

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

## ОБ УРАВНЕНИЯХ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Задача исследования магнитоупругих колебаний электропроводящих оболочек в магнитном поле сводится к совместному решению уравнений магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой, и уравнений электродинамики для среды, окружающей оболочку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред и условиях на бесконечности.

Уравнения магнитоупругости состоят из уравнений движения упругой среды с учетом сил электромагнитного происхождения и уравнений электродинамики движущейся электропроводной среды.

В общем случае, когда материал оболочки имеет конечную электропроводность, решение поставленной трехмерной задачи становится весьма затруднительным.

В работах [1, 2] на основе решений, получаемых методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости, сформулированы гипотезы относительно характера изменения электромагнитного поля и упругих перемещений по толщине оболочки.

В настоящей работе на основе этих гипотез трехмерная задача магнитоупругости сферических оболочек приводится к двумерной, что существенно облегчает исследование вопросов магнитоупругости указанных оболочек.

На основе полученных двумерных уравнений исследуется влияние электропроводности материала оболочки и интенсивности заданного магнитного поля на характер упругих колебаний оболочки в случае действия радиального магнитного поля.

1. Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины  $2h$  и радиуса  $R$ , изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в стационарном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции.

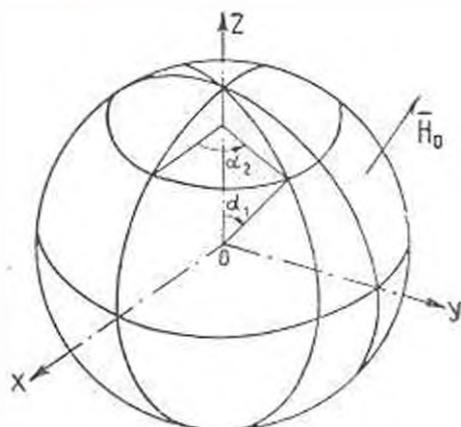
Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости материала оболочки и окружающей среды равны единице.

Упругие и электромагнитные свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ , плотностью  $\rho$ , электропроводностью  $\sigma$ .

Ортогональная система координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  выбрана так, что срединная поверхность сферической оболочки отнесена к географическим координатам  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $\alpha_1$  представляет угол долготы,  $\alpha_2$  — угол широты), а  $\alpha_3$  направлена по нормали к срединной поверхности (фиг. 1). Тогда для коэффи-

циентов первой квадратичной формы и для кривизны срединной поверхности будем иметь  $A_1 = R$ ,  $A_2 = R \sin \alpha_1$ ,  $k_1 = k_2 = R^{-1}$ .

Задача решается в предположении, что для среды, окружающей оболочку, справедливы уравнения Максвелла для вакуума. Принимается также, что влиянием токов смещения на характеристики упругих колебаний можно пренебречь.



Фиг. 1.

Одновременно считается, что задача магнитоэластики для невозбужденного состояния решена. Известен вектор напряженности  $\vec{H}_0(H_{01}, H_{02}, H_{03})$  во всем пространстве, то есть считается, что  $\vec{H}_0$  удовлетворяет известным уравнениям [3]

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H}_0 = 0 \quad (1.1)$$

и условиям непрерывности на поверхностях оболочки.

Принимая возмущения (упругие и электромагнитные) малыми, после линеаризации в силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получим следующие исходные уравнения [2, 4, 5]:

уравнения магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой ( $-h < \alpha_1 < h$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{4\pi\epsilon}{c} \left[ \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right], \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{e} = 4\pi\epsilon_2 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_1 \tau_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \tau_{12}) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_3 \tau_{13}) - \tau_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} \\ &+ \tau_{12} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - R_1 H_1 H_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \tau_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_2 H_1 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_3 \tau_{12}) + \tau_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_2} + \\ + \tau_{12} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - R_2 H_1 H_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_1 H_2 \tau_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_2 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 \tau_{12}) - \tau_1 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - \\ - \tau_1 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - R_3 H_1 H_2 \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{h}$  и  $\vec{e}$  — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей для области, занимаемой оболочкой,

