ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Физико-математические науки XXIX, № 4, 1976 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН, З. И. ПЯТИГОРСКИЙ

О ВЛИЯНИИ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

1. В разработке общей теории оптимального проектирования конструкций весьма актуальными являются вопросы оптимизации приспосабливающихся конструкций. В работе [1] авторами введено понятие оптимальной по приспособляемости конструкции (ОПК). ОПК должна удовлетворять следующим требованиям:

$$\exists \ldots \neq 0 \to (\forall r \in R \to \Phi(\ldots) \ldots k^2) \cap$$
$$\forall \ldots \to ((\exists r_1 \in R_1 \to \Phi(\ldots)_1 > k^2) \cup (\exists r_2 \in R_2 \to \tag{1.1}$$
$$A\alpha > 1 \to \Phi(\ldots)_2 > k^2)$$

определяющим ОПК как точку глобального экстремума (минимума) в пространстве остаточных напряжений. Здесь: σ^e — напряжения в любой момент времени, вычисленные в предположении упругости материала ($\ldots \to \ldots$); $\ldots$ — остаточные напряжения; k^2 — константа материала; r — точки, а R_i — области ОПК.

Определение ОПК базируется на статической теореме Мелана о приспособляемости [2], одно из положений которой утверждает зависимость поля остаточных напряжений от истории нагружения. В инженерной практике весьма распространенным является нагружение, в котором известны лишь пределы изменения его независимых параметров. Для конструкций, нагруженных такой нагрузкой, статически возможные в состоянии приспособляемости поля $\ldots$ не единственны. Эта неединственность имеет место и в ОПК, в (1.1) входят огибающие σ^e, которые могут быть получены не единственным способом. Следовательно, рассматриваемая задача многоэкстремальна в пространстве управляющих параметров $\ldots$. Огибающая составляющего вектора внутренних усилий квазистатической нагрузки в любой точке тела в зависимости от истории нагружения должна удовлетворять одной из следующих зависимостей (при $\ldots > \ldots$):

$$\ldots > \ldots = 0 \cap \ldots < 0 \tag{1.2}$$
$$\ldots > \ldots < 0 \cap \ldots > \ldots < 0 \tag{1.3}$$
$$\ldots > 0 \cap \ldots < 0 \tag{1.4}$$

Из (1.3) выделением постоянной составляющей

$$(\ldots) = \min(\mathrm{mod}(\ldots)) \tag{1.5}$$

а из (1.4) выделением не влияющей на приспособляемость симметричной составляющей, также выбранной по (1.5), получаем (1.2). Таким образом, чтобы проанализировать всевозможные истории нагружения (1.2)—(1.4), необходимо прежде всего получить решение для огибающей (1.2), которое одновременно будет и решением для (1.4), а затем уже перейти к анализу (1.3).

Рассмотрим ОПК, нагруженную квазистатической нагрузкой, одним из пределов изменения которой является «0» (разгрузка), а σ_T — const. Если обозначить через $f(\sigma)$ функцию текучести, то напряженное состояние в любой точке приспособившегося тела R должно удовлетворять одной из следующих зависимостей:

$$f(\sigma^e) > f(\sigma_T) \tag{1.6}$$

$$f(\sigma^e) = f(\sigma_T) \tag{1.7}$$

$$f(\sigma^e) < f(\sigma_T) \tag{1.8}$$

В дальнейшем область, удовлетворяющую выражению (1.6), будем называть «а», а выражениям (1.7) и (1.8) — «б» и «в», соответственно. В приспособившемся теле имеют место зависимости

$$f(\sigma^e + \bar{\sigma})_{а, б, в} \leqslant f(\sigma_T) \tag{1.9}$$

свидетельствующие о том, что, с точки зрения деформаций, приспособляемость в рассматриваемом случае является итеративным процессом приближения к равновесному положению в области «а» — сверху, а в области «в» — снизу.

Приспособляемость наступает при выполнении в области «а» условия (1.9); при этом в «а» обязательно наличие точек, для которых (1.9) — строгое равенство (такие точки возможны и в «б»). Отсутствие таких точек в «в» свидетельствует о наличии в теле резерва прочности по приспособляемости; появление этих точек — об исчерпании резерва по приспособляемости, то есть о наступлении предельного состояния. Приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что пластические деформации в приспосабливающемся теле изменяются монотонно (это не относится к перемещениям [3]).

