ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 6, 1976 Механика

К. Г. ГУЛЯН

К РЕШЕНИЮ ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СТРИНГЕРА ДВУМ КЛИНОВИДНЫМ УПРУГИМ ПЛАСТИНАМ

Контактные задачи о передаче нагрузки от накладок (стрингеров) малой толщины упругим телам в последнее время, ввиду их большой практической ценности, получили значительное развитие. Достаточно полная библиография работ по указанной области теории упругости содержится в [1]. Здесь же вкратце остановимся на некоторых работах, посвященных задачам о передаче нагрузки от стрингера клиновидной упругой пластине.

Первой работой, относящейся к передаче нагрузки от стрингера клиновидной упругой пластине, по-видимому, следует считать работу [2]. В этой работе в рамках известных физических предположений, предложенных в [3], получено эффективное решение в замкнутой простой форме задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера упругой пластине в виде полуплоскости, представляющей частный случай клиновидной пластины. Основой классифицирования указанной задачи в ряду задач для клиновидной пластины может послужить еще тот факт, что в [2] исследование ведется при помощи интегрального преобразования Меллина, являющегося основным математическим аппаратом в граничных задачах теории упругости для клиновидных бесконечных областей. Эта же самая задача впоследствии была рассмотрена в работах [4, 5].

Замкнутое решение, доведенное до числовых результатов, задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера клиновидной пластине с произвольным углом раствора построено в работе [6]. Здесь, как в [2], решение задачи сводится к решению определенного разностного уравнения для преобразования Меллина от неизвестного тангенциального контактного напряжения. Методика решения этого уравнения во многом аналогична методике, изложенной в [2]. Эта же самая задача повторно была рассмотрена в работе [7], где окончательное решение выражено в квадратурах.

К обсуждаемому кругу задач примыкают также задачи о контакте полубесконечных балок с упругим клином, которым посвящены работы [8, 9, 10].

Контактная задача о передаче нагрузки от накладки конечной длины клину с произвольным углом раствора исследована в нашей работе [11]. Эта же самая задача в случае стрингера переменного поперечного сечения накладки рассмотрена в [12]. В другой нашей работе [13] рассматривается задача о передаче нагрузки двум одинаковым клиновидным упругим пластинам от накладки конечной длины, вдоль которой они соединены между собой.

В настоящей работе приводится исследование двух контактных задач о передаче нагрузки от полубесконечной накладки двум одинаковым клиновидным упругим пластинам с произвольным углом раствора. В первой задаче предполагается, что грани клиньев свободны от напряжений, а во второй задаче — они защемлены.

Отметим, что первая задача ранее была рассмотрена в работе [14]. При помощи известных представлений перемещений интегралами Меллина решение исходной задачи в этой работе сведено к некоторому разностному уравнению, после чего записано его общеизвестное решение в квадратурах без дальнейшего их исследования в смысле возможного упрощения. Последнее необходимо для выяснения структуры и закономерностей изменения важных механических характеристик — тангенциальных и нормальных контактных напряжений. Кроме того, отсутствие такого исследования затрудняет получение числовых результатов.

В настоящей же работе исследование упомянутых выше задач проводится методом, в сущности отличным после некоторого этапа от предложенного в [14] и представляющим некоторое развитие методов, изложенных в [2] и [6]. Исходным пунктом у нас служит построение функций влияния для клина с произвольным углом раствора от единичных радиальных и тангенциальных сосредоточенных сил. После этого на основе построенных функций влияния обе поставленные задачи формулируются в виде систем интегро-дифференциальных уравнений при определенных граничных условиях. Затем при помощи преобразования Меллина эти системы преобразуются в системы разностных уравнений, к которым применяется метод работ [2] и [6] в несколько видоизмененной форме. Таким способом удается получить замкнутое и эффективное решение разбираемых задач, допускающих числовые реализации. Получены простые расчетные формулы для тангенциальных и нормальных контактных напряжений в окрестности концов накладки. Исходя из этих формул, проведены вычисления и на основе этих числовых результатов построены графики тангенциальных и нормальных контактных напряжений.

§ 1. *Постановка задач и вывод определяющих уравнений*

Пусть две клиновидные пластины, изготовленные из одинакового материала и с одинаковым углом раствора, сцеплены между собой посредством упругой полубесконечной накладки.

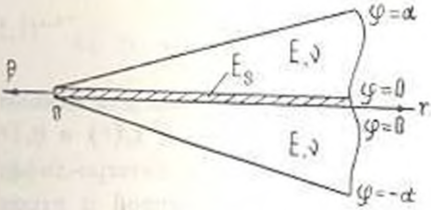
В первой задаче предполагается, что грани $\varphi = -\alpha$ и $\varphi = \alpha$ клиньев свободны от внешних напряжений, а во второй задаче — они защемлены. Кроме того, пусть в первой задаче к концу накладки приложена горизонтальная сосредоточенная сила P (фиг. 1), а во второй задаче — она приложена на расстоянии a от концов накладки (фиг. 2).

Основные предположения сводятся к следующему.

