

С. М. СААКЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пользуясь методом Каменкова Г. В. [1], исследуется процесс становления ограниченных колебаний, описываемых следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \lambda^2(t)x = \mu f(x, \dot{x}, \mu, t) \quad (1)$$

где $\lambda(t)$ — периодическая функция периода T ,
 $f(x, \dot{x}, \mu, t)$ — многочлен сколь угодно высокой степени с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами с общим периодом T ,
 μ — малый параметр.

Под ограниченными колебаниями подразумеваются те колебания, у которых x и $\dot{x}$ при $t \rightarrow \infty$ не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности и ни к какому определенному числу. Такие колебания Каменков Г. В. называет стационарными.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}x_2 + \mu f_1(x_1, x_2, \mu, t) \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$f_1(x_1, x_2, \mu, t) = \frac{1}{\lambda(t)} f(x_1, \lambda(t)x_2, \mu, t)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений и сопряженную ей линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda(t)y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\lambda(t)y_1 + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}y_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим коэффициенты при x_1, x_2 через p_{ij} ($i, j = 1, 2$), а коэффициенты при y_1, y_2 — через q_{ij} ($i, j = 1, 2$). Между этими коэффициентами существует связь

$$p_{ij} = -q_{ji}$$

Характеристические уравнения как для основной, так и для сопряженной линейной системы имеют вид [2]

$$\varphi^2 + A\varphi + 1 = 0 \quad (5)$$

Свободный член уравнения (5) определяется по формуле

$$A_0 = e^{\int_0^{T_1} \frac{d\lambda(t)}{\lambda(t)} dt} = e^{\ln \lambda(T_1) - \ln \lambda(0)} = e^0 = 1$$

Если $\frac{1}{4} A^2 \leq 1$, то оба корня характеристического уравнения (5) будут комплексными с единичными модулями. В этом случае система (3) или (4) будут иметь устойчивые периодические фундаментальные решения [2].

Пусть решения системы (4)

$$y_{1,2}^{(1)} = e^{k_1 t} \psi_{1,2}^{(1)}(t) \quad \text{и} \quad y_{1,2}^{(2)} = e^{k_2 t} \psi_{1,2}^{(2)}(t)$$

где $\psi_{1,2}^{(1,2)}(t)$ — периодические функции периода T_1

$$k_i = \frac{1}{T_1} \ln \varphi_i \quad (i = 1, 2)$$

φ_i — корни характеристического уравнения (5).

Стационарные решения системы (2) обозначим через x_1 и x_2 .

Произведя очевидные преобразования

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= \lambda(t) y_2^{(1)} \\ y_2^{(1)} &= \lambda(t) y_1^{(1)} + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} y_2^{(1)} \Big|_{x_2} \\ x_1 &= \lambda(t) x_2 \\ x_2 &= -\lambda(t) x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} x_2 + f_1(x_1, x_2, u, t) \Big|_{y_2^{(1)}} \end{aligned}$$

получим

$$-\frac{d}{dt} (x_1 y_1^{(1)} + x_2 y_2^{(1)}) = y_2^{(1)} f_1(x_1, x_2, u, t) \quad (6)$$

Аналогично уравнению (6) имеем

$$\frac{d}{dt} (x_1 y_1^{(2)} + x_2 y_2^{(2)}) = y_2^{(2)} f_1(x_1, x_2, u, t) \quad (7)$$

Обозначая через

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 y_1^{(1)} + x_2 y_2^{(1)} \\ z_2 &= x_1 y_1^{(2)} + x_2 y_2^{(2)} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= y_2^{(1)} f_1(x_1, x_2, \mu, t) \\ F_2 &= y_2^{(2)} f_1(x_1, x_2, \mu, t) \end{aligned} \quad (9)$$

получим следующую систему нелинейных нестационарных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \mu F_1(z_1, z_2, \mu, t) \\ \frac{dz_2}{dt} &= \mu F_2(z_1, z_2, \mu, t) \end{aligned} \quad (10)$$

Функции F_1 и F_2 разложим в сходящиеся степенные ряды по степеням малого параметра μ .

$$F_i(z_1, z_2, \mu, t) = \mu F_{i1}(z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{i2}(z_1, z_2, t) + \dots \quad (i = 1, 2)$$

где $F_{ij}(z_1, z_2, t)$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, \dots$) — многочлены сколь угодно высоких степеней с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами.