$\vec{U}(u_1, u_2, u_3)$  — вектор перемещения частиц оболочки,  $\rho_e$  — плотность электрических зарядов,  $H_1 = A_1(1 + k_1 \alpha_1)$ ,  $H_2 = A_2(1 + k_2 \alpha_2)$  — коэффициенты Ламе,  $\vec{R}(R_1, R_2, R_3)$  — силы электромагнитного происхождения, которые определяются следующим образом:

$$\vec{R} = \frac{\varepsilon}{c} \left( \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_c \right) \times \vec{H}_c \quad (1.4)$$

уравнения электродинамики для вакуума в областях  $(-R < \alpha_1 < -h, \alpha_2 > h)$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div } \vec{h}^{(e)} = 0 \\ \text{rot } \vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{e}^{(e)} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\vec{h}^{(e)}$  и  $\vec{e}^{(e)}$  — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей для области вне тела оболочки, причем индекс  $e = 1$  относится к области  $\alpha_1 > h$ , а  $e = 2$  — к области  $\alpha_2 < -h$ .

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний сферической оболочки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.2), (1.3) и (1.5), решения которых должны удовлетворять условиям непрерывности электромагнитного поля на колеблющихся поверхностях оболочки, а также условиям затухания возмущений на бесконечности и ограниченности в области  $\alpha_1 < -h$ .

2. Для приведения трехмерных уравнений магнитоупругости сферической оболочки (1.2), (1.3) к двумерной принимаются гипотезы магнитоупругости тонких тел [1, 2].

Согласно этим гипотезам

$$\begin{aligned} u_1 &= u - \frac{a_1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, & u_2 &= v - \frac{a_2}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2}, & u_3 &= w(x_1, x_2, t) \\ e_1 &= \varphi(x_1, x_2, t), & e_2 &= \psi(x_1, x_2, t), & h_3 &= f(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $u = u(x_1, x_2, t)$ ,  $v = v(x_1, x_2, t)$ ,  $w = w(x_1, x_2, t)$  — искомые перемещения срединной поверхности оболочки;  $\varphi$ ,  $\psi$  — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в оболочке электрического поля  $e(e_1, e_2, e_3)$ ;  $f$  — искомая нормальная компонента индуцированного в оболочке магнитного поля  $h(h_1, h_2, h_3)$ .

На основе принятых гипотез остальные компоненты индуцированного в оболочке электромагнитного поля определяются из уравнений (1.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} + \alpha_3 \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left( a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{a}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - a_3 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ h_2 &= \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} + \alpha_3 \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left( a_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{a}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} - a_3 \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ e_3 &= -\frac{a_3}{A_1 A_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \psi) \right| + \frac{1}{c} \left| \frac{1}{A_1} \left( a_1 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial a}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{A_2} \left( a_2 - \frac{1}{A_1} \frac{\partial a}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 a_3) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial t} + \\ &\quad + a_3 \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial t} \right) - H_{0z} \frac{\partial u}{\partial t} + H_{0z} \frac{\partial v}{\partial t} + \\ &\quad \left. + \alpha_3 \left( \frac{H_{02}}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \frac{H_{01}}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right) \right| \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$a = \int_0^a \alpha_3 H_{0z} dx_3 - \frac{1}{2} \left( \int_0^h \alpha_3 H_{0z} dx_3 + \int_0^{-h} \alpha_3 H_{0z} dx_3 \right)$$

$$a_i = \int_0^{\alpha_i} H_{0i} dx_i - \frac{1}{2} \left( \int_0^h H_{0i} dx_i + \int_0^{-h} H_{0i} dx_i \right), \quad (i = 1, 2, 3)$$

Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при  $\alpha_i = h$  и  $\alpha_i = -h$ .

При получении (2.2) было учтено условие равенства нулю нормальной составляющей плотности тока на поверхностях  $\alpha_i = \pm h$  (так как оболочка находится в вакууме).