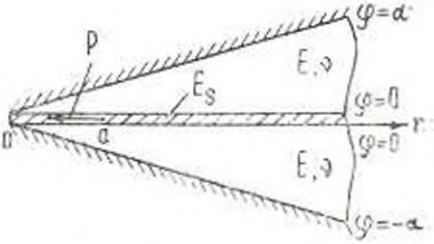
Вследствие малости толщины накладки считается, что ее толщина в процессе деформации не изменяется.

С другой стороны, считается, что под действием только горизонтальных напряжений накладка находится в одноосном напряженном состоянии.

Относительно клиньев же считается, что они находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии. Требуется определить законы распределения нормальных и тангенциальных напряжений вдоль линии соединения накладки с гранями клина.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Очевидно, что при исследовании этих задач нельзя пренебречь нормальными контактными напряжениями. Они здесь учитываются согласно только что упомянутой гипотезе о постоянстве вертикальных упругих перемещений на линии соединения стрингера с клиньями.

Исходя из этих предположений, находим, что как в первой, так и во второй задаче на линии сцепления накладки с гранями клина должны выполняться условия

$$\frac{du_r^{(2)}}{dr} = \varepsilon_r^{(1)}, \qquad u_\varphi^{(2)} = 0 \quad (0 < r < \infty) \tag{1.1}$$

Здесь $u_r^{(2)}$ и $u_\varphi^{(2)}$ — соответственно радиальные и тангенциальные перемещения граничных точек упругих клиньев, лежащих на грани $\varphi=0$, а $\varepsilon_r^{(1)}$ — осевая деформация накладки.

Нормальные и тангенциальные контактные напряжения, подлежащие определению, обозначим $q(r)$ и $\tau(r)$ соответственно. Теперь в случае первой задачи, составив уравнение равновесия для некоторой части накладки и воспользовавшись законом Гука, будем иметь

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{du_r^{(1)}}{dr} = \frac{1}{E_s A_s}\left[P - 2h\int_0^r \tau(r_0)\,dr_0\right] \tag{1.2}$$

где E_s — модуль упругости накладки, A_s — площадь прямоугольного поперечного сечения накладки, h — ширина накладки.

Аналогичным образом в случае второй задачи будем иметь

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{du_r^{(1)}}{dr} = \frac{1}{E_s A_s}\left[PH(r-a) - 2h\int_0^r \tau(r_0)\,dr_0\right] \tag{1.3}$$

Здесь $H(r-a)$ — функция Хевисайда.

Легко видеть, что функция $\tau(r_0)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \tau(r_0)\, dr_0 = \frac{P}{2h} \tag{1.4}$$

Далее, введя безразмерные величины

$$\tau(r) = \frac{P}{2h}\,\tau_0(r), \quad q(r) = \frac{P}{2h}\,q_0(r) \tag{1.5}$$

и приняв во внимание известные выражения функций влияния для клиньев, находим, что условия (1.1) сводят определение функций $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ (вследствие (1.2) и (1.3)) к решению следующих систем интегро-дифференциальных уравнений, относящихся соответственно к первой и второй задачам:

$$\frac{1}{4\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{\sin 2\alpha s - s\sin 2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\, ds\right]\tau_0(r_0)\, dr_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s + s[(1+\nu)s+2]\sin^2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\, ds\right] q_0(r_0)\, dr_0\right\} =$$

$$= \frac{1}{E_s A_s}\left[1 - \int_0^r \tau_0(r_0)\, dr_0\right] \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{4\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s + s[(1+\nu)s-2]\sin^2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\, ds\right]\tau_0(r_0)\, dr_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{\sin 2\alpha s + s\sin 2\alpha}{s(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)}\, ds\right] q_0(r_0)\, dr_0\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{2\varkappa\sin 2\alpha s + 2s\sin 2\alpha}{s[4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2]}\, ds\right]\tau_0(r_0)\, dr_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s[(1+\nu)s+2]\sin^2\alpha}{s[4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2]}\, ds\right] q_0(r_0)\, dr_0\right\} =$$

$$= \frac{1}{E_s A_s}\left[H(r-a) - \int_0^r \tau_0(r_0)\, dr_0\right] \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2\pi Ehi}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^\infty\left[\int_L\left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s[(1+\nu)s-2]\sin^2\alpha}{s[4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2]}\, ds\right]\tau_0(r_0)\, dr_0 - \right.$$

$$-\frac{d}{dr}\int_0^\infty \left[\int_L \left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{2\varkappa \sin 2\alpha s - 2s\sin 2\alpha}{s\left[4\varkappa \sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2\right]}\, ds\right] q_0(r_0)\, dr_0 = 0$$

Применив к уравнениям системы (1.6) преобразование Меллина, после несложных выкладок получим систему разностных уравнений для изображений

$$\begin{aligned} &L_{11}^{(1)}(\alpha, s)\, T_0(s+1) + L_{12}^{(1)}(\alpha, s)\, Q_0(s+1) = -\lambda \frac{T_0(s+2)}{s+1} \\ &L_{21}^{(1)}(\alpha, s)\, T_0(s+1) - L_{22}^{(1)}(\alpha, s)\, Q_0(s+1) = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$L_{11}^{(1)}(\alpha, s) = \frac{\sin 2\alpha s - s\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha}$$

$$L_{12}^{(1)}(\alpha, s) = \frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s + s\left[(1+\nu)s + 2\right]\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha}$$

$$L_{21}^{(1)}(\alpha, s) = \frac{(1-\nu)\sin^2\alpha s + s\left[(1+\nu)s - 2\right]\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha}$$

$$L_{22}^{(1)}(\alpha, s) = \frac{\sin 2\alpha s + s\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha} \tag{1.9}$$

$$T_0(s) = \int_0^\infty r_0^{s-2}\tau_0(r_0)\, dr_0, \qquad Q_0(s) = \int_0^\infty r_0^{s-1} q_0(r_0)\, dr_0, \qquad \lambda = \frac{2Eh}{E_s A_s}$$

