ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 3, 1976 Механика

А. А. АБГАРЯН, М. И. КИСЕЛЕВ

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Искусственные спутники Земли (ИСЗ) все шире используются для обеспечения передачи информации. Приближается время, когда «спутники связи» станут основой Всемирной системы связи [1]. Поэтому возрастают требования к поддержанию синхронизма обращения группы ИСЗ и их регулярного расположения друг относительно друга в пределах группы, например, в вершинах правильного многоугольника [2]. Вместе с тем, известно, что, как и всякое небесное тело, ИСЗ претерпевает возмущающие его движения воздействия, среди которых можно указать: аэродинамические возмущения, возмущения, вызываемые притяжением Луны и планет, аномалиями гравитационного поля Земли [3], а также давлением солнечного света [4] и корпускул солнечного ветра, взаимодействием поверхностного электрического заряда ИСЗ и его проводящих и магнитомягких конструкционных материалов с геомагнитным полем [5], [6] и ударами микрометеоритов.

Следует отметить, что техника измерений орбитальных параметров ИСЗ непрерывно прогрессирует: в настоящее время точность определения положения центра масс ИСЗ достигает 1 м [7] и в перспективе, как следует из опубликованной программы экспериментов с ИСЗ «Геос-С», с помощью лазерной локации можно ожидать 1 см [8] и менее.

При этом возможны два подхода к теоретическому описанию движения ИСЗ и интерпретации измерения его орбит.

С одной стороны, можно продолжать наращивание количества возмущающих членов в уравнениях небесной механики и обрабатывать получающиеся громоздкие дифференциальные уравнения с помощью ЭВМ.

С другой стороны, кроме указанного детерминированного, возможен и статистический подход. Так, например, А. А. Красовским [9] отмечено, что движение спутника всякой реальной планеты должно описываться стохастическими уравнениями, поскольку кроме «правильной» составляющей гравитационного поля, соответствующей «правильной» фигуре однородной планеты, имеют место гравитационные аномалии различных пространственных масштабов (материковые, региональные и т. п.), связанные с нерегулярностью фигуры и распределения масс планеты. Поэтому входящие в уравнения движения производные гравитационного потенциала вдоль траектории ИСЗ содержат случайные функции времени, возникающие благодаря наличию указанных гравитационных аномалий. С развитием лазерной техники траекторных измерений, открывающей возможности определения все более тонкой структуры и траекторных возмущений, сформулированная в

[9] задача статистического описания поведения ИСЗ на орбите с помощью аппарата уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка — Колмогорова (ЭФПК) будет становиться все более актуальной. При этом представляет интерес распространить статистический подход и на описание влияния других возмущающих факторов, упомянутых в начале этой заметки.

В плане обоснования возможности такого подхода приведем следующие соображения качественного характера. Возмущения за счет гравитационных аномалий, притяжения Луны и ближайших планет, аэродинамического сопротивления, солнечного светового давления и т. п. действуют на ИСЗ независимо друг от друга, некоторые из них известны до сих пор лишь по порядку величины. Результирующая возмущающих воздействий содержит высокочастотную компоненту, создаваемую мелкомасштабными пространственными неоднородностями и кратковременными возмущениями. Эта высокочастотная компонента при наличии эффективного демпфирования возмущений, стабилизирующего параметры орбиты, так что последействие каждого отдельного возмущения подавляется, может быть представлена на некотором конечном интервале времени как стационарный случайный процесс $\xi(t)$. При этом можно надеяться на достаточно компактное решение проблемы, поскольку результирующая случайная функция будет соответствовать марковскому процессу и удовлетворять требованиям, оправдывающим применение аппарата уравнений ЭФПК. Низкочастотная компонента возмущений, если она не подавляется в результате демпфирования и не приводит к движению с перемешиванием в фазовом пространстве за счет конечного времени — релаксации [10], может быть учтена детерминированно.

