ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

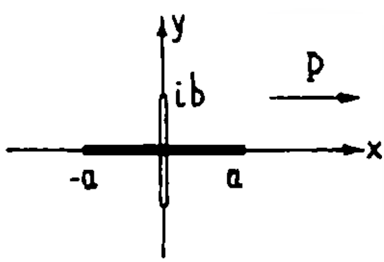
А. И. КАЛАНДИЯ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ В ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Метод функции влияния в соединении с приближенными способами решения сингулярных интегральных уравнений представляет эффективное средство при решении задач о плоском деформировании упругих тел, снабженных стрингерами и трещинами. Это и иллюстрируется ниже на двух конкретных примерах.

§ 1. *Стрингер-трещина*

Геометрия задачи показана на фиг. 1. Бесконечная пластинка имеет трещину, расположенную на мнимой оси от $-ib$ до ib, и сплошной стрингер длины $2a$, прикрепленный к пластинке вдоль отрезка $[-a, a]$ вещественной оси, перекрывает трещину, деля длину ее пополам. Простоты ради будем считать, что к берегам разреза и к стрингеру внешних сил не приложено, а пластинка растягивается на бесконечности усилиями P, параллельными оси стрингера (перпендикулярными линии разреза). Зададимся целью определения степени влияния стрингера на интенсивность напряжений на концах разреза.



Фиг. 1.

Под стрингером (иногда называют накладкой, либо ребром жесткости) подразумевается упругий стержень постоянного поперечного сечения, не обладающий изгибной жесткостью. Более точно, стрингер в нашем рассмотрении представляет собой идеализированную упругую линию, вообще говоря, из другого материала, работающую лишь на растяжение. Рассмотрение включает в себе как плоскую деформацию упругой среды, изотропной и однородной, так и обобщенное плоское напряженное ее состояние*.

* Плоские задачи со стрингерами до сих пор привлекают внимание как зарубежных, так и советских механиков-математиков. Из работ наших авторов следует, в первую очередь, назвать работы Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна. Подробные указания на эти работы, а также и некоторые другие, сюда относящиеся, можно найти, например, в [1, 2].

Пусть σ_x, σ_y, τ_{xy}, u, v — элементы плоских упругих полей, N — усилия в стрингере, S_0, b_0 — поперечное сечение и ширина стрингера, E, ν, h — упругие постоянные и толщина пластинки. Символы E и h со значком 0 будут относиться к материалу стрингера.

Обозначая, далее, линию разреза и ось стрингера, соответственно, через l и L, будем иметь граничную задачу (напр., [1], § 33).

$$h\left[\tau_{xy}^{+}-\tau_{xy}^{-}\right]+\frac{d}{dx}N(x)=0, \quad \sigma_y^{+}-\sigma_y^{-}=0 \tag{1.1}$$

$$u^{+}+iv^{+}=u^{-}+iv^{-}, \quad \varepsilon_x^{+}=\varepsilon_x^{-}=\varepsilon^0 \quad \text{на} \quad L$$

$$\sigma_y+i\tau_{xy}=0 \quad \text{на} \quad l \tag{1.2}$$

Здесь ε_x — деформация удлинения в пластинке относительно оси x, ε^0 — относительное удлинение оси стрингера. Предыдущие граничные условия должны выполняться на соответствующих линиях l и L всюду, за исключением концов линий и точки их пересечения.

Первая группа равенств (1.1) выражает условия равновесия любого элементарного куска стрингера, сцепленного с пластинкой, с учетом отсутствия у него жесткости на изгиб, а вторая группа—условие непрерывности смещений и деформаций удлинения при переходе через ось стрингера. Смысл условий (1.2) очевиден.

Усилия в стрингере $N(x)$ и скачок касательных напряжений $q(x)=-\tau_{xy}^{+}+\tau_{xy}^{-}$ удовлетворяют на L условиям симметрии:

$$N(-x)=N(x), \quad q(-x)=-q(x) \quad |x|<a$$

ввиду чего первое из равенств (1.1) может быть записано в виде

$$h\int_0^x\left(\tau_{xy}^{+}-\tau_{xy}^{-}\right)dt+N(x)-N_0=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a \tag{1.3}$$

где N_0 означает значение функции $N(x)$ в точке $x=0$, $N_0=N(0)$. Постоянная N_0 не задана заранее и подлежит определению вместе с другими неизвестными в ходе решения задачи.