Из условия (1.4) непосредственно следует, что

$$T_0(1) = 1 \tag{1.10}$$

В случае системы уравнений (1.7) для изображений получим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} &L_{11}^{(2)}(\alpha, s)\, T_0(s+1) + L_{12}^{(2)}(\alpha, s)\, Q_0(s+1) = -\lambda_1 \frac{T_0(s+2)}{s+1} + \lambda_1 \frac{a^{s-1}}{s+1} \\ &L_{21}^{(2)}(\alpha, s)\, T_0(s+1) - L_{22}^{(2)}(\alpha, s)\, Q_0(s+1) = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$L_{11}^{(2)}(\alpha, s) = \frac{2\varkappa \sin 2\alpha s + 2s\sin 2\alpha}{4\varkappa \sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2}$$

$$L_{12}^{(2)}(\alpha, s) = \frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s\left[(1+\nu)s + 2\right]\sin^2\alpha}{4\varkappa \sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2}$$

$$L_{21}^{(2)}(\alpha, s) = \frac{2\varkappa(1-\nu)\sin^2\alpha s - 2s[(1+\nu)s-2]\sin^2\alpha}{4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2}$$

$$L_{22}^{(2)}(\alpha, s) = \frac{2\varkappa\sin 2\alpha s - 2s\sin 2\alpha}{4\varkappa\sin^2\alpha s + 4s^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2} \tag{1.12}$$

$$\lambda_1 = \frac{Eh}{E_s A_s}, \qquad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

Из второго уравнения системы (1.8) можем записать

$$Q_0(s+1) = \frac{L_{21}^{(1)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(1)}(\alpha, s)}\, T_0(s+1) \tag{1.13}$$

Подставив выражение $Q_0(s+1)$ из (1.13) в (1.8), будем иметь

$$\frac{T_0(s+2)}{T_0(s+1)} = -\frac{E_s A_s}{2Eh}\,\frac{s+1}{s}\,F_1(s) \tag{1.14}$$

Здесь

$$F_1(s) = s\,\frac{-b\sin^4\alpha s + 4\sin^2\alpha s + cs^2\sin^2\alpha s + ds^4 - es^2}{(\sin 2\alpha s + s\sin 2\alpha)(\sin^2\alpha s - s^2\sin^2\alpha)} \tag{1.15}$$

$$b = 4 - (1-\nu)^2,\quad c = 2(1-\nu^2)\sin^2\alpha,\quad d = (1+\nu)^2\sin^4\alpha,\quad e = 4\sin^2\alpha$$

Из (1.13) согласно (1.10) получим

$$Q_0(1) = \int_0^\infty q_0(r_0)\,dr_0 = -\frac{2\sin^2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \tag{1.16}$$

Обращаясь ко второй системе (1.11), последовательно находим

$$Q_0(s+1) = \frac{L_{21}^{(2)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(2)}(\alpha, s)}\, T_0(s+1) \tag{1.17}$$

$$\frac{T_0(s+2)}{T_0(s+1)} = -\frac{E_s A_s}{2Eh}\,\frac{s}{s-1}\,F_2(s) + \frac{a^{s+1}}{T_0(s+1)} \tag{1.18}$$

где

$$F_2(s) = -\frac{(s^2-1)(-b\varkappa^2\sin^4\alpha s + 4\varkappa^2\sin^2\alpha s - c\varkappa s^2\sin^2\alpha s + ds^4 - es^2)}{s(\varkappa\sin 2\alpha s - s\sin 2\alpha)\left[\varkappa\sin^2\alpha s + s^2\sin^2\alpha - \left(\frac{1-\varkappa}{2}\right)^2\right]} \tag{1.19}$$

В случае второй задачи условие (1.16) приобретает вид

$$Q_0(1) = \int_0^\infty q_0(r_0)\,dr_0 = \frac{2\sin^2\alpha}{2\varkappa\alpha - \sin 2\alpha} \tag{1.20}$$

Следовательно, рассматриваемые задачи сводятся к решению разностных уравнений (1.14) и (1.18) при условии (1.10).