Запишем уравнения небесной механики для плоского движения [11], вводя в их первые части компоненты случайных ускорений $a_r = \xi_1(t)$ и $a_\varphi = \xi_2(t)$.

$$\begin{aligned} \dot V_r - \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{\mu}{r^2} + \xi_1 \\ \dot V_\varphi + \frac{V_r V_\varphi}{r} &= \xi_2 + a_{h_0}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что интеграл второго уравнения системы (1) можно представить в виде

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h_0(t)\,[1 + \eta_2(t)] \tag{2}$$

Это означает, что закон площадей соблюдается квазистационарно, в пренебрежении изменением радиуса орбиты за один оборот, и что случайные тангенциальные ускорения создают случайную составляющую орбитального момента количества движения ИСЗ, пропорциональную некоторой случайной функции $\eta_2(t)$. Квазистационарное монотонное изменение параметра $h_0(t)$ возможно при тонкой коррекции орбит с помощью корректирующей двигательной установки, создающей малое тангенциальное ускорение $a_{h_0}(t)$.

Таким образом, представляется возможным описать эволюцию положения на орбите, близкой к круговой, правильной синхронной группы ИСЗ, создаваемую их бортовыми корректирующими установками, с учетом случайных возмущений.

Поясним более детально используемое нами квазистационарное приближение. Представим радиус орбиты и угловую скорость обращения в виде

$$\rho = \rho_0(t) + \rho_1(t)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_1 \qquad (3)$$

где

$$\rho_1(t) \ll \rho_0(t), \quad \dot\rho_1(t) \gg \dot\rho_0(t) \sim 0, \quad \ddot\rho_1(t) \gg \ddot\rho_0(t) \sim 0 \qquad (4)$$

Это означает, что регулярная невозмущаемая случайными силами составляющая радиуса орбиты зависит от времени как от параметра и в соответствии с принятым квазистационарным приближением ее производными по времени можно пренебречь.

Используя первое уравнение системы (1) и (2) с учетом (3) и (4), имеем, удерживая линейные члены по η_0 и кубические по $x = \rho_1/\rho_0$

$$\ddot x + \Omega_0^2(t)[1 - 6\eta_0]x - 3\Omega_0^2(t)[1 - 4\eta_0]x^2 + 6\Omega_0^2(t)\left[1 + \frac{10}{3}\eta_0\right]x^3 =$$
$$= -2\alpha(1 + \gamma x^2)\dot x + 2\Omega_0^2(t)\eta_0 - \ddot\eta_0 \qquad (5)$$

где $\Omega_0(t) = (d\theta/dt)_0 = \sqrt{\mu/\rho_0^3}$ — мгновенное значение возмущенной угловой частоты обращения, $\eta_0 = \xi_1/\rho_0(t)$, в уравнение введен член $-2\alpha(1+\gamma x^2)\dot x$, характеризующий нелинейное демпфирование колебаний, создаваемое бортовым корректирующим устройством и гарантирующий, как будет показано ниже, устойчивость ИСЗ на орбите при γ, принимающих целочисленные значения, большие единицы. Дальнейшие расчеты будут проведены при $\gamma = 3$.

Полученное уравнение для малых относительных возмущений радиуса орбиты ИСЗ эквивалентно уравнению одноконтурного генератора, режим работы которого претерпевает некоторое систематическое изменение и случайные возмущения, в том числе и параметрические. Интересно отметить, что первоначально методы описания систем с параметрическими возмущениями, получившие широкое применение и развитие в радиофизике, были поставлены Л. И. Мандельштамом в связи с проблемами небесной механики [12]. Дифференциальное уравнение (5) содержит случайные коэффициенты и поэтому в процессе его решения должна быть найдена функция плотности распределения, характеризующая поведение системы, описываемой этим уравнением.

Воспользуемся известным методом Крылова—Боголюбова [13] и, введя замену переменных

$$x = \frac{a(t)}{\sqrt{\Omega}}\cos\psi, \qquad \dot{x} = -a(t)\sqrt{\Omega}\sin\psi, \qquad \psi = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau + \theta(t) \tag{6}$$

построим эквивалентную уравнению (5) систему дифференциальных уравнений для определения амплитудного фактора a и фазы φ, которая после операции усреднения имеет вид

