ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

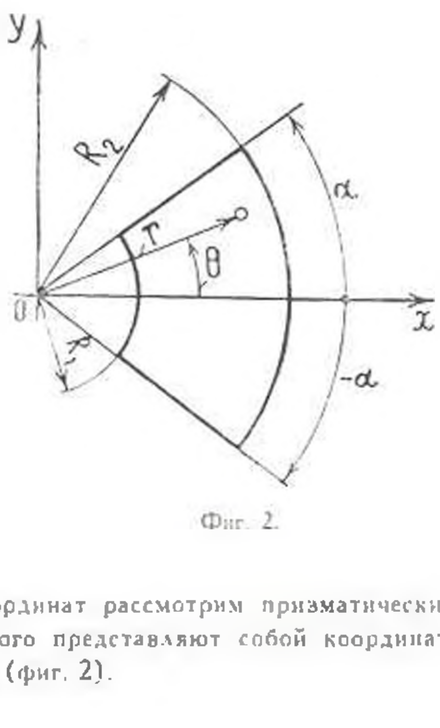
Մեխանիկա XXIX, № 3, 1976 Механика

П. В. ГАЛПЧЯН

ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ В ВИДЕ КРУГОВЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРОВ ПРИ СОВМЕСТНОМ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ

Задача пластического состояния призматического стержня при совместном изгибе и кручении впервые рассматривалась в работах Гандельмана [1] и Хилла [2], в которых получено уравнение задачи для идеально жестко-пластического стержня. Позднее Пехник и Жичковский [3, 4] рассмотрели решение задач для прямоугольных и круговых сечений. При помощи некоторого полуобратного метода в работах [5, 6] получены уравнения, определяющие напряженное состояние упрочняющихся призматических стержней при совместном воздействии крутящих и изгибающих моментов и получено решение для кругового кольцевого сечения. В настоящей работе рассматривается напряженно-деформированное состояние призматических стержней с поперечными сечениями в виде круговых и кольцевых секторов при совместном воздействии крутящего и изгибающего моментов, приложенных на концевых сечениях (фиг. 1). Материал стержня подчиняется условию изотропного упрочнения.

Фиг. 1.



Фиг. 2.

1. В системе цилиндрических координат рассмотрим призматический стержень, боковые поверхности которого представляют собой координатные поверхности $r=R_1$, $r=R_2$ и $\theta=\pm\alpha$ (фиг. 2).

Имеем [6] компоненты тензора деформации

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2}\varepsilon_z, \qquad \varepsilon_z = Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C$$

$$\gamma_{r\theta} = 0, \qquad \gamma_{rz} = E\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \gamma_{\theta z} = E\left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

компоненты тензора напряжения

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \qquad \sigma_z = \frac{3}{2}f(\varepsilon, \lambda)(Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C)$$

$$\tau_{rz} = Ef(\varepsilon, \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \tau_{\theta z} = Ef(\varepsilon, \lambda)\left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \tag{1.1}$$

Здесь σ_z, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ представляют отношения компонентов напряжения к $2G$ (G — модуль сдвига), f — заданная функция, характеризующая закон упрочнения материала стержня с некоторым физическим параметром $\lambda \left(0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Для линейно-упругого случая $f(\varepsilon, 0) = 1$. A, B, C, E — постоянные, определяемые из статических условий, ψ — искомая функция r и θ,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{4}(Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C)^2 + E^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\right]} \tag{1.2}$$

интенсивность деформации сдвигов.

Перемещения имеют вид

$$u = -\frac{1}{4}(A\sin\theta + B\cos\theta)(r^2 + 2z^2) - \frac{1}{2}Cr$$

$$v = \frac{1}{4}(A\cos\theta - B\sin\theta)(r^2 - 2z^2) + 2Erz$$

$$w = 2E\psi(r, \theta) + Arz\sin\theta + Brz\cos\theta + Cz$$

Задача сводится к внутренней задаче Неймана относительно функции перемещения ψ [6]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[rf(\varepsilon, \lambda)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[f(\varepsilon, \lambda)\left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right] = 0$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_\Gamma = \frac{d}{ds}\left(\frac{r_0^2}{2}\right) \tag{1.3}$$

где r_0 — расстояние точки контура Γ области Ω поперечного сечения стержня от начала координат, s — дуга контура, а ν — направление внешней нормали контура.