2. Для проектирования ОПК предлагается алгоритм, моделирующий описанный в (1.9) итеративный процесс.

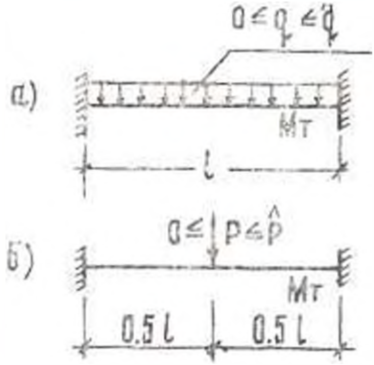
Рассмотрим несколько примеров стержневых приспосабливающихся конструкций, которые иллюстрируют единственность и неединственность статически возможных полей остаточных усилий M^0 и связях приспосабливающихся и не приспосабливающихся конструкций. Для схемы по фиг. 1а:

$$(\forall M_r \to (\overset{*}{q}l^2:12 \geqslant M_r \geqslant \overset{*}{q}l^2:16)) \to (M^0 \to (0 \leqslant M^0 \leqslant \overset{*}{q}l^2:48))$$

при этом

$$(M_r = \overset{*}{q}l^2:16) \to (M^0 = \overset{*}{q}l^2:48)$$

Для схемы по фиг. 1б всегда $M^0=0$, поэтому при $M_т \le 0.125\hat{P}l - f(\varepsilon^*) < f(\varepsilon_т)$, то есть пластические деформации отсутствуют; при $S\cdot 0.125\hat{P}l > 0.125\hat{P}l - f(\varepsilon^*) > f(\varepsilon_т)$, то есть пластические деформации имеют место, а приспособляемость наступает при нулевых остаточных усилиях в связях: остаточные напряжения уравновешиваются в сечении.



Фиг. 1.

Коэффициент $S > 1$ и в первом приближении может приниматься равным отношению пластического момента сопротивления сечения к упругому. При $M_т = S\cdot 0.125\hat{P}l$ образуется мгновенно изменяемый механизм разрушения.

При нарушении условий приспособляемости возможна и такая ситуация, когда пластическая деформация, будучи в цикле ограниченной, начиная с некоторого цикла, становится постоянной и ее накопление от цикла к циклу становится теоретически неограниченным. Как показал Б. Нил [4], для указанного прогрессирующего разрушения нет необходимости в образовании некоторого кинематически возможного механизма разрушения. Именно этот вид разрушения свойственен описываемым ниже пластинам.

Указанные примеры приведены в работе авторов [5]. Из описанных примеров видно, что в пространстве остаточных напряжений (усилий) процесс приспособления представляется некоторой траекторией фазовой точки, при этом начало траектории совпадает с началом координат. Отсюда следует, что моделирующий приспособляемость алгоритм должен иметь в пространстве параметров в качестве стартовой точки $M^0=0$. В рассмотренных примерах, так же как и в [3], поле остаточных усилий описывается конечным числом параметров. При рассмотрении же континуальных задач (например, приспособляемости пластин) возникают серьезные затруднения. Самоуравновешенное поле $M^0 = \{M_1^0, M_2^0, M_3^0\}$ должно удовлетворять условию равновесия:

$$\frac{\partial^2 M_1^0}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_3^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2^0}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Решения уравнения (2.1) в функциональном пространстве отсутствуют, а необходимый переход к конечномерному векторному пространству приводит к задачам большой размерности. При этом в формулировке соответствующей задачи математического программирования оказывается большое количество ограничений в виде равенств, затрудняющих построение поисковой процедуры. Следовательно, принимаемый для решения алгоритм должна отличать пониженная чувствительность к «проклятию размерности». Рассматриваемая задача (1.1) — многоэкстремальна, поэтому для определения глобального экстремума, а также для изучения формы и размеров области M^*, пределов возможных деформаций необходимо иметь возможность менять траекторию поиска, так как моделирующий алгоритм, как указано выше, должен иметь фиксированную стартовую точку. Методом, удовлетворяющим всем трем требованиям, является метод случайного поиска [6], для численной реализации которого нами разработан специальный алгоритм. Получаемая при этом фазовая траектория моделирует приспособляемость при нагружении, моделируемом как стохастический процесс.