Подставляя выражения для $F_i(z_1, z_2, t)$ в уравнение (10), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \mu F_{11}(z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{12}(z_1, z_2, t) + \dots \\ \frac{dz_2}{dt} &= \mu F_{21}(z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{22}(z_1, z_2, t) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Определим необходимые и достаточные условия существования стационарных колебаний системы (11) по членам первого порядка в отношении μ . Положим $z = z_1 + iz_2$, $\bar{z} = z_1 - iz_2$.

Будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mu z_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 z_2(z, \bar{z}, t) + \dots \\ \dot{\bar{z}} &= \mu \bar{z}_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 \bar{z}_2(z, \bar{z}, t) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуем систему (12), полагая

$$\begin{aligned} z &= \bar{z} + \mu U(z, \bar{z}, t) \\ \bar{z} &= \bar{z} + \mu \bar{U}(z, \bar{z}, t) \end{aligned} \quad (13)$$

Функции $U, \bar{U}$ определим так, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль функций $z, \bar{z}$, не зависели от времени. Представим $z, \bar{z}$ и $U, \bar{U}$ в виде

$$z_1 = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{p=0}^k \sum_{\alpha=0}^p Q_{p-\alpha, \alpha}(t) z^{p-\alpha} \bar{z}^{\alpha} \quad (14)$$

$$U = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{p=0}^k \sum_{\alpha=0}^p U_{p-\alpha, \alpha}(t) z^{p-\alpha} \bar{z}^{\alpha}$$

где $U_{p-\alpha, \alpha}(t)$ — периодическая функция периода T_2 .

Подставляя выражения (13) и (14) в (12), приравнявая члены одинаковых порядков, получаем дифференциальное уравнение для определения $U_{p-\alpha, \alpha}(t)$

$$-\frac{dU_{p-\alpha, \alpha}(t)}{dt} + Q_{p-\alpha, \alpha}(t) = Q_{p-\alpha, \alpha}^{(1)}(t) \quad (15)$$

Из последнего равенства следует, что соответствующим выбором функции $U_{p-\alpha, \alpha}(t)$ все величины $Q_{p-\alpha, \alpha}^{(1)}(t)$ можно принять постоянными, которые обозначим через $B_{p-\alpha, \alpha}$.

Постоянные $B_{p-\alpha, \alpha}$ определяются по формуле

$$B_{p-\alpha, \alpha} = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} Q_{p-\alpha, \alpha}(t) dt$$

Принимая $p = 2\alpha + 1$, имеем

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = \mu^2 \sum_{\alpha=1}^k B_{\alpha+1, \alpha} (\tilde{\xi} \cdot \bar{\tilde{\xi}})^{\alpha} + \mu^2(\dots)$$

Полагая

$$B_{\alpha+1, \alpha} = a_{\alpha+1, \alpha} + i b_{\alpha+1, \alpha}, \quad \tilde{\xi} = \gamma_{i1} + i \gamma_{i2}, \quad \bar{\tilde{\xi}} = \gamma_{i1} - i \gamma_{i2}$$

будем иметь

$$\frac{d\gamma_{i1}}{dt} = \mu \left[\gamma_{i1} \sum_{\alpha=1}^k a_{\alpha+1, \alpha} (\gamma_{i1}^2 + \gamma_{i2}^2)^{\alpha} - \gamma_{i2} \sum_{\alpha=1}^k b_{\alpha+1, \alpha} (\gamma_{i1}^2 + \gamma_{i2}^2)^{\alpha} \right] + \mu^2(\dots) \quad (16)$$

$$\frac{d\gamma_{i2}}{dt} = \mu \left[\gamma_{i2} \sum_{\alpha=1}^k a_{\alpha+1, \alpha} (\gamma_{i1}^2 + \gamma_{i2}^2)^{\alpha} + \gamma_{i1} \sum_{\alpha=1}^k b_{\alpha+1, \alpha} (\gamma_{i1}^2 + \gamma_{i2}^2)^{\alpha} \right] + \mu^2(\dots)$$