Решение (1.3) ищем в виде ряда

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \psi_k \tag{1.4}$$

Тогда (1.3) сводится к граничной задаче

$$\begin{aligned} &\Delta \psi_0 = 0, \quad \text{когда} \quad (r,\ \theta) \in \Omega - \Gamma\Omega \\ &\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} = \frac{d}{ds}\left(\frac{r^2}{2}\right), \quad \text{когда} \quad (r,\ \theta) \in \Gamma\Omega \end{aligned} \tag{1.5}$$

и системе рекуррентных граничных задач

$$\begin{aligned} &\Delta \psi_{n+1} = Q_n, \quad \text{когда} \quad (r,\ \theta) \in \Omega - \Gamma\Omega \\ &\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial \nu} = 0, \quad \text{когда} \quad (r,\ \theta) \in \Gamma\Omega \\ &\qquad\qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \end{aligned} \tag{1.6}$$

где (1.5) определяет линейно-упругое напряженное состояние стержня [9, 10]. В (1.6)

$$Q_n = \frac{\partial F_n}{\partial \theta} - \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} \psi_k \operatorname{grad} F_{n-k} \tag{1.7}$$

где

$$F_n(r,\ \theta) = -\frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} \ln f_*}{d\lambda^{n+1}}\bigg|_{\lambda=0}, \quad f_*(\omega,\ \lambda) = f(\tau,\ \lambda), \quad \tau = E\sqrt{\omega}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2E}(Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \left(r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \omega_k$$

$$\omega_0 = \frac{3}{4E^2}(Ar\sin\theta + Br\cos\theta + C)^2 + r^2 + 2\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + \operatorname{grad}^2 \psi_0 \tag{1.8}$$

$$\omega_n = 2\frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{grad} \psi_k \operatorname{grad} \psi_{n-k}$$

Известно [9, 10], что

$$\psi_0(r,\ \theta) = -\frac{4R_2^2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z\theta}{z(z^2+4)\operatorname{ch} z\alpha} \cos\left(z \ln \frac{r}{R_2}\right) dz \tag{1.9}$$

2. Рассмотрим вопрос об условиях существования решения задачи (1.6). Для этого необходимо и достаточно выполнение условия

$$\iint Q_n d\Omega = 0$$

Из (1.7) и (1.9) заключаем, что это условие выполняется, если Q_n — нечетная функция по θ, а последнее имеет место, если ψ_n нечетная по θ, а F_1 — четная по θ. Но F_n будет четной функцией, если в выражении (1.2)

$$1)\ A = 0,\quad B \neq 0,\quad C \neq 0$$

или

$$2)\ A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0 \tag{2.1}$$

3. Решение задачи (1.6) ищем в виде ряда

$$\psi_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n+1}(r) \sin \lambda_k \theta \tag{3.1}$$

Разложим в ряд Фурье функцию $Q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,n}(r) \sin \lambda_k \theta$. Подставив разложения ψ_{n+1} и Q_n в первое уравнение (1.6) и сравнивая коэффициенты рядов левой и правой частей для одной и той же функции, получим

$$a''_{k,n+1}(r) + \frac{1}{r} a'_{k,n+1}(r) - \frac{\lambda_k^2}{r^2} a_{k,n+1}(r) = \alpha_{k,n}(r), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.2}$$

Собственные числа $\lambda_k = \frac{\pi}{2\gamma}(2k-1)$ определим из граничного условия (1.6).