Можно доказать ([1], стр. 207—208), что функция

$$\omega(z)=\varkappa\varphi(z)+z\overline{\varphi'}(z)+\overline{\psi}(z)$$

аналитически продолжима через отрезок L, из которого удалена точка $z=0$, и, следовательно, голоморфна в плоскости z всюду вне разреза l. На бесконечности функция $\omega(z)$ имеет, разумеется, особую точку, характерную для заданных внешних усилий.

Потенциалы же Колосова-Мусхелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$ будут кусочно-голоморфными в плоскости z, разрезанной вдоль обеих линий l и L.

Рассуждением, основанным на голоморфности $\omega(z)$ и аналогичным приведенному в [1], § 33, заключаем, что граничные условия вдоль линии контакта L эквивалентны следующим двум вещественным равенствам:

$$\mathrm{Re}\,[\varphi^+(t) - \varphi^-(t)] = 0 \quad \text{на} \quad L \tag{1.4}$$

$$\int_0^x (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)\,dt + K_0\,\mathrm{Re}\,\frac{d}{dx}\left[\varkappa\varphi(x) - x\overline{\varphi'(x)} - \overline{\psi(x)}\right] - \frac{N_0}{h} = 0$$

$$0 < x < a$$

причем (в случае обобщенного плоского напряженного состояния)

$$K_0 = \frac{E_0 S_0}{2\mu h}, \qquad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

Граничные условия на разрезе (1.2) в функциях[1]

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Omega(z) = \overline{\Phi}(-z) - z\overline{\Phi}'(-z) - \overline{\Psi}(-z) \\ \psi'(z) = \Psi(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) - \overline{\Omega}(-z) \end{gathered} \tag{1.5}$$

принимают вид (см. [3], § 120)

$$\Phi^{\pm}(t) + \Omega^{\mp}(t) = 0 \quad \text{на} \quad l \quad (t = iy, \; -b < y < b) \tag{1.6}$$

Как всегда, равенство при верхних знаках относится к левому берегу разреза (по отношению к выбранному на нем положительному направлению), а при нижних — к правому.

Представим теперь решение нашей задачи в виде суммы

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \Phi_*(z) + \Phi_0(z) \\ \Omega(z) = \Omega_*(z) + \Omega_0(z) \end{gathered} \tag{1.7}$$

где Φ_0, Ω_0 характеризуют поле напряжений в разрезанной вдоль l плоскости при ее растяжении (основное поле), а Φ_*, Ω_* — дополнительное поле, возникшее из-за наличия стрингера и исчезающее на бесконечности.

Функции Φ_0, Ω_0 непосредственно находятся из формул Н. И. Мусхелишвили (напр., [1], стр. 225), дающих решение задачи об изолированной трещине в однородном поле. В нашем случае, когда

$$\Gamma = \frac{P}{4}, \qquad \Gamma' = -\frac{P}{2}, \qquad a = -b, \quad b = b$$

они дают

$$\Phi_0(z) = \frac{Pz}{2X(z)} - \frac{P}{4}, \qquad \Omega_0(z) = \frac{Pz}{2X(z)} + \frac{P}{4} \tag{1.8}$$

[1] Черта над символом функции означает переход к сопряженной функции от сопряженного аргумента: $\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$.

$$X(z) = \sqrt{z^2 + b^2} \tag{1.9}$$

Для построения потенциалов Φ_*, Ω_* дополнительного поля зададимся функцией влияния в виде

$$\Phi_*(z, y) = -p(y)\frac{2y}{z^2 - y^2} + \Phi_1(z, y) \tag{1.10}$$

$$\Omega_*(z, y) = -p(y)\left[\frac{2(\varkappa + 1)y}{z^2 - y^2} - \frac{z + y}{(z - y)^2} + \frac{z - y}{(z + y)^2}\right] + \Omega_1(z, y)$$

где

$$2\pi(1 + \varkappa)\,p(y) = -\tau_{xy}^{+}(y, 0) + \tau_{xy}^{-}(y, 0) \tag{1.11}$$

а Φ_1, Ω_1 — искомые функции от z и y, голоморфные в плоскости z всюду вне разреза для любого y из L, $-a \leqslant y \leqslant a$.