§ 2. *Решение разностных уравнений*

Сначала рассмотрим уравнение (1.14). Введем новую функцию формулой

$$T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)=H(s)\,U(s),\qquad H(s)=\left[\frac{E_sA_s}{2Eh}F_1(0)\right]^{s+\frac{1}{2}}\frac{\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\cos\pi s}\tag{2.1}$$

Учитывая (2.1), уравнение (1.14) представим в виде

$$\frac{U\left(s+\frac{1}{2}\right)}{U\left(s-\frac{1}{2}\right)}=f(s),\qquad f(s)=\frac{F_1(s)}{F_1(0)},\qquad F_1(0)=\frac{4}{2\alpha-\sin 2\alpha}\tag{2.2}$$

Так как $f(s)$—целая функция, то на основании известной теоремы Вейерштрасса имеет место формула

$$f(s)=\frac{F_1(s)}{F_1(0)}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-s^2/s_k^2)(1-s^2/\bar{s}_k^2)}{(1-s^2/t_k^2)(1-s^2/\bar{t}_k^2)}\tag{2.3}$$

Здесь s_k—нули функции $-b\sin^4\alpha s+4\sin^2\alpha s+cs^2\sin^2\alpha s+ds^4-es^3$, а t_k—нули функции $(\sin 2\alpha s+s\sin 2\alpha)(\sin^2\alpha s-s^2\sin^2\alpha)$ в комплексной плоскости s, для которых $\mathrm{Re}\,(s_k,\ t_k)>0$, $\mathrm{Im}\,(s_k,\ t_k)>0$, $\mathrm{Re}\,s_k<\mathrm{Re}\,s_{k+1}$, $\mathrm{Re}\,t_k<\mathrm{Re}\,t_{k+1}$. При этом каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность.

Легко показать, что для функции $U(s)$ будет иметь место представление

$$U(s)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+s_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+t_k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+s_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+t_k\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{t_k}{s_k}\right)^{2s}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\bar{s}_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+\bar{t}_k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-s+\bar{s}_k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\bar{t}_k\right)}\left(\frac{\bar{t}_k}{\bar{s}_k}\right)^{2s}\tag{2.4}$$

Это бесконечное произведение сходится в полосе $\frac{1}{2}\leqslant\mathrm{Re}\,s\leqslant\frac{1}{2}$.

Из (2.4) следует, что функция $U(s)$ удовлетворяет условиям

$$U(s)\,U(-s)=1,\qquad U(0)=U\left(\frac{1}{2}\right)=U\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \tag{2.5}$$

Очевидно, что функция $H(s)$ регулярна в полосе $-\frac{3}{2}<\operatorname{Re}s<\frac{1}{2}$.

С другой стороны, поскольку согласно (2.4) полюсы функции $U(s)$ расположены в области $|\operatorname{Re}s|>\frac{1}{2}$, то функция $T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)$ будет регулярной в полосе $a<\operatorname{Re}s<\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$.

Отметим, что, как в работе [6], для функции $U(s)$ имеет место асимптотическое равенство

$$e^{-\varepsilon|s|}\,|U(s)|\to 0 \quad \text{для всех } \varepsilon>0, \text{ когда } |\operatorname{Im}s|\to\infty \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам понадобится интегральное представление для функции $U(s)$, что согласно [6] имеет вид

$$\ln U(s)=\int_0^s \ln f(z)\,dz+i\int_0^\infty \frac{\ln f(s+it)-\ln f(s-it)}{1+e^{2\pi t}}\,dt \tag{2.7}$$

Обратимся теперь к уравнению (1.18). Соответствующее однородное уравнение, как и выше, запишется в виде

$$\frac{U\left(s+\frac{1}{2}\right)}{U\left(s-\frac{1}{2}\right)}=f(s) \tag{2.8}$$

где положено

$$T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)=H(s)\,U(s),\qquad H(s)=\left|\frac{E_s A_s}{2Eh}F_2(0)\right|^{s+\frac{1}{2}}\frac{s-\frac{1}{2}}{\sin\pi s}$$
$$f(s)=\frac{F_2(s)}{F_2(0)},\qquad F_2(0)=\frac{16\,(x^2\alpha^2-\sin^2\alpha)}{(1+x)^2\,(2x\alpha-\sin 2\alpha)} \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.8) строится вполне аналогичным способом. Легко проверить, что функция $H(s)$ из (2.9) регулярна в полосе $0<\operatorname{Re}s<1$, в то время как полюсы функции $U(s)$ расположены в области $|\operatorname{Re}s|>\frac{1}{2}$.

Из сказанного выше следует, что функция $T_0\left(s+\frac{3}{2}\right)$ будет регулярной в полосе $a<\operatorname{Re}s<b$, $-\frac{1}{2}<a<0$, $\frac{1}{2}<b<1$. В данном случае для функции $U(s)$ имеет место то же самое асимптотическое равенство (2.6).

После того, как известно решение однородного уравнения (2.8), при помощи интегрального преобразования Лапласа можно получить решение неоднородного уравнения (1.18). С этой целью можем записать, что

$$-\frac{E_s A_1}{3Eh}\frac{s}{s-1}F_2(s)=\frac{T_0^*(s+2)}{T_0^*(s+1)} \tag{2.10}$$

где $T_0^*(s+1)$ — решение указанного однородного уравнения.

