ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 5, 1976 Механика

В. В. МАДОРСКИЙ, Ю. А. УСТИНОВ

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Применение в акустике пьезоэлектрических пластин и оболочек, работающих в широком диапазоне частот, требует решения пространственных задач электроупругости. Как известно из классической теории упругости [1, 2], один из основных этапов построения таких решений связан с определением корней соответствующих дисперсионных уравнений. Так в работе [3] было получено дисперсионное уравнение для стационарных волн в плоской пьезополупроводниковой пластине, лицевые поверхности которой не электродированы и свободны от внешних условий, а сама пластина помещена в вакуум. Путем приближенного решения дисперсионного уравнения найдены зависимости фазовой скорости от частоты для первых двух нижайших мод. Аналогичная задача о распространении поперечных ультразвуковых волн была рассмотрена в [4]. Для круглого пьезоактивного волновода вещественные корни дисперсионного уравнения для нормальных волн осесимметричного типа исследованы в [5].

В настоящей работе проводится численный и качественный анализ вещественных и комплексных корней дисперсионного уравнения для симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины, поляризованной по толщине, лицевые поверхности которой покрыты электродами бесконечно малой толщины и электроды закорочены. Для малых частот с помощью теории возмущений получены аналитические разложения корней. Для больших частот корни исследованы на ЭВМ.

1. Рассмотрим пластину толщиной $2h$, длиной $2a$. Введем прямоугольную систему координат (x_1, x_2, x_3), причем ось ox_3 совпадает с направлением оси поляризации. Основываясь на соотношениях [2], уравнения колебаний пьезопластины в плоскости x_1ox_3 можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}+\rho\omega^2 u_1=0$$
$$\frac{\partial T_{33}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{31}}{\partial x_3}+\rho\omega^2 u_3=0 \qquad (1.1)$$
$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_3}{\partial x_3}=0$$

где T_{ik}, u_i, D_i — компоненты напряжения, механического смещения, электрической индукции, соответственно, ρ — плотность, ω — частота.

Линейные пьезоэлектрические уравнения для пьезоэлектрического материала класса C_{6v} имеют вид:

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & D_1 &= e_{15}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\\
T_{22} &= c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & D_3 &= e_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \varepsilon_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\\
T_{33} &= c_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & T_{13} &= c_{44}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Здесь c_{mn} — упругие постоянные в матричном обозначении, e_{mn} — пьезоконстанты, ε_{mn} — диэлектрические проницаемости, φ — потенциал электрического поля, связанный с вектором напряженности соотношением $E = -\operatorname{grad}\varphi$. Будем считать, что на лицевых поверхностях пластины при $x_3 = \pm h$ заданы следующие граничные условия:

$$
T_{i3} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (i = 1,3) \tag{1.3}
$$

Для получения дисперсионного уравнения симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины необходимо решить систему уравнений (1.1) совместно с граничными условиями (1.3).

Введем безразмерные координаты и величины по формулам

$$
\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_3}{h}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad \Omega = \omega h\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}
$$

Запишем решение системы уравнений (1.1) для продольных нормальных волн в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1(\zeta)\,\phi(\xi) = a\sum_{i=1}^{3} A_i h_i \beta_i \operatorname{ch}(\beta_i\zeta)\, e^{j\left(\omega t - \alpha\frac{\xi}{\varepsilon}\right)}\\
u_3 &= v_2(\zeta)\,\phi(\xi) = ja\sum_{i=1}^{3} A_i e_i \operatorname{sh}(\beta_i\zeta)\, e^{j\left(\omega t - \alpha\frac{\xi}{\varepsilon}\right)}\\
\varphi &= v_3(\zeta)\,\phi(\xi) = ja\sum_{i=1}^{3} A_i \operatorname{sh}(\beta_i\zeta)\, e^{j\left(\omega t - \alpha\frac{\xi}{\varepsilon}\right)}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где A_i — произвольные постоянные, β_i — корни бикубического уравнения

$$
\beta^6 - P\beta^4 + Q\beta^2 + R = 0 \tag{1.5}
$$

$$
P = N_1\Omega^2 - N_2\alpha^2, \qquad Q = D_1\Omega^4 - D_2\Omega^2\alpha^2 + D_3\alpha^4
$$