Функции Φ_* и Ω_*, согласно нашим построениям, должны давать решение задачи о трещине в бесконечной плоскости, когда в симметричных ее точках $z = y$ и $z = -y$, расположенных на L, приложены равные по величине и обратные друг другу сосредоточенные силы $(p, 0)$ и $(-p, 0)$. Характер сосредоточенных сил определен равенством (1.11). В точке $z = 0$, очевидно, сил не приложено.

Подчинив Φ_*, Ω_* граничному условию (1.6), придем для Φ_1, Ω_1 к первой основной задаче в плоскости с разрезом. Решив эту задачу в замкнутом виде ([3], § 120) и подставив ее решение Φ_1, Ω_1 в (1.10), найдем функцию влияния в явной форме. Ее можно, разумеется, выразить, согласно (1.5), и в функциях $\Phi_*(z, y)$, $\Psi_*(z, y)$. Если затем проинтегрировать правые части равенств, определяющих Φ_* и Ψ_*, по отрезку $[0, a]$, предварительно помножив их на dy, и добавить к интегралам функции Φ_0 и Ψ_0 из (1.8), то получим для искомых потенциалов нашей задачи следующие представления [4]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a K_1(z, y)\,p(y)\,dy + \Phi_0(z)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a K_2(z, y)\,p(y)\,dy + \Psi_0(z) \tag{1.12}$$

$$K_1(z, y) = 2y\left[-\frac{1}{z^2 - y^2} + \frac{I(z, y)}{X(z)}\right]$$

$$K_2(z, y) = 2y\left[\frac{\varkappa}{z^2 - y^2} - \frac{z^2 + y^2}{(z^2 - y^2)^2} + z\frac{d}{dz}\frac{I(z, y)}{X(z)}\right]$$

$$I(z, y) = \frac{1}{X(z) + X(y)}\left\{\frac{\varkappa - 1}{2} + \frac{y^2}{X(y)[X(z) + X(y)]}\right\}$$

$$\Psi_0(z)=\frac{Pz}{X(z)}-\frac{P}{2}-\frac{Pz}{2}\frac{d}{dz}\frac{z}{X(z)};\qquad \tau(y)=2\pi p(y)$$

Потенциалы (1.12) удовлетворяют, в силу их построения, условию отсутствия вдоль берегов разреза внешних усилий при любом $\tau(x)$. Легко также видеть, что функция $\varphi(z)$,— первообразная $\Phi(z)$, удовлетворяет первому из условий (1.4). Остается удовлетворить второму из указанных условий, которое мы перепишем в виде

$$-(1+\nu)\int_0^x \tau(y)\,dy+K_0\operatorname{Re}\{(\varkappa-1)\Phi(x)-x\overline{\Phi'(x)}-\overline{\Psi(x)}\}-\frac{N_0}{h}=0 \tag{1.13}$$

Под выражением в фигурной скобке здесь понимаются равные между собой предельные значения в точке x функции

$$(\varkappa-1)\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(x)}$$

слева и справа от L.

Если теперь, воспользовавшись формулами Сохоцкого—Племеля ([1], стр. 16), внесем предельные значения функций (1.12) в условие (1.13), то получим для определения неизвестной функции $\tau(x)$ сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^a\frac{\tau(y)\,dy}{y-x}+\frac{1}{2\pi}\int_0^a k_0(x,y)\,\tau(y)\,dy-\frac{\sigma_0}{2(3-\nu)}=f_0(x) \tag{1.14}$$

$$0\leqslant x<a$$

при

$$k_0(x,y)=\frac{1}{x+y}+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,y\,\frac{l(x,y)}{X(x)}-\frac{2xy}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\frac{l(x,y)}{X(x)}-$$

$$-\frac{(1+\nu)\pi}{\varkappa(1+\nu)}\frac{1}{h_0 g}H(x-y)$$

$$f_0(x)=-\frac{P}{8\varkappa}\left[3-\varkappa+\frac{2(\varkappa-3)x}{X(x)}+\frac{4x^2}{X^3(x)}\right];\qquad g=\frac{E_0h_0}{Eh},\qquad \sigma_0=\frac{EN_0}{E_0S_0}$$