В пространстве M строится базис B, для чего используется последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке. По направлению вектора $\vec{b}_i \in B$, обеспечивающего улучшение функции цели, отыскивается локальный оптимум, после чего строится новый случайный базис. Неудачные шаги не включаются в траекторию, получаем случайную траекторию, моделирующую приспособляемость при некотором случайном нагружении. Рекуррентная формула для координаты фазовой точки имеет вид

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1} + \Delta X_{i-1}, \text{ если } \Phi(X_{i-1} + \Delta X_{i-1}) < \Phi_{i-1} \\ X_{i-1} + \alpha \vec{b}_i, \quad \text{если } \Phi(X_{i-1} + \Delta X_{i-1}) \geqslant \Phi_{i-1} \cap \\ \qquad \exists \vec{b}_i \in B \to \Phi(X_{i-1} + \alpha \vec{b}_i) < \Phi_{i-1} \\ X_i := \text{exit} \to \text{конец} \end{cases}$$

где Φ — функция цели; α — малая константа дискретности траектории (точность поиска).

3. Рассмотрим проектирование ОПК — пластины, нагруженной квазистатической нагрузкой. Область безопасности описывается условием Мизеса. В терминах математического программирования задача записывается следующим образом:

Найти $\min H \geqslant 0$.

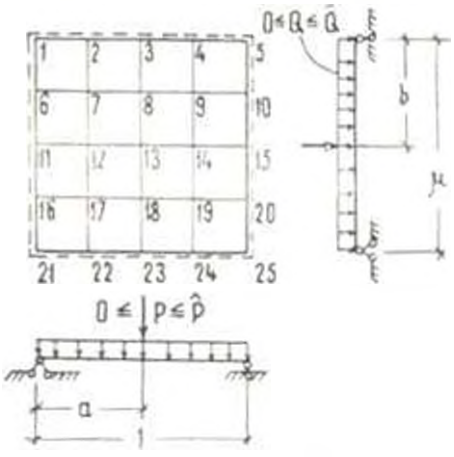
При ограничениях

$$g_i = ((M_1^* + X_1)^2 + (M_2^* + X_2)^2 - (M_1^* + X_1)(M_2^* + X_2) + 3(M_3^* + X_3)^2 \leqslant H^2)_i \tag{3.1}$$

$$l_i = (X_1^2 + X_2^2 - X_1 X_2 + 3X_3^2 \leqslant H^2)_i \tag{3.2}$$

$$w_i = (\Omega(X))_i \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Здесь: M^* — значение переменных во времени изгибающих моментов, вычисленных в предположении $\varkappa_i \to +\infty$; $i = 1, 2, 3, \ldots, 24, 25$ — номера точек сетки (фиг. 2); X — значения остаточных моментов в состоянии приспособляемости — управляемые параметры; Ω — линейный оператор дифференциального уравнения (2.1); $H = h/6$. Система ограничений (3.1)—(3.3) описывает состояние приспособляемости при квазистатическом загружении, причем (3.2) описывает момент разгрузки.



Фиг. 2

При наличии постоянной составляющей $\bar{M}$ в составе M^*, t_i может быть приведено к виду φ_i с подстановкой $\bar{M}$ взамен M^*, однако продолжает оставаться самостоятельным ограничением.

Выше указано, что анализ всего многообразия историй нагружения может быть сведен к анализу двух историй нагружения: одна из которых имеет в качестве одного из пределов модуля нуль (разгрузку), а во второй истории оба предела, не равных по модулю, имеют один знак, что эквивалентно наличию постоянной составляющей.