Подставляя теперь выражение (2.10) в (1.18), будем иметь уравнение

$$\frac{T_0(s+2)}{T_0^*(s+2)}=\frac{T_0(s+1)}{T_0^*(s+1)}+\frac{a^{s+1}}{T_0^*(s+2)} \tag{2.11}$$

что после некоторых преобразований перейдет в следующее:

$$R(s+2)-R(s+1)=\varphi(s+1) \tag{2.12}$$

где

$$R(s)=\frac{T_0(s)}{T_0^*(s)},\qquad \varphi(s)=\frac{a^s}{T_0^*(s+1)} \tag{2.13}$$

Построив решение последнего уравнения при помощи двустороннего преобразования Лапласа, решение исходного уравнения (2.11) можно представить формулой

$$T_0(s+1)=-\frac{T_0^*(s+1)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^w}{e^w-1}\Phi(w)\,e^{-w(s+1)}\,dw \tag{2.14}$$

где

$$\Phi(w)=\int_{c-1-i\infty}^{c-1+i\infty}\frac{a^{s+1}}{T_0^*(s+2)}e^{w(s+1)}\,ds\qquad (b+1<c<2,\quad 0<b<1) \tag{2.15}$$

§ 3. *Основные свойства решений и числовые результаты*

Решения поставленных задач теперь могут быть получены при помощи формулы обращения Меллина. Для напряжения $\tau_0(r)$ находим

$$\tau_0(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_L r^{-s}\,T_0(s)\,ds \tag{3.1}$$

Здесь L берется в виде бесконечной прямой, параллельной мнимой оси плоскости комплексной переменной s и лежащей в полосе регулярности функции $T_0(s)$.

Учитывая формулы (2.1), в первой задаче для тангенциальных и нормальных контактных напряжений соответственно будем иметь

$$\tau_0(r) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{E_s A_s}{2Eh}F_1(0)\right]^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}} \int\limits_L \left[\frac{E_s A_s}{2Eh}\frac{F_1(0)}{r}\right]^s \frac{\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\cos \pi s} U(s)\,ds \tag{3.2}$$

$$(0 < r < \infty)$$

$$q_0(r) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{E_s A_s}{2Eh}F_1(0)\right]^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}} \int\limits_L \left[\frac{E_s A_s}{2Eh}\frac{F_1(0)}{r}\right]^s \times$$

$$\times \frac{L_{21}^{(1)}\left(\alpha,\ s+\frac{1}{2}\right)}{L_{22}^{(1)}\left(\alpha,\ s+\frac{1}{2}\right)} \frac{\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\cos \pi s} U(s)\,ds \tag{3.3}$$

В последней формуле

$$\frac{L_{21}^{(1)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(1)}(\alpha, s)} = \frac{(1-\nu)\sin^2 \alpha s - s[(1+\nu)s - 2]\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha s + s\sin 2\alpha}$$

Для вычисления интегралов, входящих в (3.2) и (3.3), применяется теорема о вычетах.

Отметим, что в последних формулах при малых $r\,(r<1)$ путь интегрирования L замыкается слева, а при больших $r\,(r>1)$ — справа. Из этих формул находим, что если первый полюс функции $U(s)$ удовлетворяет условию $\mathrm{Re}\, s = -\frac{3}{2}$, то как $\tau_0(r)$, так и $q_0(r)$ на конце линии контакта имеют логарифмическую особенность для угла $\alpha_{\text{кр}}$, который определяется из условия

$$\alpha_{\text{кр}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\nu}} \tag{3.4}$$

Если же $\mathrm{Re}\, s < -\frac{3}{2}$ и $\alpha < \alpha_{\text{кр}}$, то они ограничены в точке $r = 0$. При $\mathrm{Re}\, s > -\frac{3}{2}$ и $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ они в этой точке имеют особенности порядка

$$\tau_0(r) = 0(r^{\alpha_1-1}), \quad q_0(r) = 0(r^{\alpha_1-1}), \quad \alpha_1 = \mathrm{Re}\, s_k, \quad (0 < \mathrm{Re}\, s_k < 1)$$

Отметим, что значения параметра α_1 при различных углах раствора даются табл. 1.

Таблица 1

α		$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
α_1	ν_1	1	0.719562	0.700768	0.5
	ν_2	1	0.727221	0.708571	0.5
	ν_3	1	0.732658	0.712947	0.5

При этом, когда $\alpha = \pi$, нормальные и тангенциальные контактные напряжения содержат осцилляционные множители в виде косинусов и синусов, аналогично известному решению В. А. Абрамова [15].

Обращаясь теперь к интегралам (3.2) и (3.3), в результате вычисления необходимых вычетов подынтегральных функций получим при малых $r(r<1)$ следующие разложения*:

$$\tau_0(r) = \sum_{k=1,2,\ldots} r^{s_k-1}\operatorname{Re}\left(2B_0 r^{i\operatorname{Im} s_k}\right) + \sum_{n=1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{n-1}\operatorname{Re}\left(2B_n r^{s_k}\right) +$$

$$+ \sum_{m=-2,-4,\ldots} (-1)^{m-1} A_m r^{-m-2}$$

$$q_0(r) = \sum_{k=1,2,\ldots} r^{s_k-1}\operatorname{Re}\left[2B_0 L(\alpha, -s_k)\, r^{i\operatorname{Im} s_k}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{n-1}\operatorname{Re}\left[2B_n L(\alpha, -s_k-n) r^{s_k}\right] +$$