H означает ступенчатую функцию Хевисайда,

$$H(u)=1\quad\text{при}\quad u>0,\quad H(u)=0\quad\text{при}\quad u<0$$

К уравнению (1.14) следует еще присоединить дополнительное условие,— условие равновесия всего стрингера, скрепленного с пластинкой. Условие это, получаемое из (1.3) при $x=a$, принимает в наших обозначениях вид

$$\int_0^a \tau(x)\,dx = -\lambda\sigma_0, \qquad \lambda = \frac{b_0 g}{1-\varkappa} \tag{1.15}$$

Известно [5], что порядок сингулярности функции $\tau(x)$ на правом конце отрезка $[0, a]$ в точности равен $1/2$, а на левом конце положителен, но меньше $1/2$, зависит от коэффициента Пуассона материала пластинки ν и при $\nu=0.3$ примерно равен $1/4$. В соответствии с этим нам следует разыскивать решение уравнения (1.14), (1.15) в классе функций, не ограниченных ни на одном из концов отрезка.

После нахождения решения интегрального уравнения можно определить все искомые нашей задачи. Главная цель задачи — определение влияния стрингера на распределение сингулярных напряжений около концов разреза. Влияние это полностью характеризуется отношением

$$\delta = \frac{K}{K_0}$$

где K и K_0 означают коэффициенты интенсивности напряжений на концах разреза в пластинке со стрингером и без него, соответственно. Число K_0 — коэффициент интенсивности напряжений на концах трещины Гриффитса длины $2b$, как известно, равно

$$K_0 = \sqrt{b}\,P$$

Элементарные вычисления показывают, что отношение δ может быть найдено через решение $\tau(x)$ в виде

$$\delta = 1 + \frac{1}{2\pi b}\int_0^a M(x)\,\tau(x)\,dx \tag{1.16}$$

$$M(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+b^2}}\left(\varkappa - 1 + \frac{2x^2}{x^2+b^2}\right)$$

После замены переменных

$$2x = a(\xi+1), \quad 2y = a(\eta+1)$$

уравнение (1.14), (1.15) примет стандартную форму, удобную для его приближенного решения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k(\xi,\eta)\,\tau(\eta)\,d\eta - \frac{\sigma_0}{2(3-\nu)} = f(\xi) \tag{1.17}$$

$$\int_{-1}^{1}\tau(\eta)\,d\eta = -2\lambda\frac{\sigma_0}{a}$$

где использованы обозначения

$$\tau(\xi) = \tau(x), \qquad k(\xi, \eta) = \frac{a}{2} k_0(x, y), \quad f(\xi) = f_0(x)$$

Для решения (1.17) обратимся к приближенному способу, указанному в [1], § 13. Искомое решение $\tau(\xi)$, разрывное по условию на обоих концах отрезка $[-1, 1]$, представляется в виде

$$\tau(\xi) = \frac{\tau_0(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

где τ_0 — непрерывная функция, заменяемая интерполяционным полиномом Лагранжа (n — натуральное число)

$$\tau_0(\xi) \sim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \tau_0(\xi_k) \frac{\cos n\theta \sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k}, \quad \xi = \cos \theta$$

построенным по чебышевским узлам

$$\xi_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2n}, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Способ приводит решение (1.17) к системе линейных алгебраических уравнений для определения значений искомого τ в узлах интерполяции и постоянной σ_0:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{m\nu} \tau_\nu^0 - \frac{\sigma_0}{2(3-\nu)} = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n \tag{1.18}$$

$$\frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \tau_\nu^0 + \frac{2\lambda}{a} \sigma_0 = 0$$

где

$$a_{m\nu} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_\nu}{2} + k(\xi_m, \eta_\nu) \right]$$

$$f_m = f(\xi_m), \quad \tau_m^0 = \tau_0(\xi_m), \quad \xi_m = \eta_m$$

В формуле для $a_{m\nu}$ верхний знак берется при $|m - \nu| = 0, 2, \dots$, а нижний — при $|m - \nu| = 1, 3, \dots$

Решение (1.18) даст приближенное аналитическое выражение для $\tau(\xi)$ и определит также (максимальное) значение усилия $N(x)$ в середине стрингера. Величина (1.16), например, найдется по приближенной формуле

$$\lambda \approx 1 + \frac{1}{4n} \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{n} m(\cos \theta_k) \tau_k^0, \qquad m(\xi) = M(x)$$

Система (1.18) решалась на ЭВМ при

$$P = 1, \quad b_0 = 0.2, \quad b = 1, \quad \nu = 1/3 \quad (\varkappa = 2)$$

и определялись значения δ для различных длин стрингера и относительной жесткости g.