Подставляя (2.1), (2.2) в уравнения движения оболочки (1.3) и усредняя по толщине, как это делается в теории оболочек [4, 5] (учитывается,

что поверхностные силы отсутствуют), с учетом (1.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно шести искомых функций ( $u, v, w, \varphi, \psi, \zeta$ ):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{A_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{1 - \nu}{R} \left( \frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \frac{\varepsilon}{c} \left[ \left( b_3 + \frac{1}{R} c_3 \right) \psi + \left( c_2 + \frac{1}{R} g_2 \right) \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \zeta) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \zeta) \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{c} \left[ \left( F_{21} + \frac{1}{R} L_{21} \right) \frac{\partial v}{\partial t} - \left( F_{22} + \frac{1}{R} L_{22} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left( b_{13} + \frac{1}{R} c_{13} \right) \frac{\partial w}{\partial t} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{A_1} \left( G_{22} + \frac{1}{R} N_{22} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} + \frac{1}{A_2} \left( G_{12} + \frac{1}{R} N_{12} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right] + \left( d_{32} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R} a_{32} \right) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 u) \right] \left. \right\} - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
 & \frac{1}{A_2} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + (1 - \nu) \frac{1}{A_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{1 - \nu}{R} \left( \frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \frac{\varepsilon}{c} \left\{ - \left( b_3 + \frac{1}{R} c_3 \right) \psi - \left( c_1 + \frac{1}{R} g_1 \right) \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \zeta) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \zeta) \right] + \frac{1}{c} \left[ \left( F_{12} + \frac{1}{R} L_{12} \right) \frac{\partial u}{\partial t} - \left( F_{11} + \frac{1}{R} L_{11} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( b_{23} + \frac{1}{R} c_{23} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{A_1} \left( G_{21} + \frac{1}{R} N_{21} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{A_2} \left( G_{11} + \frac{1}{R} N_{11} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} \right] - \left( d_{31} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{R} a_{31} \right) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 u) \right] \right\} - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3) \\
 & \left( \frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \frac{\varepsilon}{c} \left\{ \left[ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 c_3) - b_1 \right] \psi + \left( b_2 - \frac{1}{A_2} \frac{\partial c_3}{\partial x_2} \right) \zeta + \right. \\
 & + \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right) c_3 - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{g_1}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{g_2}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \zeta) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \zeta) \right] + \frac{1}{c} \left[ b_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 L_{21}) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{12}}{\partial x_2} \right] \frac{\partial u}{\partial t} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c} \left[ b_{22} - \frac{1}{A_2^2} a_{22} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 L_{11}) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial L_{11}}{\partial z_1} \right] \frac{\partial v}{\partial t} - \\
& - \frac{1}{c} \left[ b_{11} + b_{22} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 c_{11}) - \frac{1}{A_1} \frac{\partial c_{11}}{\partial z_1} \right] \frac{\partial w}{\partial t} - \\
& - \frac{1}{A_1} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 N_{22}) - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{22}}{\partial z_1} \right] \frac{\partial w}{\partial z_1} + \\
& + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_{12}}{\partial z_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{11}}{\partial z_2} \right) \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} - L_{21} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial z_1} \right. \\
& \quad \left. + L_{11} \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial z_2} + \left( L_{21} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} a_{11} \right) \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial z_1} - \right. \\
& \quad \left. - \left( L_{11} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} a_{22} \right) \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial z_2} - N_{22} \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} - N_{11} \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2} - \right. \\
& \quad \left. + (N_{12} + N_{21}) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} + \left( \frac{a_{22}}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{a_{21}}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial z_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial z_2} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{A_1^2 A_2^2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 a_{21}) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 a_{11}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 u) \right] - \\
& \quad - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 \bar{v}) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_1} + \frac{4\pi\kappa}{c} \left[ \bar{v} + \frac{1}{2hc} \left( b_1 \frac{\partial w}{\partial t} - b_2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c_1}{A_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial t} \right) \right] = \frac{h_1^+ - h_1^-}{2h}$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_2} - \frac{4\pi\kappa}{c} \left[ \bar{v} + \frac{1}{2hc} \left( b_3 \frac{\partial v}{\partial t} - b_2 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{c_2}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_2 \partial t} \right) \right] = \frac{h_2^+ - h_2^-}{2h}$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{v} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 v) \right] + \frac{2\kappa}{R}$$

$$\chi = \frac{1}{2A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2 v) - \frac{\partial}{\partial z_2} (A_1 u) \right]$$

$$\Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right]$$

$$b_i = \int_{-h}^h H_{0i} dz_3, \quad c_i = \int_{-h}^h z_3 H_{0i} dz_3, \quad b_{i,j} = \int_{-h}^h H_{0i} H_{0j} dz_3$$