$$
R = -\alpha^2\left(C_1\Omega^4 - C_2\Omega^2\alpha^2 + C_3\alpha^4\right)
$$

$$
N_1 = c_{44}\left[(c_{33} + c_{44})\varepsilon_{33} + e_{33}^2\right]/G, \quad D_1 = c_{44}^2\varepsilon_{33}/G
$$

$$
\begin{aligned}
N_2 = {} & \left[c_{33}(c_{11}\varepsilon_{33} + c_{44}\varepsilon_{11}) + c_{33}(e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}e_{33}^2 - 2c_{44}(e_{31}e_{33} + {}\right.\\
& \left. + c_{13}\varepsilon_{33}) - 2c_{13}e_{33}(e_{15} + e_{31}) - c_{13}^2\varepsilon_{33}\right]/G, \qquad C_1 = c_{44}\varepsilon_{33}/G
\end{aligned}
$$

$$D_2 = c_{44}[(c_{44} + c_{11})\varepsilon_{33} + (c_{44} + c_{33})\varepsilon_{11} + (e_{31} + e_{15})^2 + 2e_{15}e_{33}]/G$$

$$D_3 = [c_{44}(c_{11}\varepsilon_{33} + e_{31}^2) + c_{11}(c_{33}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{33}) - c_{13}^2\varepsilon_{11} - 2c_{13}(c_{44}\varepsilon_{11} +$$

$$+ e_{31}e_{15} + e_{15}^2]/G, \qquad C_2 = [(c_{11} + c_{44})\varepsilon_{11} + e_{15}^2]c_{44}/G$$

$$C_3 = c_{11}(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)/G, \qquad G = c_{44}(\varepsilon_{33}c_{33} + e_{33}^2)$$

$$e_i = \frac{(c_{44} + c_{13})(\varepsilon_{33}\beta_i^2 - \varepsilon_{11}\alpha^2) + (e_{31} + e_{15})(e_{33}\beta_i^2 - e_{15}\alpha^2)}{(c_{44} + c_{13})(e_{33}\beta_i^2 - e_{15}\alpha^2) - (e_{31} - e_{15})(c_{33}\beta_i^2 + c_{11}\Omega^2 - c_{44}\alpha^2)}$$

$$h_i = -\frac{(c_{44} + c_{13})e_i + (e_{31} + e_{15})}{c_{44}(\Omega^2 + \beta_i^2) - c_{11}\alpha^2}, \qquad j = \sqrt{-1}$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (1.3) с учетом (1.2) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений для A_i. Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является равенство нулю ее детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_1 \operatorname{ch}\beta_1 & a_2 \operatorname{ch}\beta_2 & a_3 \operatorname{ch}\beta_3 \\ b_1 \operatorname{sh}\beta_1 & b_2 \operatorname{sh}\beta_2 & b_3 \operatorname{sh}\beta_3 \\ \operatorname{sh}\beta_1 & \operatorname{sh}\beta_2 & \operatorname{sh}\beta_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.6}$$

где

$$a_i = (-c_{13}h_i\alpha^2 + c_{33}e_i + e_{33})\beta_i, \quad b_i = c_{44}(h_i\beta_i^2 - e_i) + e_{15}$$

Уравнение (1.6) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{3} M_n \operatorname{cth}\beta_n = 0 \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) есть дисперсионное уравнение для симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины. В классической теории упругости оно известно как уравнение Релея-Лэмба, корни которого определяют связь между частотой Ω и волновым числом α. Для фиксированного Ω уравнение (1.7) имеет счетное множество корней, каждый из которых определяет точку на плоскости $\Omega(\alpha)$.