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon a - \frac{3\varepsilon\gamma a^3}{32\Omega} + \frac{3a\Omega_0^2}{\Omega}\overline{\eta_2\sin 2\psi} - \frac{12\Omega_0^2 a^2}{\Omega^{3/2}}\overline{\eta_2\cos^2\psi\sin\psi} +$$

$$+ \frac{20a^3\Omega_0^2}{\Omega^2}\overline{\eta_2\cos^3\psi\sin\psi} - \frac{2\Omega_0^2}{\Omega^{1/2}}\overline{\eta_2\sin\psi} - \frac{1}{\Omega^{1/2}}\overline{\eta_1\sin\psi} \tag{7}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\Omega_0^2-\Omega^2}{2\Omega} + \frac{9a^2\Omega_0^2}{4\Omega^2} + \frac{6\Omega_0^2}{\Omega}\overline{\eta_2\cos^2\psi} - \frac{12\Omega_0^2 a}{\Omega^{3/2}}\overline{\eta_2\cos^3\psi} +$$

$$+ \frac{20a^2\Omega_0^2}{\Omega^2}\overline{\eta_2\cos^4\psi} - \frac{2\Omega_0^2}{a\sqrt{\Omega}}\overline{\eta_2\cos\psi} - \frac{1}{a\sqrt{\Omega}}\overline{\eta_1\cos\psi} \tag{8}$$

где черта над слагаемыми означает усреднение по времени.

Применяя к случайным членам последних уравнений процедуру усреднения по Стратоновичу [14], имеем

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\varepsilon a - \frac{3\varepsilon\gamma a^3}{32\Omega} + m_1 + \zeta_1(t) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\Omega_0^2-\Omega^2}{2\Omega} + \frac{9a^2\Omega_0^2}{4\Omega^2} + m_2 + \zeta_2(t) \end{aligned} \tag{9}$$

где введены следующие обозначения:

$$\zeta_1(t) = \left[\frac{3a\Omega_0^2}{\Omega}\sin 2\psi - \frac{3a^2\Omega_0^2}{\Omega^{3/2}}(\sin\psi + \sin 3\psi) + \frac{5a^3\Omega_0^2}{2\Omega^2}(2\sin 2\psi + \sin 4\psi) -\right.$$

$$\left. - \frac{2\Omega_0^2}{\sqrt{\Omega}}\sin\psi\right]\eta_2 - \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\eta_1\sin\psi \tag{10}$$

$$\zeta_2(t) = \left(\frac{6\Omega_0^2}{\Omega}\cos^2\psi - \frac{12\Omega_0^2 a}{\Omega^{3/2}}\cos^3\psi + \frac{20a^2\Omega_0^2}{\Omega^2}\cos^4\psi -\right.$$

$$\left. - \frac{2\Omega_0^2}{a\sqrt{\Omega}}\cos\psi\right)\eta_2 - \frac{1}{a\sqrt{\Omega}}\eta_1\cos\psi \tag{11}$$

Полученной системе дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами (9) соответствуют следующие уравнения ЭФПК для плотности распределения фактора a и фазы φ:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[m_1 - \varepsilon a - \frac{3\sigma_1^2 a^3}{32\Omega}\right] P\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\sigma_1^2 P\right] \qquad (12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\left[m_2 + \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} + \frac{9a^2\Omega_0^2}{4\Omega^2}\right] W\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left[\sigma_2^2 W\right] \qquad (13)$$

где

$$m_1 = \overline{\xi_1(t)}, \quad m_2 = \overline{\xi_2(t)}, \quad \sigma_1^2 = \overline{\xi_1 \xi_{1\tau}}, \quad \sigma_2^2 = \overline{\xi_2 \xi_{2\tau}}$$

Принимая, что время корреляции $\tau_{кор}$ удовлетворяет условию: $\tau_{кор} \ll \Delta$, где Δ — такой сдвиг по времени, что $|a - a_{-\Delta}| \ll a_0$, $|\varphi - \varphi_{-\Delta}| \ll 1$, получаем

$$m_1 = Aa + Ba^{-1} + Ca^3 + Da^5, \quad m_2 = \overline{\xi_2(t)} = 0 \qquad (14)$$