Общее решение уравнения (3.2) будет

$$a_{k,n+1}(r) = C_1 r^{\lambda_k} + C_2 r^{-\lambda_k} + \frac{r^{\lambda_k}}{2\lambda_k}\int_{R_1}^{r} \alpha_k(\xi)\, \xi^{-\lambda_k+1}\, d\xi - \frac{r^{-\lambda_k}}{2\lambda_k}\int_{R_1}^{r} \alpha_k(\xi)\, \xi^{\lambda_k+1}\, d\xi \tag{3.3}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничного условия (1.6), которому удовлетворим, принимая $a'_{k,n+1}(R_1) = 0$, $a'_{k,n+1}(R_2) = 0$.

Для коэффициентов $\alpha_{k,n}(\xi)$ имеем

$$\alpha_{k,n}(\xi) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} Q_n(\xi, \varphi) \sin \lambda_k \varphi\, d\varphi$$

Подставив значения $a_{k,n+1}$ из (3.3) в (3.1) после некоторых преобразований, вводя при этом безразмерные координаты $\rho = r/R_2$, $\zeta = \xi/R_2$, приводим его к виду

$$\psi_{n+1}(R_2\rho, \theta) = \iint_{\Omega} Q_n(R_2\zeta, \varphi)\, L(\zeta, \varphi; \rho, \theta)\, d\Omega$$

где $L(\zeta, \varphi; \rho, \theta)$ — функция Грина для рассматриваемой области в виде кольцевого сектора, $L = L_0(\zeta, \varphi; \rho, \theta)$ при $\zeta \leqslant \rho$, $L = L_0(\rho, \theta; \zeta, \varphi)$ при $\zeta \geqslant \rho$.

$$L_0(\zeta,\ \varphi;\ \eta,\ \theta)=\frac{1}{2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[\zeta^{\lambda_k}+\zeta^{-\lambda_k}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3\lambda_k}\right](\eta^{\lambda_k}+\eta^{-\lambda_k})}{\lambda_k\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\lambda_k}-1\right]}\sin\lambda_k\varphi\sin\lambda_k\theta$$

При $R_1\to 0$ отсюда получим функцию Грина $G(\zeta,\ \varphi;\ \eta,\ \theta)$ для области в виде кругового сектора. $G=G_0(\zeta,\ \varphi;\ \eta,\ \theta)$ при $\zeta\leqslant\eta$, $G=G_0(\eta,\ \theta;\ \zeta,\ \varphi)$ при $\zeta\geqslant\eta$,

$$G_0(\zeta,\ \varphi;\ \eta,\ \theta)=\frac{1}{2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta^{\lambda_k}(\eta^{\lambda_k}-\eta^{-\lambda_k})\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k\varphi\sin\lambda_k\theta$$

Просуммировав последнее соотношение, получим

$$G(\zeta,\ \varphi;\ \eta,\ \theta)=\frac{1}{8\pi}\left[\ln\frac{1+2(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi-\theta)+(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1-2(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi-\theta)+(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{\alpha}}}+\right.$$

$$+\ln\frac{1-2\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi-\theta)+\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{1-2\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi-\theta)+\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}-$$

$$-\ln\frac{1+2(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi+\theta)+(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1-2(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi+\theta)+(\zeta\eta)^{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$\left.-\ln\frac{1+2\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi+\theta)+\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}{1-2\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varphi+\theta)+\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right]$$

В случае степенного упрочнения имеем $f_*=(E\omega)^{-1}$. При этом из (1.7), (1.8) получим

$$Q_0=\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial\omega_0}{\partial\theta}+\frac{1}{\omega_0}\operatorname{grad}\psi_0\operatorname{grad}\omega_0$$

$$Q_n=\frac{1}{\omega_0}\frac{\partial\omega_n}{\partial\theta}+\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{grad}\psi_k\operatorname{grad}\omega_{n-k}-\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=1}^{n}\omega_kQ_{n-k}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)\tag{3.4}$$

где принимаем одно из условий (2.1).