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= \int_{-h}^h z_3 H_{0i} H_{0j} dz_3, & d_{ij} &= \int_{-h}^h a_i H_{0j} dz_3, & g_{ij} &= \int_{-h}^h z_3^2 H_{0i} dz_3, \\
 g_{ij} &= \int_{-h}^h z_3^2 H_{0i} H_{0j} dz_3, & a_{ij} &= \int_{-h}^h z_3 a_i H_{0j} dz_3, & F_{ij} &= b_{33} \delta_{ij} + \frac{1}{A_j} \int_{-h}^h H_{0i} \frac{\partial a_j}{\partial z_j} dz_3, \\
 G_{ij} &= d_{ij} - c_{33} \delta_{ij} - \frac{1}{A_i} \int_{-h}^h H_{0j} \frac{\partial a_i}{\partial z_i} dz_3, \\
 N_{ij} &= a_{ij} - g_{33} \delta_{ij} - \frac{1}{A_j} \int_{-h}^h z_3 H_{0j} \frac{\partial a_i}{\partial z_i} dz_3, \\
 L_{ij} &= c_{33} \delta_{ij} + \frac{1}{A_j} \int_{-h}^h z_3 H_{0j} \frac{\partial a_i}{\partial z_i} dz_3, \quad (i, j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

3. Для полного определения перемещений и электромагнитного поля в оболочке, как видно из (2.3), необходимо иметь значения компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях, ограничивающих оболочку. Поэтому уравнения (2.3) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для вакуума (1.5) при следующих граничных условиях на поверхности раздела двух сред:

$$\vec{e}^{(e)} = \vec{e}, \quad \vec{h}^{(e)} = \vec{h} \quad \text{при} \quad z_3 = \pm h \quad (3.1)$$

Тогда задача определения компонент электромагнитного поля в среде, окружающей оболочку, приводится к решению уравнений (1.5) с условиями (3.1), а также условиями затухания возмущений на бесконечности в области  $\alpha_3 > h$  и условиями ограниченности в области  $\alpha_3 < -h$ .

Введем потенциальные функции  $\Phi_0^{(e)}$  посредством

$$\vec{h}^{(e)} = \text{grad } \Phi_0^{(e)} \quad (3.2)$$

определение  $\Phi_0^{(e)}$  приводится к решению следующих задач Неймана в областях  $|z_3| > h$

$$\begin{aligned}
 \Delta \Phi_0^{(e)} &= 0 \\
 \frac{\partial \Phi_0^{(e)}}{\partial z_3} \Big|_{z_3 = \pm h} &= f(z_1, z_2, t)
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение задач (3.3) представляется в виде [6]

$$\Phi_0^{(e)} = -\frac{R+h}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{2}{r_1} - \ln \frac{1+r_1 - r_1 \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \right| f(z, r_1, t) \sin \theta_0 d\theta_0 dz_1 \quad (3.4)$$

$$\Phi_0^{(2)} = \frac{R-h}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{2}{r_2} - \ln \frac{1+r_2-\gamma_2 \cos \theta_0}{2} \right] f(\xi, \gamma, t) \sin \xi d\xi d\gamma \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 1 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos \theta_0, & r_2^2 &= 1 + \gamma_2^2 - 2\gamma_2 \cos \theta_0 \\ \cos \theta_0 &= \cos \xi \cos \alpha_1 + \sin \xi \sin \alpha_1 \cos (\gamma - \alpha_2) \\ \xi_1 &= \frac{1 + \alpha_2 R}{1 + h/R}, & \xi_2 &= \frac{1 + \alpha_1 R}{1 - h/R} \end{aligned}$$

