_m\right) d\zeta -$$

$$- \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \left(\varphi_1^{(s-3)}\,\sigma_m + \varphi_2^{(s-3)}\,\tau_m\right) d\zeta$$

$$e_{0m}^{(s)} = \int_{-1}^{1} \left(u^{*(s-1)}(\xi = 1)\,\sigma_m + v^{*(s)}(\xi = 1)\,\tau_m\right) d\zeta -$$

$$- \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} \left(\psi_1^{(s-3)}\,\sigma_m + \psi_2^{(s-3)}\,\tau_m\right) d\zeta$$

Система уравнений (4.3)—(4.5) составляет полную систему для определения произволов внутренней задачи и погранслоя. После их определения по формулам, приведенным в пп. 1—2, определяются напряжения и упругие перемещения.

Сходимость процесса Кастилиано в общем случае доказана в [9], поэтому мы здесь не будем останавливаться на этом вопросе.

Из (4.3)—(4.6) видно, что $A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = A_n^{(1)} = B_n^{(1)} = 0$. Это означает, что погранслой в первом приближении не влияет на значения произволов внутренней задачи. Напряжения погранслоя будут порядка $O(\varepsilon^{-1})$, перемещения — $O(\varepsilon^{-1})$, то есть вблизи края погранслоем нельзя пренебрегать в силу того, что интенсивность напряжений погранслоя того же порядка, что и напряжения основного напряженного состояния.

В случае смешанных торцевых условий часть произволов внутренней задачи можно определить из условий (2.13), а для определения остальных величин применяются вышеуказанные приближенные методы.

В заключение автор благодарит Л. А. Агаловяна за внимание и руководство при выполнении работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 V 1976

Շ. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով ուսումնասիրվում է անիզոտրոպ շերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը, երբ շերտի երկայնական կողմերի վրա տրված են լարումների արժեքները, իսկ մյուս կողմերի վրա՝ տարբեր տիպի եզրային պայմաններ։

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է երկու տեսակի լուծումների գումարով՝ հիմնական լարվածային վիճակը բնութագրող լուծման և սահմանային շերտի տիպի։

Ցույց է տրվում եզրերում այդ երկու լուծումների կապման հնարավորությունը։

Քննարկվում է կիրառական և ասիմպտոտիկ մեթոդների կիրառության հնարավորությունը անիզոտրոպ նյութերի համար։ Ցույց է տրված, որ դասական տեսության կիրառման հնարավորությունը էապես կախված է առաձգական գործակիցների հարաբերությունների մեծությունից։ Վերլուծության է ենթարկված առաձգականության տարբեր գործակիցների դերը չդեֆորմացվող նորմալների վարկածի կիրառելիության վրա։ Ցույց է տրված, որ կիրառական տեսության ճշգրտումը առաջին հերթին պետք է կապել սահքային գործոնների ճշգրիտ հաշվառման հետ։

ON DETERMINATION OF STRESS-STRAIN STATE OF AN ANISOTROPIC STRIPE

SH. M. KHACHATRIAN

S u m m a r y

The determination of stress-strain state in a plane problem for an anisotropic stripe is considered. The stripe plane is assumed to coincide with the plane of the materials elastic symmetry. The stress values on the longitudinal sides of the stripe and the different combinations of the boundary conditions on its edges are given.

The asymptotic method of integration is applied and the solution of the problem is presented as the sum of two solutions: the interior one and that of boundary layer. The suitability of applied and asymptotic methods for anisotropic materials is discussed. The applicability of the above methods is shown to depend strictly on the ratio of elastic coefficients. The effect of specific coefficients of elacticity on the applicability of the hypothesis on nondeformable normals is analysed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. МТТ, 1966, № 6.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, 1957, т. XII, вып. 5.
4. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
5. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АН АрмССР. Механика, 1973, т. XXVI, № 2.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
8. *Перекальский С. Н.* Экспериментальное определение полного комплекса характеристик упругих свойств и прочности стекловолокнистых анизотропных материалов. Автореферат кандидатской диссертации. Челябинск, 1970.
9. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
10. *Прокопов В. К.* Однородные решения теории упругости и их приложение к теории тонких пластинок. Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 3, М., «Наука», 1966.
11. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.—Л., ОГИЗ, 1947.