4. Рассмотрим вопрос сходимости ряда (1.4) в случае степенного закона упрочнения. Так как

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\varepsilon_1}^{1} \zeta d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(\zeta, \varphi) L(\zeta, \varphi; \eta, \theta) d\varphi =$$

$$= \int_{\varepsilon_1}^{1} \zeta d\zeta \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(\zeta, \varphi) G(\zeta, \varphi; \eta, \theta) d\varphi, \quad \varepsilon_1 > 0$$

то достаточно рассмотреть сходимость в случае $\varepsilon_1 \leqslant \zeta, \eta \leqslant 1$. Заметим при этом, что первое уравнение (1.6) удовлетворяет условиям, при которых справедливы априорные оценки Шаудера [7]. Так как ψ_0 принадлежит к классу $C_{2+\alpha_1}$ $(0 < \alpha_1 < 1)$, то из (3.4) следует, что Q_0 принадлежит C_{α_1}. Следовательно, ψ_1 принадлежит $C_{2+\alpha_1}$ и согласно (3.4) Q_n принадлежит C_{α_1}, а $\psi_n - C_{2+\alpha_1}$.

Введем норму в $C_{2+\alpha_1}$

$$\| X \| = \max_{M \in \Omega} | X(M) | + \max_{M, N \in \Omega} \frac{| X(M) - X(N) |}{\overline{MN}^{\alpha_1}}$$

Так как $\| \psi_{k+1} \| < \| \psi_{k+1} \| < c_1 \| Q_k \|$, $c_1 = \frac{m(\Omega)}{\pi} \| L \| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{MN}^{\alpha_1}} \right)$, где $\overline{MN}^{\alpha_1}$ определяется из условия

$$\max_{M, N \in \Omega} \frac{\left| \iint [L(\zeta, \varphi; M) - L(\zeta, \varphi; N)] d\Omega \right|}{\overline{MN}^{\alpha_1}}$$

то для сходимости ряда (1.4) достаточно показать сходимость ряда $\sum_{k=m}^{\infty} \lambda^k \| Q_k \|$. Из (3.4) будем иметь $\| Q_n \| < \left\| \frac{1}{\omega_0} \right\| \| V_n \|$,

$$\| V_n \| \leqslant \left\| \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \right\| + \sum_{k=1}^{n} \| \omega_k \| \| Q_{n-k} \| + \sum_{k=0}^{n} \left(\left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \right\| \left\| \frac{\partial \omega_{n-k}}{\partial r} \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{1}{r^2} \right\| \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta} \right\| \left\| \frac{\partial \omega_{n-k}}{\partial \theta} \right\| \right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.1}$$

Можно получить оценку

$$\| D\psi_{n+1} \| < c_2 \| Q_n \| \tag{4.2}$$

где

$c_2 = \max \left| \frac{m(\Omega)}{\pi} \| D_{\eta\theta} L \| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{MN}^{\alpha_1}} \right) \right|$, а $\overline{MN}^{\alpha_1}$ определяется из условия

$$\max_{M,N\in\Omega}\frac{\left|\iint D_{x}|L(\xi,\eta;M)-L(\xi,\eta;N)|\,d\Omega\right|}{MN^{\lambda}}$$

Далее, используя эту оценку и априорные оценки Шаудера

$$|D^2\varphi_{n+1}| < c_3|Q_n| \tag{4.3}$$

где c_3 — определенная постоянная, зависящая от геометрии области [7, 8], получим

$$|\varphi_n|,\ |D\varphi_n| < c_4 q_n$$

где $q_n = |Q_{n-1}| + \sum_{k=1}^{n-1}|Q_{k-1}||Q_{n-k-1}|$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, а c_4 — определенная постоянная, зависящая от c_2 и c_3. Используя эту оценку, из (4.1) получим

$$|Q_n| < c_5\left(q_n + |Q_{n-1}| + \sum_{k=1}^{n-1}|Q_{k-1}|q_{n-k} + \sum_{k=1}^{n}|Q_{n-k}|q_k\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.4}$$

где c_5 — определенная постоянная, зависящая от c_4 и c_3.