$$+ \sum_{m=-2,-4,\ldots} (-1)^{m-1} L(\alpha, m+1) A_m r^{-m-2} \tag{3.5}$$

где

$$B_n = \frac{1}{n!}\left|\frac{E_s A_s}{2Eh} F_1(0)\right|^{-s_k-n} \frac{\pi(s_k+n)}{\sin \pi s_k} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(t_k+s_k+n+1)\,\Gamma(\bar{s}_k - s_k - n)\,\Gamma(\bar{t}_k + s_k + n + 1)}{\Gamma(1+2s_k+n)\,\Gamma(t_k - s_k - n)\,\Gamma(\bar{s}_k + s_k + n + 1)\,\Gamma(\bar{t}_k - s_k - n)} \times$$

$$\times \left(\frac{t_k \bar{t}_k}{s_k \bar{s}_k}\right)^{-(2s_k+2n+2)}$$

$$A_m = (m+1)\left|\frac{E_s A_s}{2Eh} F_1(0)\right|^{m-1} U\left(m+\frac{1}{2}\right), \qquad L(\alpha, s) = \frac{L_{21}^{(1)}(\alpha, s)}{L_{22}^{(1)}(\alpha, s)}$$

При больших же $r(r>1)$ будем иметь

$$\tau_0(r) = \sum_{n=0,1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{-n-2}\left[(-1)^{n-1}A_n + \operatorname{Re}\left[2D_n r^{-t_k}\right]\right]$$

$$q_0(r) = \sum_{n=0,1,2,\ldots}\sum_{k=1,2,\ldots} r^{-n-2}\left[(-1)^{n-1}L(\alpha, n+1) A_n +\right.$$

$$\left. + \operatorname{Re}\left[2D_n L(\alpha, t_k+n+1)\, r^{-t_k}\right]\right] \tag{3.6}$$

где

---

* В этих разложениях $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ у подынтегральных функций появляются двойные полюсы и соответствующие разложения здесь не приводятся.

$$D_k = -\frac{1}{n!}\left|\frac{E_s A_s}{2Eh}F_1(0)\right|^{t_k+n+1}\frac{\pi(t_k+n+1)}{\sin \pi t_k}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s_k+t_k+n+1)\,\Gamma(\bar{s}_k+t_k+n+1)\,\Gamma(\bar{t}_k-t_k-n)}{\Gamma(s_k-t_k-n)\,\Gamma(2t_k+n+1)\,\Gamma(\bar{s}_k-t_k-n)\,\Gamma(\bar{t}_k+t_k+n+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{t_k\bar{t}_k}{s_k\bar{s}_k}\right)^{2t_k+2n+1}$$

Для получения числовых результатов, которые осуществлены на «Наири-2», были рассмотрены три случая компановки стрингера с упругими клиньями. При этом считалось, что стрингер изготовлен из легированной стали с упругими константами $E_s = 2.1\cdot 10^6$ $кг/см^2$, $\nu_s = 0.30$, а клинья изготовлены из прокатного цинка, прокатной меди и свинца с упругими константами соответственно $E = 0.84\cdot 10^6$ $кг/см^2$; $1.1\cdot 10^6$ $кг/см^2$, $0.17\cdot 10^6$ $кг/см^2$; $\nu = 0.27$, 0.34, 0.42. Случаи сочетания материалов стрингера и клиньев в указанной последовательности будем именовать случаями I, II и III. В этих случаях по формулам (3.5) и (3.6) были вычислены тангенциальные и нормальные контактные напряжения при малых и больших r ($r<1$; $r>1$), когда угол раствора клиньев $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π.

Для иллюстрации приведем здесь выражения функций $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ в случае I при $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\begin{aligned}\tau_0(r) &= 1.526 - 1.059\,r + 0.172\,r^2 - 0.019\,r^3 + 0.001\,r^4 - 0.00004\,r^5 - \cdots\\ q_0(r) &= -1.526 + 2.796\,r - 0.781\,r^2 + 0.067\,r^3 - 0.003\,r^4 + 0.0002\,r^5 - \cdots\end{aligned}\right\}\quad (r<1)$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_0(r) &= 1.945\,r^{-2} - 2.549\,r^{-3} + 11.003\,r^{-4} - 135.953\,r^{-5} + \cdots\\ q_0(r) &= -1.631\,r^{-3} + 16.944\,r^{-4} - 209.367\,r^{-5} + \cdots\end{aligned}\right\}\quad (r>1)$$

Эти функции в остальных случаях имеют аналогичную структуру.

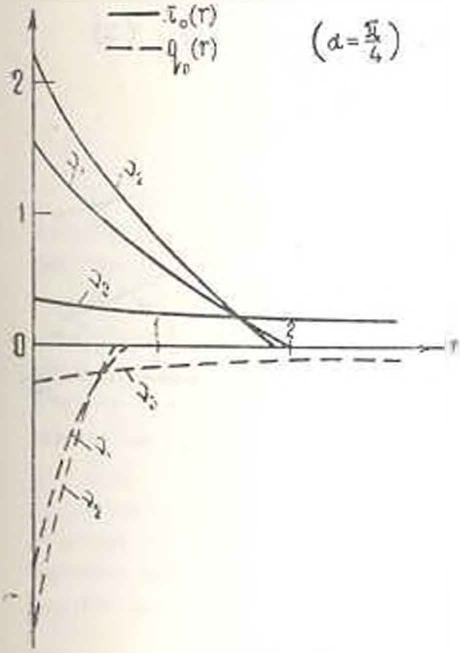
Исходя из последних, построены графики функций $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$, показывающие закономерности их изменения. На фиг. 3, 4, 5 и 6 приведены графики напряжений $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ при малых r и при различных углах α. В результате сравнения этих графиков можно сделать следующие выводы:

а) с увеличением E (α-постоянно) коэффициенты интенсивности напряжений вблизи конца $r=0$ увеличиваются;

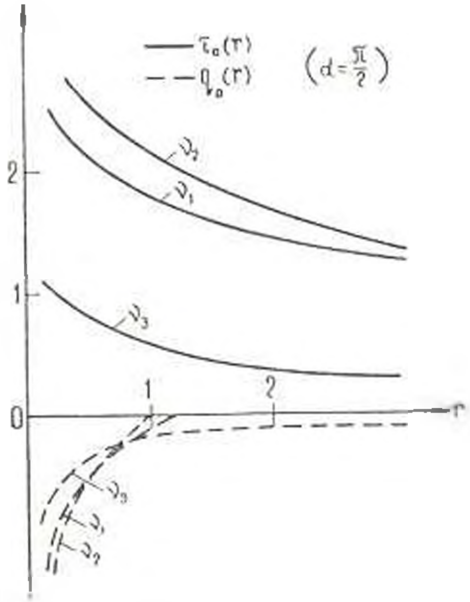
б) значения нормальных напряжений $q_0(r)$ ($0<r<\infty$) на линии контакта значительно меньше значений тангенциальных напряжений $\tau_0(r)$.

Далее, на фиг. 7, 8 и 9 приведены графики напряжений $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$ при различных E. Сопоставление этих графиков показывает, что:

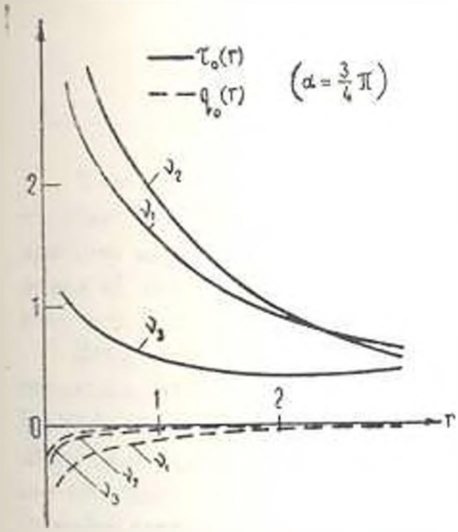
а) с возрастанием значений α ($\alpha\neq\pi$) при одинаковых E коэффициенты интенсивности напряжений $\tau_0(r)$ вблизи конца $r=0$ увеличиваются, а для коэффициентов интенсивности напряжений $q_0(r)$ имеет место обратный эффект;



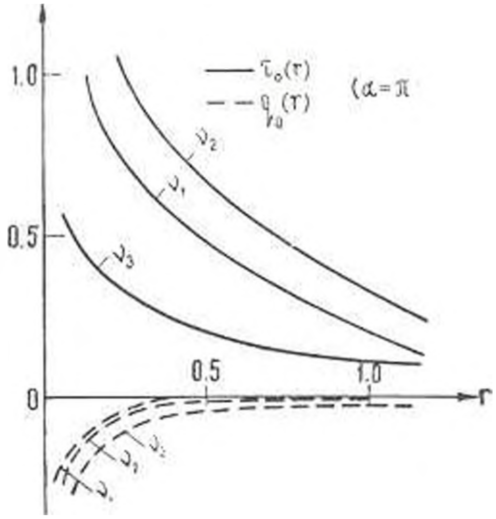
Фиг. 3.



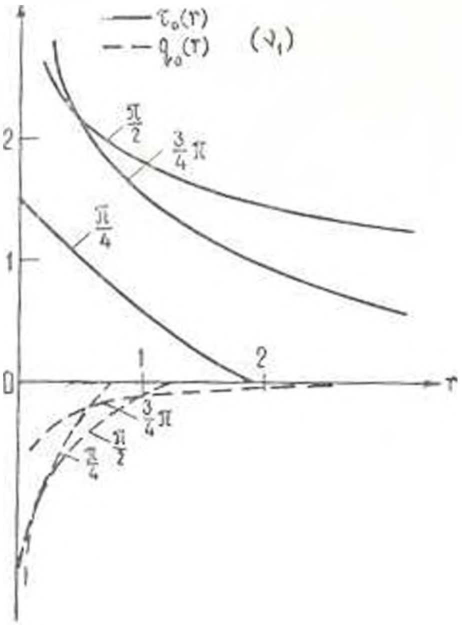
Фиг. 4.