В целях выявления влияния постоянной нагрузки на проект ОПК был рассмотрен предельный случай $\bar{M} = M^*$. Этот вид загружения нами назван знакопостоянным: повторно-переменная нагрузка, амплитуда изменения которой пренебрежимо мала по сравнению с модулем загружения. Очевидно, что в этом случае $k = q_0$, то есть ограничение (3.2) снимается. Параллельно были рассмотрены пластины с различными коэффициентами Пуассона ν, влияющими на поле M^*. Результаты численного эксперимента для различных схем нагружения, выполненные на ЭЦВМ «Минск-22», по описанному алгоритму (при $q = 0.2$), приведены в таблице. Анализ результатов свидетельствует о том, что в рассматриваемом примере всегда $t_i = H$, то есть в (1.1) $K_1 \cap K_2 = 0$, что подтверждается непосредственным анализом X в состоянии приспособляемости. В результате расчета ОПК для квазистатической и знакопостоянной нагрузок совпадают. Более того, сравнение загру-

жений по схемам № 1 и № 2; № 3 и № 4 говорит о независимости оптимального проекта от величины ν.

Таблица

№№ схем загружения	Значения параметров								H_1/H_2 (%)
	[illegible]	ν	Q	P	a	b	квазист. H_1	квазипост. H_2	
1	1	0.3	100	—	—	—	4.39	4.39	100
2	1	0.1667	100	—	—	—	4.4	4.38	100.5
3	2	0.3	100	—	—	—	9.29	9.62	96.6
4	2	0.1667	100	—	—	—	9.59	9.57	100.3
5	3	0.3	100	—	—	—	11.63	11.62	100
6	1	0.3	—	100	0.5	0.5	16.66	15.8	105.2
7	3	0.3	—	100	1.5	1.5	14.15	14.9	95.2

H_1 H [illegible]

Следует дополнительно подчеркнуть, что в численных экспериментах, результаты которых приведены в таблице, были получены значения составляющих статически возможных полей остаточных напряжений в пластинах в состоянии приспособляемости при квазистатической и квазипостоянной нагрузках, не приведенные в статье ввиду ограниченности ее объема. «Упругие» и «остаточные» напряжения оказались зависящими от коэффициента Пуассона, тогда как ОПК оказались тождественными. Этот результат, полученный при взаимодействии переменной нагрузки со статически возможными остаточными напряжениями, безусловно, нетривиален.

Отмеченные в таблице расхождения величин H_1 и H_2 объясняются дискретностью алгоритма и свидетельствуют о его высокой точности: приведенные результаты получены при $a = 0.2$.

4. Становится реальным следующее предложение: в ряде случаев для получения ОПК возможна следующая формулировка задачи математического программирования.

Найти min $H \geq 0$

при ограничениях

$$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_1 Y_2 + 3Y_3^2 \leq H^2 \qquad (4.1)$$

$$L(Y) = Q \qquad (4.2)$$

Здесь Y — поле действующих в состоянии приспособляемости моментов при «огибающей» нагрузке Q.

Правомерность этой формулировки обосновывается следующим образом: в (3.1) M^* удовлетворяет условиям равновесия под нагрузкой и неразрывности деформаций; X — условиям самоуравновешенности; $Y = M^* + X$ должен удовлетворять уравнениям равновесия под нагрузкой, не удовлетворяя условий неразрывности деформаций, то есть, если (3.2) снимается, то (4.1)—(4.2) эквивалентны (3.1)—(3.3).

Предлагаемый подход позволяет исследовать и значительно более сложные задачи: например, задачу проектирования ОПК — пластины минимального веса переменной толщины (если узлы сетки принять за точки изменения толщины). Для решения этой задачи, в частности, целесообразно применить специально разработанный для задач математического программирования с ограничениями в виде равенств один из алгоритмов случайного поиска — алгоритм скользящего эллипса—АСЭ [7].

Вывод о возможности сформулировать задачу проектирования ОПК в виде (4.1)—(4.2), то есть без ограничений l_2 (3.2) приводит нас к обобщению, что в рассматриваемых случаях при квазистатическом нагружении (а к нему можно отнести даже силу тяжести, меняющуюся, хоть и в очень незначительных пределах, но достаточно часто!), предельной является предельная «приспосабливающая» нагрузка. Превышение ее приводит конструкцию к неограниченным, медленно, циклически накапливающимся пластическим деформациям.

Внедрение в инженерную практику проектирования с учетом приспособляемости сдерживается в настоящее время необходимостью выполнять предварительный расчет по упругой схеме [8]. Выполнение же оптимальных проектов с учетом приспособляемости при параметрах, влияющих на расчет по упругой схеме, увеличивает количество вычислений на несколько порядков и практически неосуществимо в большинстве случаев. Полученные результаты свидетельствуют о существовании некоторого класса конструкций, для которых оптимальное проектирование с учетом приспособляемости может выполняться без расчета по упругой схеме.