2. Разобьем предварительно корни уравнения (1.7) на две групы: вещественные и комплексные. Остановимся вначале на исследовании поведения вещественных корней при малых Ω и α. Поскольку $\alpha = 0$ является двухкратной точкой спектра при $\Omega = 0$, разложим α^2, $v_k(\xi)$ в ряд по степеням Ω^2

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= l_1^2\Omega^2 + \cdots \\ v_k(\xi) &= v_k^{(0)} + \Omega^2 v_k^{(1)} + \cdots \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.1—1.4) приводит к некоторой рекурентной системе, после интегрирования которой получаем

$$v_1^{(0)} = c_0, \qquad v_2^{(0)} = v_3^{(0)} = 0$$

$$v_1^{(1)} = -\frac{c_{13}}{c_{33}}\, t_1^2 c_0 \frac{z^2}{2}, \qquad v_2^{(1)} = \frac{c_{13}}{c_{33}}\, t_1^2 c_0 z, \qquad v_3^{(1)} = 0 \tag{2.2}$$

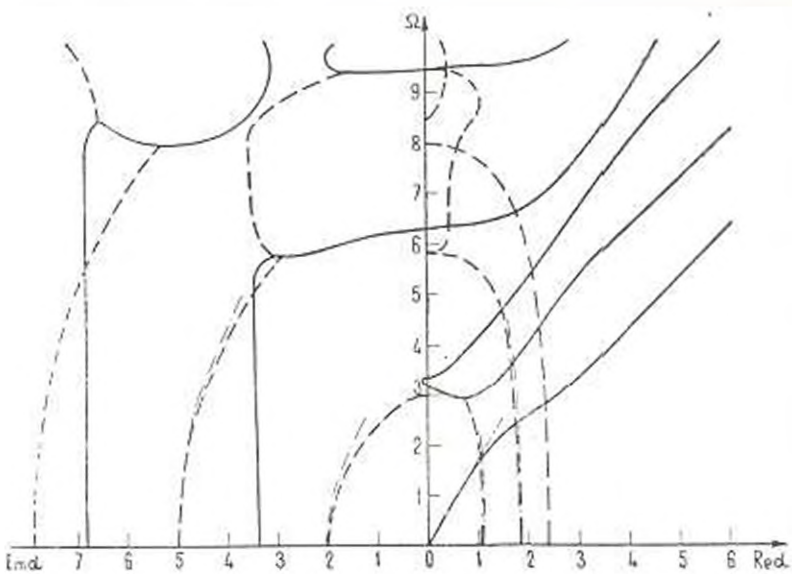
$$t_1^2 = \frac{c_{11}c_{33}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} > 0$$

Здесь c_0 — произвольная постоянная, которую можно считать, например, равной 1.

Из формул (2.1) и (2.2) видно, что в окрестности точки (0.0) существуют два вещественных корня

$$\alpha = \pm t_1 \Omega \tag{2.3}$$

которые определяют первую дисперсионную кривую на фиг. 1. При увеличении частоты фазовая скорость $V = \frac{\Omega}{\alpha}$ этой дисперсионной ветви вещественных корней стремится сверху к фазовой скорости поверхностной волны Релея. Так для материала ЦТС-19 она равна 1.06.



Фиг. 1.

Начало остальных дисперсионных кривых определяется из условия $\alpha = 0$. Как показано в [6], в этом случае определитель граничных условий (1.6) распадается на два трансцендентных уравнения:

$$\sin \Omega = 0, \qquad \operatorname{tg}\frac{\Omega}{b} = \Omega\,\frac{c_{33}\varepsilon_{11} + e_{33}^2}{e_{33}^2}$$

$$b = \frac{c_{44}\varepsilon_{33} + e_{33}^2}{c_{44}\varepsilon_{33}}$$

Эти два набора корней и определяют начальные точки вещественных кривых на оси Ω.

Теперь нам необходимо рассмотреть комплексные корни $\alpha_n = z_n + jy_n$. Точки пересечения комплексных ветвей с плоскостью $\Omega = 0$ могут быть найдены простым приравниванием $\Omega = 0$ в уравнениях (1.5), (1.6). При этом оказалось, что в верхней полуплоскости существуют три ветви комплексных корней. Первая ветвь совпадает с мнимой осью, при этом асимптотические значения корней для материалов типа ЦТС и PZT следующие:

$$\varkappa_n = \frac{n\pi}{\theta_1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

где $\theta_1^2 = \left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2$ — вещественный корень уравнения (1.5) при $\Omega = 0$.

Для материалов системы ЦТС мнимые корни также можно определить по формуле

$$\varkappa_n = n\sqrt{\frac{15\,\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11} + \dfrac{e_{15}^2}{c_{44}}}}$$

Ошибка при этом не превышает 3%.