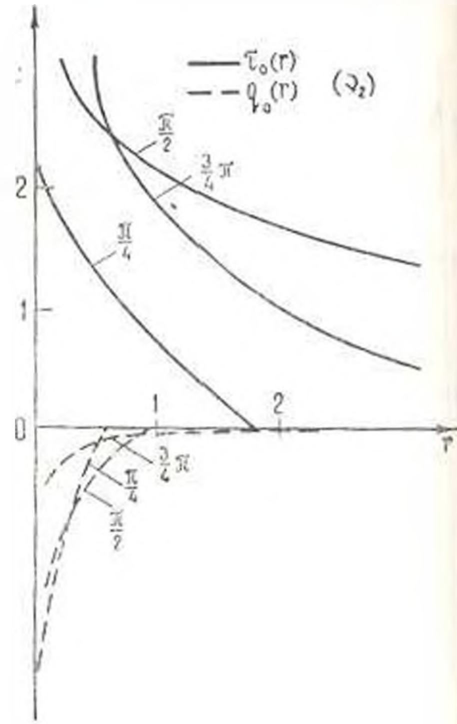
Фиг. 5.



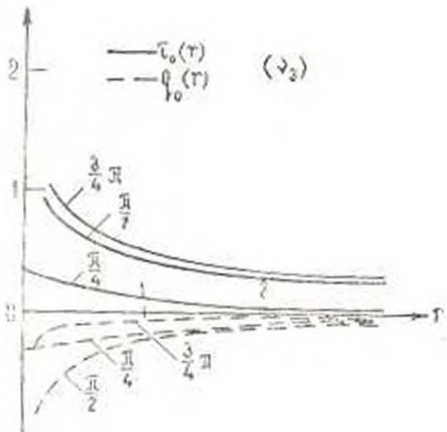
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

б) при $\alpha = \pi$ коэффициенты интенсивности напряжений резко уменьшаются.

В заключение автор благодарит С. М. Мхитаряна за ценные замечания.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 13 VII 1976

Կ. Գ. ԳՈՒԼՅԱՆ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ԱՄՐԱՆԱԿԻՑ ԵՐԿՈՒ ՍԵՊԱՁԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻՆ ԲԵՌԻ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է կիսաանվերջ վերադիրից կամայական անկյան բացվածքով երկու սեպաձև առաձգական սալերին բեռի փոխանցման երկու կոնտակտային խնդիրներ։ Ենթադրված է, որ առաջին խնդրում սեպի եզրերը ազատ են արտաքին լարումներից, իսկ երկրորդում՝ ամրացված են։ Երկու խնդիրներն էլ մաթեմատիկորեն ձևակերպված են որոշակի եզրային պայմաններով ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների տեսքով։ Այնուհետև Մելլինի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ այդ սիստեմները բերված են տարբերական հավասարումների սիստեմների։

Դրված խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ։

Առաջին խնդրում շոշափող և նորմալ կոնտակտային լարումների համար վերադիրի ծայրակետերի շրջակայքում ստացված են պարզ հաշվարկային բանաձևեր։ Ելնելով բանաձևերից, կառուցված են շոշափող և նորմալ կոնտակտային լարումները նկարագրող գծագրերը։

ON THE SOLUTION OF TWO CONTACT PROBLEMS ON THE TRANSFER OF LOAD FROM A SEMI-INFINITE STIFFENER TWO WEDGESHAPED ELASTIC PLATES

K. G. GULIAN

Summary

Two contact problems on the transfer of load from semi-infinite stiffener to the similar wedgeshaped elastic plates with an arbitrary aperture angle are examined. In the first problem it is assumed that the edges of the wedge are free from stress while in the second problem they are fastened.

Both problems are formulated as systems of integral-differential equations under definite boundary conditions. Then with the help of Mellin's transformation these systems are converted into systems of difference equations. Closed and effective solutions of the problems are obtained which permit numerical realizations. Simple calculating formulas are derived for tangent and normal contact stresses in the vicinity of the wedge terminals. Calculations are given resulting from these formulas and on the basis of these numerical results graphs of tangent and normal contact stresses are drawn.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Е.* Передача нагрузки от краевого ребра жесткости к листу (пересмотр задачи Мелана). Прикл. механика. Тр. Америк. о-ва. инж.-механ., сер. Е, 1967, т. 31, № 3.
2. *Koiter W. T.* On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
3. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr.-Arch, 1932, Bd. 3. Heft 2, s. 123.
4. *Каландия А. И.* О напряженном состоянии в пластинках, усиленных ребрами жесткости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, 538—543.
5. *Воробьев В. А., Попов Г. Я.* Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2, 354—358.
6. *Alblas J. B., Kuypers W. J.* On the Diffusion of Load from a Stiffener into an Inginite Weggeshaped Plate. Applied Scientific Research, Series A, 1965—1966, vol. 15, № 6, p. 429.
7. *Бантури Р. Д.* Контактная задача для клина с упругим креплением. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4, 797—800.
8. *Тихоненко Л. Я.* Плоская контактная задача для упругого клина и сцепленного с ним полубесконечного упругого стержня. В сб. Устойчивость и прочность элементов конструкции. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
9. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
10. *Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я.* Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
11. *Гулян К. Г.* О двух плоских контактных задачах для клина с накладками. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5, 46—56.
12. *Нуллер Б. М.* Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5, 98—100.
13. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным упругим пластинам. Докл. АН АрмССР, 1974, LIX, № 4.
14. *Нуллер Б. М.* Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд. «Наука», 1966.