Стрингер, как и следовало ожидать, уменьшает напряжения на концах разреза. Отношение δ убывает при увеличении a и g, и в диапазоне $1 \leqslant a$, $g \leqslant 10$ меняется от 0.9951 до 0.7780. Небезынтересно отметить, что при любых a и g, как это нетрудно установить из физических соображений,

$$\delta > \frac{K_1}{K_2}$$

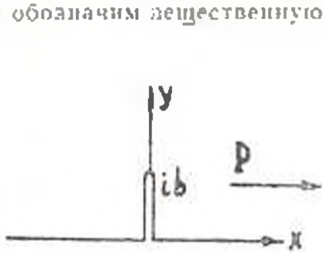
где K_1, K_2 — коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещин Гриффитса, имеющих длины l и $2l$ соответственно. Значит, в любой ситуации со стрингером, $1 > \delta > 1/\sqrt{2} = 0.7071$.

Решение задачи в случае, когда стрингер переломан в сечении $x = 0$, то есть состоит из двух симметричных кусков, получится из приведенного выше, если положить всюду $N_1 = \sigma_1 = 0$. Этот случай рассматривался в работе [4], которая и была использована в настоящем параграфе.

Как показано в названной работе, перелом стрингера (в сечении $x = 0$) приводит к обратной картине,— к увеличению интенсивности напряжений вблизи концов разреза. Здесь, при любых a и g, $\delta > 1$.

§ 2. *Полуплоскость с надрезом*

Прямолинейная трещина длины $b = 2l$ выходит на границу упругой полуплоскости под прямым углом, берега трещины и край полуплоскости свободны от внешних усилий, и среда подвержена на бесконечности воздействию растягивающих усилий P, перпендикулярных линии разреза. Область S, занятую упругой средой, расположим на верхней полупкоскости, как показано на фиг. 2, и обозначим вещественную ось через L.



Фиг. 2.

В обозначениях

$$\omega(z) = z\varphi'(z) + \psi(z)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \varphi(z) + \overline{\omega(z)} + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)}$$

граничные условия задачи запишутся в виде

$$\varphi(t)+\overline{\omega(t)}=\mathrm{const}\quad\text{на}\quad L \tag{2.1}$$

$$\Omega(z,\bar z)=\mathrm{const}\quad z=iy,\quad 0<y<b \tag{2.2}$$

Ввиду однородности поля на бесконечности

$$\varphi(z)=\varphi_*(z)+\frac{P}{4}z$$

$$\omega(z)=\omega_*(z)-\frac{P}{4}z$$

где φ_*, ω_* — голоморфные в S функции, допускающие при больших $|z|$ асимптотику

$$\varphi_*(z)=o(1),\quad \omega_*(z)=o(1)$$

Задаваясь функцией влияния в виде

$$\varphi_*(z,\eta)=-\frac{q(\eta)}{z-i\eta}+\varphi_1(z,\eta)$$

$$\omega_*(z,\eta)=q(\eta)\left[\frac{1}{z-i\eta}+\frac{2z}{(z-i\eta)^2}\right]+\omega_1(z,\eta);\quad 0\leqslant\eta\leqslant b$$

и рассуждая как в предыдущем параграфе, приходим к представлениям для φ и ω

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^b K_1(z,\eta)\,q(\eta)\,d\eta+\frac{P}{4}z \tag{2.3}$$

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^b K_2(z,\eta)\,q(\eta)\,d\eta-\frac{P}{4}z$$

Потенциалы (2.3) приводят задачу (2.1), (2.2) к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^b\frac{q(\eta)\,d\eta}{\eta-y}+\frac{1}{2\pi}\int_0^b k_0(y,\eta)\,q(\eta)\,d\eta=\frac{P}{4}y+c \tag{2.4}$$

В предыдущих равенствах

$$-K_1(z,\eta)=\frac{1}{z-i\eta}+\frac{1}{z+i\eta}+\frac{2z}{(z-i\eta)^2}$$
$$K_2(z,\eta)=-K_1(z,-\eta)$$

$$-k_0(y,\eta)=\frac{1}{\eta+y}-\frac{2y(\eta-y)}{(\eta+y)^3}$$

$q(y)$ — новая искомая вещественная функция на отрезке $[0, b]$, связанная с горизонтальным смещением вдоль берегов разреза соотношением

$$-q(y) = \frac{2\mu}{\varkappa+1} u(0, y), \quad 0 < y < b \tag{2.5}$$

а c — произвольная вещественная постоянная[1].