Предположим, что до n-ого члена имеет место неравенство $|Q_n| \leqslant Kn^{-\rho}R^{-n}$, где K, ρ и R — некоторые положительные параметры, причем $\rho > 1$. Выясним условия, при которых оно имеет место и при $n+1$. Используя неравенство

$$\sum_{k=1}^{N-1} k^{-\rho}(N-k)^{-\rho} < \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1}N^{-\rho}$$

из (4.4) получим

$$|Q_{n+1}| < K(n+1)^{-\rho}R^{-(n+1)}(a_2R^3 + a_1R^2 + a_0R) \quad (n = 5, 6, 7, \ldots)$$

откуда следует, что R определяется из уравнения $a_2R^3 + a_1R^2 + a_0R = 1$, где

$$a_2 = \left(2^{2\rho}|Q_0|\gamma + \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1}K\gamma + 2^{\rho}q_2\right)c_5$$

$$a_1 = \left(2^{2\rho}\gamma + 2^{2\rho}|Q_0| + \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1}K + 2^{2\rho+1}q_2 + 2^{3\rho}|Q_0|\gamma + \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1}K\gamma\right)c_5$$

$$a_0 = \left(2^{\rho+1} + 2^{\rho}q_1 + 2^{2\rho}|Q_0| + \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1}K\right)c_5, \quad \gamma = 2|Q_0| + \frac{2^{\rho+1}}{\rho-1}K$$

$$K = \max|Q_k| \quad (k = 1, 2, \ldots, 5)$$

Таким образом, имеем $r^n|Q_n| < K\left(\frac{r}{R}\right)^n n^{-\rho}$ $(n = 6, 7, 8, \ldots)$, откуда заключаем, что ряд (1.4) сходится абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $r = R$. Из (4.2), (4.3) и из последнего неравенства следует, что ряды, составленные из производных $\sum_{k=0}^{\infty} r^k D\varphi_k$,

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k D^2\psi_k$, также сходится абсолютно и равномерно с радиусом сходимости $\lambda = R$. Следовательно, допустимо дважды почленное дифференцирование ряда (1.4).

5. Рассмотрим случай полукругового сечения ($\alpha = \pi/2$) при совместном воздействии крутящего и изгибающего моментов, принимая второе условие из (2.1).

Разложим в ряд по λ функцию $f_*(\omega, \lambda) = (E^2\omega)^{-\lambda}$

$$f(\omega, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} \ln^k (E^2\omega) = 1 - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k F_k +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} \ln^k (E^2\omega) \tag{5.1}$$

Согласно (1.4), в первом приближении $\psi = \psi_0 + \lambda\psi_1$. Подставляя последнее выражение и (5.1) в (1.1), имея в виду, что $\left.\frac{\partial f_*}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\ln (E^2\omega_0)$, получим

$$\tau_z = \frac{3}{2} AR_2\gamma \sin\vartheta [1 - \lambda \ln (E^2\omega_0)]$$

$$\tau_{z\gamma} = \frac{E}{R_2} \frac{\partial\psi_0(R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\gamma} + \lambda \frac{E}{R_2} \left[\frac{\partial\psi_1 (R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\gamma} - \frac{\partial\psi_0 (R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\gamma} \ln (E^2\omega_0^*) \right]$$

$$\tau_{z\vartheta} = E \left[R_2\gamma + \frac{1}{R_2\gamma} \frac{\partial\psi_0 (R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\vartheta} \right] + \lambda E \left[\frac{1}{R_2^2\gamma} \frac{\partial\psi_1 (R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\vartheta} - R_2\gamma \ln (E^2\omega_0^*) - \frac{1}{R_2\gamma} \frac{\partial\psi_0(R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\vartheta} \ln (E^2\omega_0^*) \right] \tag{5.2}$$

где $\omega_0^*(\gamma, \vartheta) = \omega_0 (R_2\gamma, \vartheta)$. При $\lambda = 0$ получается упругие решения.