Нам представляется, что этот путь чрезвычайно перспективен: на нем можно реализовать известное положение В. Койтера: «тело может выдержать внешние нагрузки, прилагаемые в любой последовательности, если на каждом этапе программы нагружения можно найти безопасное статически возможное распределение напряжений». Необходимо также отметить, что доказанная в [9] способность конструкций из произвольно упрочняющегося материала приспосабливаться расширяет границы реального оптимального проектирования с учетом приспособляемости.

Днепропетровский инженерно-
строительный институт

Поступила 2 II 1976

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Զ. Ի. ՊԻՏԻՀՈՐՍԿԻ

ՈՐՈՇ ՀԱՐՄԱՐՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍԱԿԵՏԻՑ ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ, ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԱՌԱՀԱԿԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ՎՐԱ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱՆ ՊԱՏՄՈՒԹՅԱՆ ԱՊԱԿՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում են հարմարունակության տեսակետից լավագույն հենաններ և սալեր, բեռնված կրկնվող փոփոխական (քվազիկայուն) բեռով նրա փոփոխ-

ման սահմանների տարբեր հարաբերությունների: Որպես սահմանային անցման դեպք դիտարկված է քվազիհաստատուն բեռ: Հաշվի է առնված ստատիկորեն հնարավոր մնացորդային ճիգերի դաշտերի ոչ միակությունը:

Մաթեմատիկական ծրագրավորման մեթոդների կիրառությամբ ցույց է տրված, որ դիտարկվող կառուցվածքների համար հարմարվողականության տեսակետից լավագույն նախագիծը նույնն է ինչպես քվազիհաստատուն, այնպես էլ քվազիստատիկ բեռի համար, որի վերին սահմանը հավասար է քվազիհաստատունի վերին սահմանին: Այս հանգամանքը վկայում է որոշ դասի հարմարվողականության տեսակետից լավագույն նախագծման խնդիրների համար լուծում ստանալու հնարավորություն, առանց համապատասխան առաձգական հաշվարկ կատարելու:

ON THE LOAD HISTORY INFLUENCE UPON LIMIT STATE OF CERTAIN OPTIMAL ADAPTIVE STRUCTURES

Y. M. POCHTMAN, Z. I. PYATIGORSKY

S u m m a r y

Optimal adaptive beams and plates subjected to variable repeated (quasi-statical) loading with various alteration limit ratio are examined, the quasi-constant load being considered as a limiting transition. The statically possible non-uniqueness of residual stress fields is taken into account. By means of mathematical programming the design of optimal adaptive structure for the constructions is question, subjected to quasi--constant or quasi-statical loading, is shown to be identical for the case of equality of the load superior limits.

The above makes it possible to obtain the optimal adaptive design for a certain group of structures, eliminating elastic calculus.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* Оптимальное проектирование конструкций как метод установления их предельного состояния. Докл. АН СССР, 1974, т. 216, № 1.
2. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М., ИЛ, 1961.
3. *Ихрин В. А., Филиппов В. В.* Оценка деформаций, накопленных к моменту приспособляемости плоских рам. Строительная механика и расчет сооружений, 1974, № 3.
4. *Нил Б. Г.* Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов. М., 1961.
5. *Почтман Ю. М., Пятигорский З. И.* Оптимальное проектирование конструкций, приспосабливающихся к квазистатическим нагрузкам. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5.
6. *Растригин Л. А.* Системы экстремального управления. М., Изд. «Наука», 1974.
7. *Воронецкий Э. Н., Почтман Ю. М.* Алгоритм метода случайного поиска для оптимизации стержневых и континуальных систем. Строительная механика и расчет сооружений, 1974, № 5.
8. *Ходж Ф.* Приспособляемость упруго-пластических конструкций. В сб. «Остаточные напряжения». М., ИЛ, 1957.
9. *Киракосян Р. М.* Теорема о приспособляемости тел к переменным внешним воздействиям при произвольном упрочнении материала. Докл. АН Арм. ССР, 1971, т. 52, № 4.