Основное интегральное уравнение задачи (2.4) естественно назвать уравнением Бюкнера. После преобразования переменных

$$y = l(1+\xi), \quad \eta = l(1+t) \tag{2.6}$$

где l — полудлина разреза, уравнение принимает стандартную форму

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(t)\,dt}{t-\xi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k(\xi, t)\,p(t)\,dt = f(\xi) - C, \quad -1 < \xi < 1 \tag{2.4'}$$

$$-k(\xi, t) = \frac{1}{2+t+\xi} + \frac{2(t-\xi)(1-\xi)}{(2+t+\xi)^2} \tag{2.7}$$

$$p(\xi) = q(y), \quad f(\xi) = \frac{Pl}{4}(1+\xi)$$

В соответствии с (2.5), необходимое нам решение (2.4) должно быть ограниченным на отрезке $[0, b]$.

В связи с применением к (2.4) способа приближенного решения, предложенного в [1], § 13 и использованного в предыдущем параграфе, возникает затруднение, заключающееся в следующем. Построенное по этому способу приближенное решение (2.4) в классе ограниченных на отрезке функций обращается в нуль на обоих концах отрезка как квадратный корень от расстояния, а искомое ограниченное решение $q(y)$, согласно (2.5), при $y=0$ в нуль обратиться не может.

Чтобы обойти эту трудность можно попытаться ввести в (2.4) новую искомую функцию

$$q_0(y) = \sqrt{\frac{y}{l}}\, q(y) \tag{2.8}$$

обращающуюся в нуль на концах отрезка, и затем построить ограниченное решение уравнения для q_0, использовав для этой цели произвольную постоянную c[2]. Однако, как замена (2.8), приводящая к уравнению с менее гладким ядром, так и необходимость подбора постоянной c из некоторого функционального уравнения, заметно снижает точность вычислений.

Представляется более целесообразным продифференцировать уравнение (2.4) и, затем, произвести интегрирование по частям, используя очевидное равенство $q(b)=0$. Тогда получим уравнение

---

[1] Подробности см. в [2], § 37а

[2] Решение задачи, основанное на этом соображении, дано в [2], § 37в.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^b \frac{q'(\eta)\, d\eta}{\eta - y} - \frac{1}{2\pi}\int_0^b k_0(\eta, y)\, q'(\eta)\, d\eta = \frac{P}{4}$$

которое после замены (2.6) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\tau(t)\, dt}{t - \xi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} k(t, \xi)\, \tau(t)\, dt = \frac{P}{4} \tag{2.9}$$

Ядро $k(\xi, t)$ определяется формулой (2.7),

$$\tau(\xi) = q'(y); \quad y = l(\xi + 1) \tag{2.10}$$

Уравнение (2.4) от размера трещины не зависит.

В результате не стало постоянной c, обеспечивающей существование ограниченного решения, но отпала и необходимость в ней, ибо расширился класс функций, в котором следует разыскивать решение интегрального уравнения. Согласно (2.5) и (2.10), искомое решение (2.9) должно оставаться ограниченным лишь на левом конце отрезка $[-1, 1]$. На другом же конце ему позволено обращаться в бесконечность порядка $1/2$.

К решению (2.9) вполне подходит способ решения, о котором выше говорилось. Полагая на этот раз ([1], § 13, п. 2),

$$\tau(\xi) = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\, \tau_0(\xi) \tag{2.11}$$

$$\tau_0(\xi) \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \tau_0(\xi_k) \frac{\cos n\theta \cos\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}, \qquad \xi = \cos\theta$$

приводим решение (2.9) к системе линейных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{m\nu} \tau_\nu^0 = \frac{P}{4}, \qquad m = 1, 2, \dots, n \tag{2.12}$$

$$\alpha_{m\nu} = \frac{1}{2n}\left[1 \pm \operatorname{ctg}\frac{\theta_m}{2} \operatorname{ctg}\frac{\theta_m \pm \theta_\nu}{2} - (1 + t_\nu)\, k(t_\nu, \xi_m)\right]$$

$$\xi_m = t_m = \cos\theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n}\pi, \quad \tau_m^0 = \tau_0(\xi_m)$$

Правило знаков в $\alpha_{m\nu}$ указано вслед за формулами (1.22).