Переходя к полярным координатам,

$$\gamma_{i1} = r \cos \theta, \quad \gamma_{i2} = r \sin \theta$$

получаем дифференциальные уравнения относительно r и θ

$$\frac{dr}{dt} = \mu r \sum_{\alpha=1}^k a_{\alpha+1, \alpha} r^{2\alpha} + \mu^2(\dots) \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu \sum_{\alpha=1}^k b_{\alpha+1, \alpha} r^{2\alpha} + \mu^2(\dots) \quad (18)$$

Каменковым доказано [1], что необходимое и достаточное условие существования периодических решений уравнения (17) по членам первого порядка независимо от старших членов заключается в том, чтобы уравнение

$$L_1(r) = r \sum_{\alpha=1}^k a_{\alpha+1,2} r^{2\alpha} = 0 \quad (19)$$

имело, по крайней мере, один положительный корень нечетной кратности.

Предположим, что алгебраическое уравнение (19) имеет вещественный положительный корень r_0 , тогда переменная ξ записывается в виде

$$\xi = r_0 (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Подставляя это значение в выражение $z = \xi + \mu I(z, \bar{z}, t)$, учитывая, что $z = z_1 + iz_2$ и решая полученное уравнение относительно z_1 и z_2 , найдем

$$\begin{aligned} z_1 &= r_0 \cos \theta + \mu P(r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta, t) \\ z_2 &= r_0 \sin \theta + \mu Q(r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta, t) \end{aligned} \quad (20)$$

Это решение будет стационарным.

Учитывая (20), из системы алгебраических уравнений (18) определяем x_1 и x_2 — стационарные решения системы дифференциальных уравнений (2).

Выражение θ через t с точностью до членов первого порядка малости в отношении μ найдем из уравнения (18).

Если вопрос о существовании стационарных колебаний членами первого порядка в отношении μ не решается, то систему (11) преобразуем по формуле

$$\begin{aligned} z &= \xi + \mu U_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 U_2(z, \bar{z}, t) + \dots + \mu^5 U_5(z, \bar{z}, t) \\ \bar{z} &= \bar{\xi} + \mu \bar{U}_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 \bar{U}_2(z, \bar{z}, t) + \dots + \mu^5 \bar{U}_5(z, \bar{z}, t) \end{aligned} \quad (21)$$

Стационарные колебания определяются из решения алгебраического уравнения

$$r(\mu L_1 + \mu^2 L_2 + \dots + \mu^5 L_5) = 0$$

Ս. Մ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՄԵԿ ՈՉ ԴԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖՖԵՐԵՆՑԻԱԼ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՈՎ ՆԿԱՐԱԳՐՎՈՂ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ա մ փ ո ւ մ

Աշխատանքում հետազոտվում են ժամանակի նկատմամբ պարբերական գործադրվող ոչ գծային և ոչ տատացիոնար երկրորդ կարգի դիֆֆերենցիալ հավասարումով նկարագրվող սահմանափակ տատանումները: Կառուցված են հավասարման տատացիոնար լուծումները:

THE INVESTIGATION OF LIMITED VIBRATION DESCRIBED
BY A NONLINEAR AND NONSTATIONARY DIFFERENTIAL
EQUATION OF THE SECOND ORDER

S. M. SAHAKIAN

S u m m a r y

A limited vibration, described by the nonlinear and nonstationary differential equation of the second order with time periodical coefficient is investigated.

The stationary solutions of the equation are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Каменков Г. В. Избранные труды, т. I, М., изд. «Наука», 1971.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, М., изд. АН СССР, 1936.