Из (3.2) в силу (3.4) и (3.5) найдем

$$\frac{h_1 - h_1}{2h} = -\frac{R}{h} \frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{h_2 - h_2}{2h} = -\frac{R}{h} \frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{r}{2} \right) \right] f(\xi, \gamma, t) \sin \xi d\xi d\gamma \\ r^2 &= 2(1 - \cos \theta_0) \end{aligned}$$

Подставляя (3.6) в систему (2.3), получим замкнутую систему уравнений относительно искомых функций ( $u, v, w, \varphi, \psi, f$ ) задачи. Таким образом, трехмерная задача магнитоупругости сферической оболочки свелась к решению двумерной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

4. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний замкнутой сферической оболочки в неоднородном магнитном поле  $\vec{H}_0(\alpha_1)$ , вектор напряженности которого перпендикулярен к недеформированной срединной поверхности. Пока оболочка находится в невозмущенном состоянии, вектор  $\vec{H}_0$ , характеризующий невозмущенное магнитное поле, определяется следующим образом:

$$\vec{H}_0 = \frac{H_0}{(1 + \alpha_2 R)^3} \vec{n}_3 \quad (4.1)$$

удовлетворяющим уравнениям магнитостатики (1.1).

Здесь  $H_0$  — величина вектора напряженности магнитного поля на срединной поверхности ( $\alpha_1 = 0$ ),  $\vec{n}_3$  — единичный вектор в направлении координатной линии  $\alpha_3$ .

Подставляя (3.6), (4.1) в уравнения движения оболочки (2.3) и пренебрегая тангенциальными составляющими сил инерции, получим полную систему разрешающих сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно шести искомых функций ( $u, v, w, \varphi, \psi, f$ )

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] - (1 - \nu) \frac{1}{A_1} \frac{\partial l}{\partial x_1} - \frac{1 - \nu}{R} \left( \frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \\
& \quad + \frac{(1 - \nu^2) z H_0}{Ec} \left| \varphi - \frac{H_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( u - \frac{h^2}{3R} \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right| = 0 \\
& \frac{1}{A_2} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + (1 - \nu) \frac{1}{A_2} \frac{\partial l}{\partial x_2} + \frac{1 - \nu}{R} \left( \frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) - \\
& \quad - \frac{(1 - \nu^2) z H_0}{Ec} \left| \varphi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( v - \frac{h^2}{3R} \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right| = 0 \\
& \left( \frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 - \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{3R^4} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\
& \quad + \frac{(1 - \nu^2) z h^2 H_0^2}{3Ec^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = 0 \tag{4.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \varphi) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \varphi) \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\
& \frac{1}{A_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{4\pi z}{c} \left( \varphi - \frac{H_0}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{R}{h} \frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\
& \frac{1}{A_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{4\pi z}{c} \left( \varphi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{R}{h} \frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}$$

Решения приведенных уравнений должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

Приведем основные уравнения задачи к удобному виду. Вводя с этой целью функции  $\Phi(x_1, x_2, t)$  и  $\Psi(x_1, x_2, t)$  посредством

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \varphi) \right] \\
\Psi &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 \varphi) - \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 \varphi) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

из уравнений (4.2) после некоторых преобразований получим систему уравнений относительно  $(\theta, \zeta, w, \Phi, \Psi, f)$

$$\begin{aligned}
& (\Delta + 1 - \nu) \theta - \frac{1}{R} \left( \frac{h^2}{3R^3} \Delta + 1 - \nu \right) (\Delta + 2) w + \\
& \quad + \frac{z H_0 R^2}{\nu c c_0^2} \left[ \Psi + \frac{H_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2w}{R} - \zeta + \frac{h^2}{3R^3} \Delta w \right) \right] = 0 \tag{4.4} \\
& \left( \frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 - \nu}{R} \right) \theta - \frac{h^2}{3R^4} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \\
& \quad - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{z h^2 H_0^2}{3\nu c^2 c_0^2 R^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta \Psi - \frac{4\pi\alpha R^2}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{R}{h} \Delta F_1 + \frac{4\pi\alpha H_0 R^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \theta - \frac{2\omega}{R} \right) = 0$$

$$(\Delta + 2)\chi = 0, \quad \Phi - \frac{2H_0}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0, \quad \Psi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