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K на концах разреза обратимся к известным соотношениям (напр., [3], стр. 610), которые в нашем случае должны быть записаны в виде (вблизи конца $y = b$)

$$u(o, y) = \mp \frac{\varkappa + 1}{4\mu} K \sqrt{2(b - y)} + O((b - y)^{3/2}) \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dy} u(o, y) = \pm \frac{\varkappa + 1}{4\mu} \frac{K}{\sqrt{2(b - y)}} + O((b - y)^{1/2})$$

На основании (2.5), (2.10), (2.11) и (2.13) имеем теперь

$$K = 2\sqrt{2l} \lim_{t \to 1} \sqrt{1-t}\, \varphi(t) - 4\sqrt{l} \lim_{\theta \to 0} \varphi_0(\cos\theta) -$$

$$- \frac{4\sqrt{l}}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \varphi_k \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}$$

Следовательно ($P=1$),

$$\delta_* = \frac{K}{\sqrt{2}\, K_0} = \frac{2\sqrt{2}}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \varphi_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} \qquad (2.14)$$

Отметим, что на рассматриваемый здесь типичный пример трещины с концом, выходящим на свободную поверхность среды, не раз обращали внимание видные ученые, указавшие для его решения ряд приближенных способов (Уэстсуэрт, Ирвин, Бюкнер, Койтер и др.)*. Особый интерес представляет, разумеется, нахождение отношения (2.14), которое и определялось с той или иной степенью точности. Найденные названными авторами значения отношения δ_* расположены между 1.10 и 1.13. Согласно Койтеру, значение δ_* с возможной ошибкой в пределах единицы последнего знака равно 1.1215.

Формула (2.14) по решению системы (2.12) при $P=1$ дает

n	3	10	15	20	25	30
δ_*	1.1134	1.1203	1.1230	1.1212	1.1213	1.1214
ε	1.5715	1.5844	1.5853	1.5856	1.5858	1.5859

Как видно из таблицы, значение $\delta_* = 1.10$ (результат Ирвина) получается уже при $n=3$, а для достижения высокой точности необходимо брать число n порядка 30.

Математический институт
им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР

Поступила 10 II 1970

Ա. Ի. ԿԱԼԱՆԴԻԱ

ՀԱՐԹ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ճաքերով հարթ խնդրի օրինակների վրա ցույց է տրված ազդեցության ֆունկցիայի մեթոդի կիրառումը միացված ինտեգրալ հավասարումների լուծման մոտավոր եղանակների համար։

Հոդվածը բաղկացած է երկու պարագրաֆից։

* Ссылки на работы этих авторов имеются в [2], стр. 262.

Առաջին պարագրաֆում ճեղք ունեցող անվերջ հարթությունը ծածկված է վերադիր երկայնությամբ խաչաձև ամրացումով, իսկ երկրորդում դիտարկված է լավ հայտնի կտրված կիսահարթության վերաբերյալ խնդիրը: Բերված են թվային հաշվումների արդյունքները:

ON APPLICATION OF THE EFFECT FUNCTION METHOD TO THE PLANE THEORY OF ELASTICITY

A. I. KALANDIA

Summary

A plane problem involving stringers and cracks is used to illustrate the application of the effect function method, associated with approximate procedures of solving singular integral equations.

The paper consists of two sections: the former concerning an infinite plane having a slit cruciformly overlapped by stringer while the latter deals with the familiar problem on a slightly cut semi-plane.

Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., Наука, 1973.
2. *Kalandia A. I.* Mathematical Methods of Two-dimensional Elasticity, Moscow, Mir Publishers, 1975.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5-ое. М., Наука, 1966.
4. *Жоржолиани Г. Т.* Влияние стрингера на распределение напряжений около концов разреза. Сообщения АН Гр. ССР, 1974, т. 74, № 3, стр. 365—368.
5. *Муки, Стернберг.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикладная механика (перев. Трудов Амер. о-ва инж.-механ.), 1968, т. 35, сер. Е, № 4, стр. 124—133.