Из (1.9) имеем

$$\frac{\partial\psi_1 (R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\gamma} = \frac{4R_2^2}{\pi\gamma} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z\vartheta}{(z^2 + 4) \operatorname{ch}\frac{\pi}{2} z} \sin (z \ln \gamma) \, dz$$

$$\frac{\partial\psi_0(R_2\gamma, \vartheta)}{\partial\vartheta} = -\frac{4R_2^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z\vartheta}{(z^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} z} \cos (z \ln \gamma) \, dz$$

Для производных ψ_1 будем иметь

$$\frac{\partial\psi_1(R_2\eta,\theta)}{\partial\eta}=R_2^2\int_0^1\zeta d\zeta\int_0^{2\pi}Q_0(R_2\zeta,\varphi)\frac{\partial G}{\partial\eta}d\varphi$$

$$\frac{\partial\psi_1(R_2\eta,\theta)}{\partial\theta}=R_2^2\int_0^1\zeta d\zeta\int_0^{2\pi}Q_0(R_2\zeta,\varphi)\frac{\partial G}{\partial\theta}d\varphi$$

где

$$Q_0(R_2\zeta,\varphi)=\frac{\partial F_1(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta}\frac{\partial F_2(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta}+$$

$$+\frac{1}{R_2^2\zeta^2}\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial F_2(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial F_1(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{1}{\omega_0(\zeta,\varphi)}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{A}{E}\right)^2R_2^2\zeta^2\sin\varphi\cos\varphi+2\frac{\partial^2\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{R_2}\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta}\frac{\partial^2\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta\partial\varphi}+\frac{2}{R_2^2\zeta^2}\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\frac{\partial F_2(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta}=\frac{R_2}{\omega_0(\zeta,\varphi)}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{A}{E}\right)^2R_2\zeta\sin^2\varphi+2R_2\zeta+\frac{2}{R_2}\frac{\partial^2\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi\partial\zeta}+\right.$$

$$+\frac{2}{R_2^2}\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta}\frac{\partial^2\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\zeta^2}-\frac{2}{R_2^3\zeta^3}\left[\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}\right]^2+$$

$$\left.+\frac{2}{R_2^2\zeta^2}\frac{\partial\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\psi_0(R_2\zeta,\varphi)}{\partial\varphi\partial\zeta}\right]$$

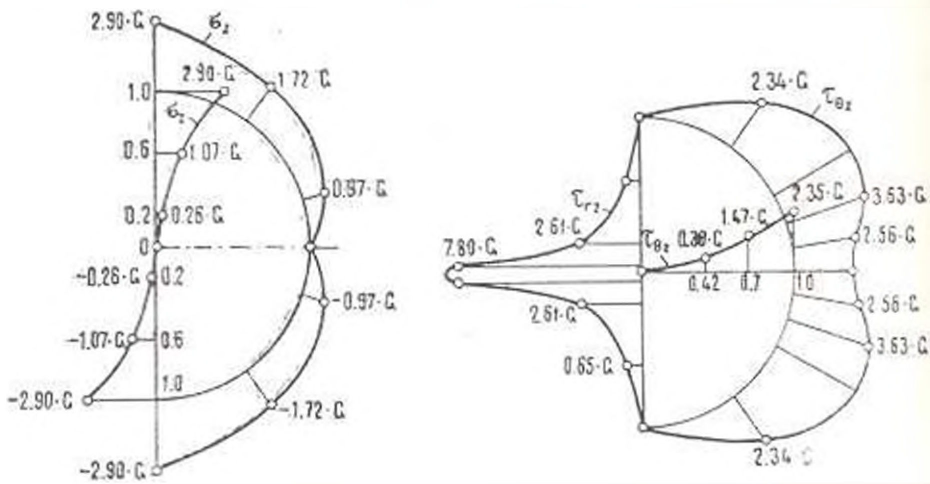
Постоянные A и E в (5.2) определяются из статических условий на торцах

$$M_x=\frac{3}{2}AR_2^4\iint_{\Omega}\eta^3\sin^2\theta\left\{1-\ln\left[E^2\omega_0^2(\eta,\theta)\right]\right\}d\Omega$$

$$M_k=ER_2\iint_{\Omega}\left\{R_2^2\eta^2+\frac{\partial\psi_0(R_2\eta,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_1(R_2\eta,\theta)}{\partial\theta}-R_2^2\eta^2\ln\left[E^2\omega_0^2(\eta,\theta)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\psi_0(R_2\eta,\theta)}{\partial\theta}\ln\left[E^2\omega_0^2(\eta,\theta)\right]\right\}d\Omega$$