где  $c_0 = [E/\rho(1-\nu)]^{1/2}$  — скорость звука в материале оболочки

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{r}{2} \right) \right| \Psi(\xi, \eta, t) \sin \xi d\xi d\eta$$

Любопытно отметить, что в силу (4.3) для определения  $(\theta, \omega, \Psi)$  получили систему (4.4), не содержащую остальные неизвестные функции  $(\chi, \Phi, \xi)$ , которые должны определяться из системы (4.5).

Решения уравнений (4.4) представим в виде разложения

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, t) = \exp(i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \quad (4.6)$$

$$Q_n(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\alpha_2 + B_{nk} \sin k\alpha_2) P_n^k(\cos \alpha_1)$$

где  $Q$  — любая из функций  $(\theta, \omega, \Psi)$ ,  $\omega$  — частота колебаний,  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$A_{nk} = \frac{1}{|Y_n^k|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q_n(\alpha_1, \alpha_2) P_n^k(\cos \alpha_1) \cos k\alpha_2 \sin \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$B_{nk} = \frac{1}{|Y_n^k|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q_n(\alpha_1, \alpha_2) P_n^k(\cos \alpha_1) \sin k\alpha_2 \sin \alpha_1 d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$|Y_n^k|^2 = \frac{2\pi z_k}{2n+1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!}, \quad z_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k=0 \\ 1 & \text{при } k>0 \end{cases}$$

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$  — полиномы Лежандра.

Подставляя (4.6) в систему уравнений (4.4), для определения частоты колебаний получим следующее характеристическое уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \omega_n^4 = 0 \quad (4.7)$$

где

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{\varepsilon_0 \Omega_n R^2}{D_n h c} + \frac{\varepsilon_0 h c^2 \beta_0^2}{3 \varepsilon_0 \Omega_n R^2 (\nu_n - 1 + \nu)} \left| \nu_n^2 + (\nu_n - 2)(\nu_n - 1 + \nu) + \frac{6R^2(1 + \nu)}{h^2} \right|, \quad q_2 = 1 + \frac{\varepsilon_0 c^2 \beta_0^2}{3 D_n c^2 (\nu_n - 1 + \nu)} (D_n \beta_0^2 + \nu_n - 2)$$

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0 \Omega_n R^2}{D_n h c} \left( 1 + \frac{D_n \beta_0^2}{\nu_n - 1 + \nu} \right), \quad \nu_n = n(n + 1)$$

$$D_n = \nu_n + \frac{R}{2h} (2n + 1), \quad \varepsilon_0 = \frac{4\pi h}{c}, \quad \beta_0 = \frac{V_A}{c}$$

$$V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi}}, \quad \omega_n = \frac{\omega}{\Omega_n}, \quad \gamma_n = \gamma, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{3R^2(1 - \nu^2)}$$

$$\Omega_n^2 = \frac{gE}{\gamma_0 R^2} (\nu_n - 2) \frac{1 + \delta^2(\nu_n - 1)^2}{\nu_n - 1 + \nu}$$

Здесь  $\gamma_0$  — удельный вес материала оболочки,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\Omega_n$  — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме при отсутствии магнитного поля, безразмерные параметры  $\varepsilon_0$  и  $\beta_0$  характеризуют электропроводность материала оболочки и напряженность внешнего магнитного поля соответственно,  $V_A$  — скорость распространения электромагнитных волн Альфвена.