Две другие ветви симметричны относительно мнимой оси. Положение правой ветви описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} k_2 z_n + k_1 y_n &= r_n \\ k_1 z_n - k_2 y_n &= p_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$r_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \qquad p_n = \frac{1}{2}\operatorname{arcsh}\left(\frac{\operatorname{Im} M_3}{2\operatorname{Re} M_3} - \frac{\operatorname{Re} M_3}{2\operatorname{Im} M_3}\right)$$

В (2.5) $\theta_2 = \frac{\beta_2}{\alpha} = k_1 + jk_2$ — корень бикубического уравнения (1.5) при $\Omega = 0$, лежащий в первом квадранте, $M_3 = a_3(b_1 - b_2)$. Формулы (2.4) и (2.5) уже при $n = 1$ определяют значения корней с погрешностью, не превышающей 2%.

Можно определить аналитические выражения комплексных и мнимых корней для малых частот. Воспользуемся для этого методом возмущения [7]. Считая, что величина Ω^2 является достаточно малой, разложим по степеням этой величины корни уравнения (1.5) и корни $\varkappa_n$, z_n, y_n — дисперсионного уравнения. После некоторых преобразований получим формулу для мнимых корней

$$\varkappa_n(\Omega) = \varkappa_n(0) + \frac{f_1\Omega^2}{2\theta_1 n\pi} \tag{2.6}$$

и систему двух уравнений относительно z_n, y_n для комплексных корней

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_2^2)(z_n^2 - y_n^2) - 4k_1k_2z_ny_n - f_1\Omega^2 = r_n^2 - p_n^2 \\ k_1k_2(z_n^2 - y_n^2) + (k_1^2 - k_2^2)z_ny_n - \frac{g_1}{2}\Omega^2 = r_n p_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$f_i + i g_i = \frac{N_i\beta_i^4 - D_i\beta_i^2 + C_i}{3\beta_i^4 - 2N_i\beta_i^2 + D_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Подставляя конкретные значения модулей керамики можно определить характер поведения комплексных и мнимых корней при малых Ω. Для ЦТС-19

$$\begin{aligned} z_1(\Omega) &= 3.36(1 + 0.003\,\Omega^2) \qquad & z_3(\Omega) &= 1.18(1 - 0.07\,\Omega^2) \\ z_2(\Omega) &= 6.72(1 + 0.0008\,\Omega^2) \qquad & z_5(\Omega) &= 1.798(1 - 0.0055\,\Omega^2) \\ y_1(\Omega) &= 2.02(1 - 0.06\,\Omega^2) \qquad & y_5(\Omega) &= 4.92(1 - 0.01\,\Omega^2) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.8) видно, что величины $z_2(\Omega)$, $z_5(\Omega)$, $y_5(\Omega)$ слабо зависят от частоты. Поэтому при малых частотах они могут быть апроксимированы корнями из уравнений (2.4) и (2.5).

Поведение комплексных ветвей вблизи плоскостей $\operatorname{Im}\alpha = 0$ или $\operatorname{Re}\alpha = 0$ может быть исследовано с помощью теоремы Оно [8]: каждый минимум и максимум вещественных или мнимых ветвей в (Ω, x) или (Ω, y) плоскостях, соответственно, есть точки пересечения с комплексными ветвями. Таким образом, когда начальные и конечные точки комплексных, мнимых и вещественных ветвей определены, все ветви могут быть рассчитаны и любая часть спектра может быть построена.

3. На фиг. 1 изображены дисперсионные кривые для пьезокерамики ЦТС-19, полученные численным решением уравнений (1.5), (1.6). Вещественные и чисто мнимые значения α нанесены сплошными линиями, причем чисто мнимые корни отложены слева от начала координат. Действительные и мнимые части комплексных ветвей нанесены прерывистыми линиями, при этом ось OX является осью действительных значений α, а ось OY — мнимых значений α. По оси OZ отложены значения безразмерной частоты Ω.

Из фиг. 1 видно, что при малых частотах $(\Omega \leqslant 2)$ корни уравнения (1.7) хорошо апроксимируются их асимптотическими значениями из формул (2.3) и (2.8), которые на фигуре обозначены штрих-пунктирными линиями, причем частотная область применимости этих формул для мнимых и комплексных корней быстро увеличивается с возрастанием порядкового номера корня.