где

$$A = \frac{6\Omega_0^4 \varkappa(\Omega)}{\Omega^2} + \frac{3\Omega_0^2 S_0}{\Omega^2} + \frac{9\Omega_0^4 \varkappa(2\Omega)}{2\Omega^2}$$

$$B = \frac{2\Omega_0^2 S_0}{\Omega} + \frac{S}{\Omega} + \frac{\Omega_0^4 \varkappa(\Omega)}{\Omega}$$

$$C = \frac{27\Omega_0^4 \varkappa(\Omega)}{4\Omega^3} + \frac{45\Omega_0^4 \varkappa(2\Omega)}{2\Omega^3} + \frac{27\Omega_0^4 \varkappa(3\Omega)}{4\Omega^3}$$

$$D = \frac{25\Omega_0^4 \varkappa(2\Omega)}{\Omega^4} + \frac{25\Omega_0^4 \varkappa(4\Omega)}{4\Omega^4}$$

Для σ_1^2 имеем

$$\sigma_1^2 = A' + B'a^2 + C'a^4 + D'a^6 \qquad (15)$$

где

$$A' = \frac{2\Omega_0^4 \varkappa(\Omega)}{\Omega} + \frac{S}{\Omega} + \frac{2\Omega_0^2}{\Omega}$$

$$B' = \frac{6\Omega_0^4 \varkappa(\Omega)}{\Omega^2} - \frac{9\Omega_0^4 \varkappa(2\Omega)}{\Omega^2} + \frac{3\Omega_0^2 S_0}{\Omega^2}$$

$$C' = \frac{9\Omega_0^4 \varkappa(\Omega)}{\Omega^3} + \frac{15\Omega_0^4 \varkappa(2\Omega)}{\Omega^3} + \frac{9\Omega_0^4 \varkappa(3\Omega)}{2\Omega^3}$$

$$D' = \frac{25\Omega_0^4 \varkappa(2\Omega)}{2\Omega^4} + \frac{25\Omega_0^4 \varkappa(4\Omega)}{2\Omega^4}$$

$\varkappa(\Omega)$, $\varkappa(2\Omega)$, $\varkappa(3\Omega)$, $\varkappa(4\Omega)$ — спектральные плотности случайного процесса на соответствующих частотах

$$S_0 = \int\limits_{-\infty}^{0} \overline{\eta_0(t)\,\eta_1(t+\tau)\sin\Omega t\sin(\Omega t+\tau)}\,d\tau$$

$$S = \int\limits_{-\infty}^{0} \overline{\eta_1(t)\,\eta_1(t+\tau)}\,\overline{\sin\Omega t\sin(\Omega t+\tau)}\,d\tau$$

Найдем плотность распределения $P(a, t)$ в квазистатистическом приближении, когда время входит в функции как параметр и можно полагать

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim 0$$

$$P(a,\ t) = \frac{C_0}{\sigma_1^2}\, e^{\int\left(\frac{2m_1}{\sigma_1^2} - \frac{2\gamma a}{\sigma_1^2} - \frac{3\varkappa\gamma_1 a^3}{16\Omega\sigma_1^2}\right)da} \tag{16}$$

где C_0 — постоянная, определяемая из условия нормировки

$$\int\limits_0^{\infty} P(a,\ t)\,da = 1 \tag{17}$$

Из уравнения (13) следует диффузионное распределение фазы, распределение которой характеризуется нормальным законом распределения

$$W(\varphi,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 t}}\exp\left\{-\left[\varphi - \frac{\Omega_0^2-\Omega^2}{2\Omega} - \frac{9\Omega_0^2 a^2}{4\Omega^3}\right]^2 \Big/ 2\sigma_2^2 t\right\} \tag{18}$$

Выражение (16) при всех a ограничено и экспоненциально стремится к нулю при $a \to \infty$ благодаря выбранному выше закону демпфирования.

Для модельной задачи, учитывающей только тангенциальные случайные возмущения типа стационарного белого шума, получено следующее стационарное распределение плотности вероятности нахождения ИСЗ на околокруговой орбите в более простом виде [15]

$$P(a) = Ca^2 e^{-\lambda(\omega)a^4}/[a^2 + \beta(\omega)]^{\mu(\omega)} \tag{19}$$

где $\lambda(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\mu(\omega)$ — положительные функции, зависящие от уровня шума и динамических параметров системы.