При  $n = 1$  уравнение (4.7) становится квадратным и имеет решение

$$\omega = -\omega_0^2 (1 - \sqrt{1 - \kappa^2}) \quad (4.8)$$

где

$$\kappa^2 = \left| \frac{2\varepsilon_0 R^2}{D_1 h c} \left( 1 + \frac{D_1 \beta_0^2}{1 + \nu} \right) \right|^{-1} \left| 1 + \frac{2c^2 \varepsilon_0^2 \beta_0^2}{3c^2 (1 + \nu)} \right|$$

$$\kappa^2 = \frac{8R^2 \varepsilon_0^2 \beta_0^2}{D_1 h^2 c^2} \left( 1 + \frac{D_1 \beta_0^2}{1 + \nu} \right) \left| 1 + \frac{2c^2 \varepsilon_0^2 \beta_0^2}{3c^2 (1 + \nu)} \right|^{-2}$$

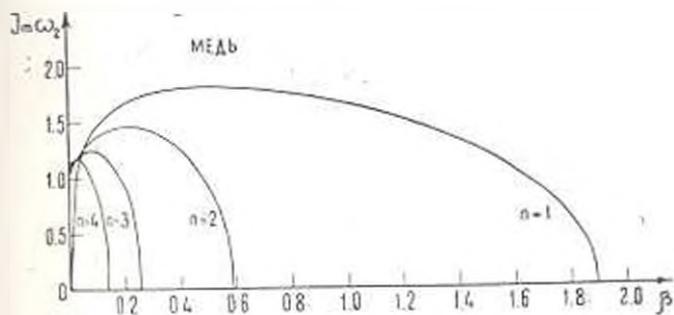
Из (4.8) следует, что если  $\kappa > 1$ , то затухание возмущений имеет колебательный характер. В противном случае возмущения затухают без колебаний.

Приведем численный анализ зависимости характеристик колебаний (частоты колебаний и коэффициента затухания) от напряженности внешнего магнитного поля и электропроводности материала оболочки при  $h/R = 0.01$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ .

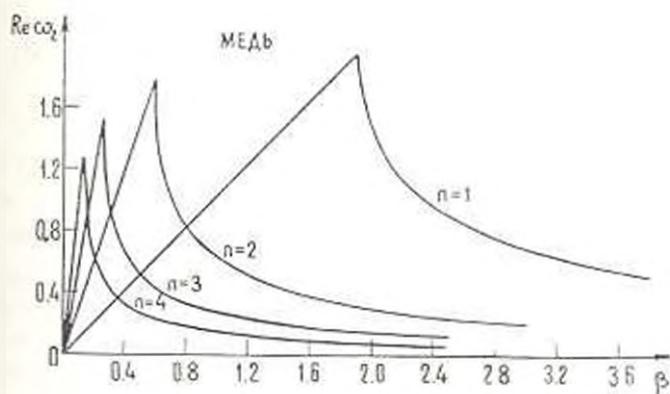
Результаты численных решений уравнений (4.7) и (4.8) для медной оболочки приведены на фиг. 2, 3, а для цинковой оболочки — на фиг. 4, 5.

На этих фигурах представлены графики зависимости частоты упругих колебаний ( $\text{Im}\omega_n$ ) и коэффициента затухания ( $\text{Re}\omega_n$ ) от параметра

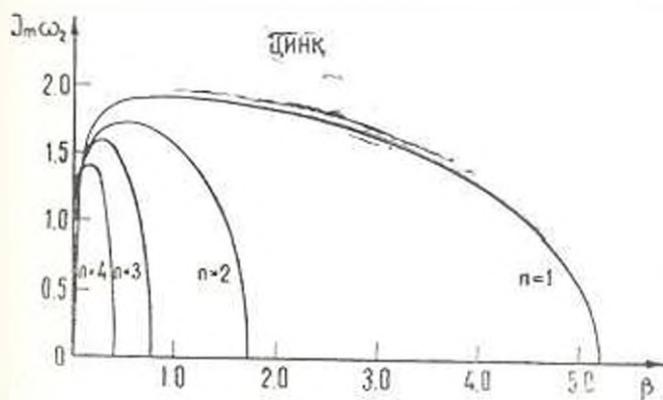
$\beta = 10V_A^2/a_0^2$  ( $a_0$  — скорость звука в случае медной оболочки), характеризующего напряженность заданного магнитного поля.



Фиг. 2.