Необходимо отметить, что вещественные и комплексные дисперсионные кривые для пьезоэлектрических материалов качественно не отличаются относительно аналогичных ветвей для изотропных материалов [9], но смещены на малую величину, зависящую от констант пьезокерамики. Однако, появление почти вертикальной ветви, соответствующей чисто мнимым корням, можно объяснить только пьезоэлектрической связью.

На основе дисперсионных кривых для каждого Ω можно определить фазовые и групповые скорости распространения возмущений в плоском волноводе, причем последняя, как известно, характеризует перенос энергии, рассчитать упругие и пьезоэлектрические модули керамики. Также дисперсионные кривые могут быть использованы для изучения механизмов внутреннего трения и измерения постоянных затухания для данного материала [9].

Модули пьезокерамики ЦТС-19 были взяты из [10].

$$c_{11}^E = 11.2\cdot 10^{10}\,\frac{н}{м^2} \qquad e_{31} = -3.4\,\frac{к}{м^2} \qquad \varepsilon_{33}^S = 82.747\cdot 10^{-10}\,\frac{ф}{м}$$

$$c_{13} = 6.22 \qquad e_{33} = 15.1 \qquad \varepsilon_{11} = 72.57$$

$$c_{33} = 10.6 \qquad e_{15} = 9.45$$

$$c_{44} = 2.49$$

Ростовский государственный
университет

Поступила 10 III 1976

Վ. Վ. ՄԱԽՈՐԲԻՆ, Յու. Ա. ՈՒՍՏԻՆՈՎ

ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում բերված են ըստ հաստության բևեռացված պիեզոէլեկտրական սալի սիմետրիկ տատանումների դիսպերսիոն հավասարման արմատների թվային և որակական վերլուծության արդյունքները: Սալի երեսային մակերևույթները լրիվին ծածկված են անվերջ փոքր հաստությամբ էլեկտրոդներով և էլեկտրոդները կարճեցված են: Տրված Ω հաճախականության համար ցույց է տրված երկու տեսակի՝ իրական և կոմպլեքս արմատների գոյությունը: Փոքր Ω-ների համար գրգռման տեսության օգնությամբ ստացված են արմատների անալիտիկ արտահայտությունները: Մեծ Ω-ների համար արմատները ուսումնասիրված են ԷՀՄ-ի վրա:

Թվային արդյունքները ՑՏՍ—19 պիեզոէլեկտրական կերամիկայի համար բերված են 1-ին նկարում:

SYMMETRIC VIBRATIONS OF PIEZOELECTRIC PLATES

V. V. MADORSKY, U. A. USTINOV

S u m m a r y

The results of numerical reseach of the dispersion equation for symmetric vibrations of a piezoelectric plate, poled in the thickness direction, are presented.

The faces of the plate are traction-free and completely coated with electrodes which are short-circuited.

Besides, real, imaginary, complex branches for low frequencies are investigated. The numerical results are given for ferroelectric ceramics ЦТС-19.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ. 1955.
2. *Tiersten H. F.* Wave propagation in an infinite piezoelectric plate. J. Acoust Soc. Am., 1963. 35, 2.
3. *Конаренко Н. Я.* и другие. Электронное затухание и усиление волн Лэмба в пьезополупроводниках. УФЖ. 1971. 16. 10.
4. *Кучеров И. Я., Островский И. В.* Взаимодействие поперечных ультразвуковых волн с носителями заряда в пластинках пьезополупроводников. ФТТ. 1970. 12. 6.
5. *Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А.* Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе. Дефектоскопия. 1975, 4.
6. *Tiersten H. F.* Thickness vibrations of piezoelectric plates. J. Acoust. Soc. Am., 1963, 35, 1.
7. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Изд. Наука, 1969.
8. *Kaul R. K., Mindlin R. D.* „Frequency spectrum of monoclinic crystal plate. J. Acoust. Soc. Am., 1962, 34, 12.
9. «Физическая акустика» под ред. У. Мезона. т. I, часть А. М., Изд. Мир. 1966.
10. *Смажевская Е. Г., Фельдман Н. Б.* Пьезоэлектрическая керамика. М., Изд. Советское радио, 1971.