Полученные плотность распределения амплитудного фактора a и фазы φ позволяют определять средние статистические характеристики группы ИСЗ (16), (18), совершающей стационарное синхронное, орбитальное движение или его плавную «адиабатическую» коррекцию. В случае $\rho = \mathrm{const}$ время выпадает из соотношения (16). Отметим, что предположение о стационарности уровня случайных возмущений справедливо, конечно, для достаточно малого интервала изменения радиусов орбит.

Предлагаемый способ статистического описания поведения ИСЗ может быть опробирован и может совершенствоваться по мере расширения информации о возмущающих астрофизических и геофизических факторах околоземного космического пространства и их влияния на движение ИСЗ.

ВНИИ оптико-физических
измерений

Поступила 28 VIII 1977

Ա. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ, Մ. Ի. ԿԻՍԵԼՅՈՎ

ԵՐԿՐԻ ԱՐՀԵՍՏԱԿԱՆ ԱՐԲԱՆՅԱԿՆԵՐԻ ԽՈՏՈՐՎԱԾ ՇԱՐԺՄԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Երկրի արհեստական արբանյակի վրա ազդող գրգռումների գումարը ներկայացվում է պատահական արդյունարար ֆունկցիայով, որը ներմուծվում է երկնային մեխանիկայի գծայնացված հավասարումների մեջ և այն հնարավորություն է տալիս վիճակագրական տվյալներով նկարագրել արբանյակի վարքը՝ հավանականության բաշխման ֆունկցիայի օգնությամբ։

ON STATISTIC DISCRIPTION OF PERTURBED MOTION OF ARTIFICIAL EARTH SATELLITES

A. A. ABGARIAN, M. I. KISELEV

Summary

Totality of impulses influencing the motion of artificial Earth satellites is a resultant random function which is introduced into linearized equations of celestial mechanics thus allowing to describe the behaviour of the satellite statistically by means of the probability distribution function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиверс А. П.* Основы космической радиоэлектроники. М., «Советское радио», 1969.
2. *Можаев Г. В.* Задача о непрерывном обзоре Земли и кинематически правильные спутниковые системы. I. Космические исследования, 1972, X, 6, 833.
3. *Евтушенко Ю. Г., Крылов И. А., Мертянов Р. Ф., Самойлович Г. В.* Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. М., Вычислительный центр АН СССР, 1967.
4. *Шувалов В. В.* Световое давление как динамический фактор в движении искусственных небесных тел. Уч. записки Ярославского педагогического института, астрономия, 1963, вып. 56, стр. 189.
5. *Ларичева В. В., Рейн М. В.* Об одном способе построения решений уравнений плоского возмущенного движения небесной механики. Космические исследования, 1965, III, вып. 3, 359.

6. *Павлов А. М., Сапа В. А.* Эволюция орбиты проводящего спутника под действием магнитного поля центрального диполя. Космические исследования, 1974, XII, 4, 512.
7. *Жагар Ю. Х., Жагар Н. В.* Возможности вычисления локального гравитационного поля Земли по наблюдениям ИСЗ. Латвийский ордена Трудового Красного Знамени Государственный университет им. П. Стучки. Уч. записки, 1974, т. 202, Астрономия, вып. 10.
8. *Siry I. M., Vonbun F. O.* Future applications of laser ranging sistems. Int. Symp. Earth's Gravit. Field and Secul. Variat. Possit. Sydney. Nov., 1973, 3 pp.
9. *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М., Изд. «Наука», 1974.
10. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., Изд. «Наука», 1970.
11. *Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Ярошевич В. А.* Маневрирование космических аппаратов. М., Изд-во «Машиностроение», 1970.
12. *Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э.* Новые исследования нелинейных колебаний. М., Радиоиздат, 1936.
13. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Изд. «Наука», 1974.
14. *Стратонович Р. Л.* Синхронизация автогенератора при наличии помех. Радиотехника и Электроника», 1958, № 4, 497.
15. *Джусумкулов Т. Д., Киселев М. Н.* О статистическом прогнозировании вариации орбит небесных тел. Тр. Фрунзенского политехн. ин-та, 1975, вып. 90, стр. 144.