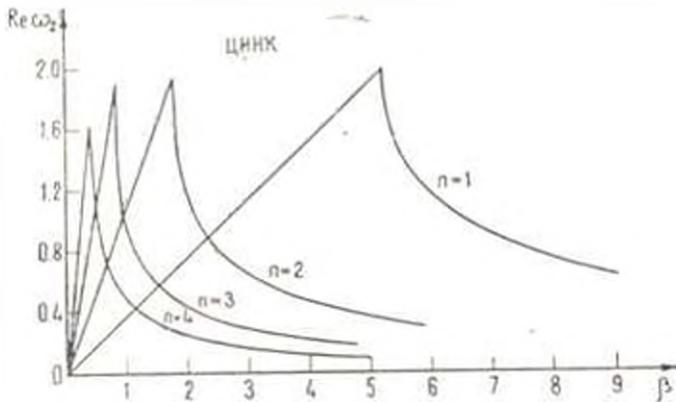
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Фиг. 2 и 4 показывают, что при возрастании напряженности магнитного поля частота колебаний вначале увеличивается, достигая максимума,

после чего начинает уменьшаться и принимает значение нуль для определенного  $\beta$ . Значение  $\beta$ , при котором  $\text{Im}(\omega_c) = 0$ , монотонно уменьшается при возрастании  $n$  ( $n$ —число волн по направлению  $a_1$ ).



Фиг. 5.

Имея в виду, что при  $\sigma=0$   $\text{Im } \omega = 1$  (или нулю при  $n=1$ ) и сравнивая фиг. 2 и 4, заключаем, что частота колебаний как функция от электропроводности материала оболочки может принимать максимальное значение в интервале  $(0 < \sigma < \infty)$ . Причем расположение точки максимума существенно зависит от напряженности магнитного поля и от числа волн  $n$ .

Кривые, приведенные на фиг. 3 и 5, показывают, что зависимость коэффициента затухания ( $\text{Re } \omega_c$ ) от напряженности заданного магнитного поля и электропроводности материала оболочки также имеет экстремальный характер.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 4 VI 1976

Գ. Ե. ԲԱԳԳՍԱՐՅԱՆ և Պ. Ա. ՄՔՐՏՉՅԱՆ

ԲԱՐԱԿԱ ԳՆՆԱՅԻՆ ԹԱԿԱՆՔՆԵՐԻ ՄԱԿՆԵՍՈՒ-  
ԱՌՈՒՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս

Այնպատանքում բարակ մարմինների մազնիսաառաձգականության հիպոթեզների հիման վրա զնդային թաղանթների մազնիսաառաձգականության եռաչափ խնդիրը ընդհանուր է երկչափի, որը լայնիս հեշտացնում է նշված թաղանթների մազնիսաառաձգականության հարցերի ուսումնասիրությունը:

Առաջված հավասարումների հիման վրա անտարտուվում է տված մազնիսական դաշտի ինտենսիվության և թաղանթի նյութի հարցըտականություն

ազդեցությունը թաղանթի առաձգական տատանումների բնույթի վրա, երբ ճաղնիսական դաշտի լարվածության փեկտորը ուղղված է թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալով:

## ON EQUATIONS OF MAGNETOELASTICITY OF THIN SPHERICAL SHELLS

G. E. BAGDASARIAN, P. M. SKETCHMAN

### S u m m a r y

On the basis of hypothesis of thin body magnetoelasticity the three-dimensional problem of magnetoelasticity of spherical shells is reduced to a two-dimensional one, thus facilitating essentially the investigation of the magnetoelasticity problem of the shells under consideration.

By means of the two-dimensional equations obtained the influence of both the shell material's electroconductivity and the given magnetic field intensity upon the mode of elastic vibration of the shell is studied for the case of the radial magnetic field effect.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Азбарущян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. Азбарущян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. Солов А. Г. Механика гальванических сред. т. 1. М., Наука, 1970, стр. 297—298.
4. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953, стр. 33—36.
5. Азбарущян С. А. Общая теория изогнутых оболочек. М., Наука, 1974, стр. 18.
6. Кошляков Н. С., Глицер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа, 1970, стр. 343—346.