где M_x — изгибающий момент относительно оси x (фиг. 1), M_k — крутящий момент. Отметим, что если примем первое условие (2.1) при $C=0$, то получим изгибающий момент относительно оси y. Случай $B=0$, $C\neq0$ и $E\neq0$ будет соответствовать совместному кручению и растяжению стержния. Как частные случаи отсюда получаются решения пластического кручения или изгиба.



Фиг. 3.

Эпюры распределения напряжений в сечении при $\lambda = 1/4$, $R_1 = 1$ см, $A = 1$, $E = 2$ приведены на фиг. 3. Этим значениям A и E соответствуют $M_z \approx 1.1\,G$, $M_k \approx 0.8\,G$.

Автор выражает благодарность проф. М. А. Задояну за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 19 XII 1975

Պ. Վ. ԳԱԼՖԱՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՁԵՎ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ՊՐԻԶՄԱՅԻՆ ՁՈՂԵՐԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԸ ՀԱՄԱՏԵՂ ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՈԼՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է օղակային և շրջանային սեկտորի ձև ունեցող կտրվածքներով պրիզմատիկ ձողերի պլաստիկական վիճակը, երբ ձողի ծայրային կտրվածքների վրա կիրառվել են ձգող և ոլորող մոմենտներ: Ձողի նյութը ենթարկվում է իզոտրոպ ամրապնդման:

Խնդիրը բերվում է տեղափոխությունների ֆունկցիայի նկատմամբ երկրորդ եզրային խնդրին: Այդ խնդրի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի տեսքով, ըստ որոշ ֆիզիկական պարամետրի և հանգեցվում ռեկուրրենտ երկրորդ եզրային խնդիրների անվերջ համակարգի: Կառուցվում են այդ խնդիրների լուծումները և ցույց է տրվում շարքի զուգամիտությունը:

Կիսաշրջանի կտրվածքով ձողի համար կատարված է թվային հաշվարկ և բերված են լարումների էպյուրները։

THE PLASTIC STATE OF PRISMATIC BARS WITH CROSS-SECTIONS IN THE FORM OF CIRCULAR AND RING SECTORS UNDER JOINT TORSION AND BENDING

P. V. GALPCHIAN

S u m m a r y

The plastic state of prismatic bars with cross-sections in the form of circular and ring sectors under the joint effect of torsional and bending moments applied to the end sections is considered. The material of the bars obeys the condition of isotropic strengthening.

The problem is reduced to a second boundary one with respect to the function of displacement. The solution of the latter is sought for in the form of a power series by some physical parameter and is reduced to an infinite system of recurrent second boundary problems. The solutions of these problems are presented along with the series convergence.

For a bar of semi-circular cross-section a numerical calculation is made and stress diagrams are drawn.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Handelman G. H.* A variational principle for a state of combined plastic stress. Quart. J. Appl. Math., 1944, 1.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., ИЛ, 1956.
3. *Ptechnik S.* The influence of bending on the limit state of a circular bar subjected to torsion. Arch. Mech. stos., 1961, vol. 13, No. 1.
4. *Ptechnik S., Zyczkowski M.* On the plastic interaction-curve for bending and torsion of a circular bar. Arch. Mech. stos., 1961, vol. 13, No. 5.
5. *Задоян М. А.* Задача установившейся ползучести призматического стержня при совместном растяжении, изгибе и кручении. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. 21, 3.
6. *Задоян М. А.* Пластическое состояние толстостенной цилиндрической трубы при совместном кручении и изгибе. Докл. АН АрмССР, 1973, т. LVI, № 4.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Изд. «Наука», 1964.
9. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
10. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1970.