ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 3, 1976 Механика

Т. А. МАРТЫНОВИЧ, В. Е. ЮРИНЕЦ, И. А. ПИЩЕНКО

НЕОДНОРОДНАЯ ОРТОТРОПНАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

1. Рассмотрим полубесконечную ($y \leqslant 0$) неоднородную ортотропную полуплоскость толщины $2h$, прямолинейный край которой по всей длине подкреплен упругим стержнем постоянного сечения. Сопряжение пластинки со стержнем осуществлено на фактической плоскости их спая. Модули упругости и модуль сдвига пластинки-полуплоскости меняются по закону

$$E_1(y) = E_1^{(0)} e^{-ky}, \quad E_2(y) = E_2^{(0)} e^{-ky}, \quad G(y) = G^{(0)} e^{-ky} \tag{1.1}$$

где k—величина, характеризующая степень неоднородности материала. Предполагается, что модуль сдвига $G^{(0)}$ связан с модулями упругости $E_1^{(0)}$ и $E_2^{(0)}$ следующим образом:

$$G^{(0)} = \frac{E_1^{(0)} E_2^{(0)}}{E_1^{(0)}(1 + 2\nu_2) + E_2^{(0)}} \tag{1.2}$$

что дает возможность, как будет показано ниже, рассматривать численные примеры в относительных величинах $E_1^{(0)}/E_2^{(0)}$. В противном случае для $G^{(0)}$ можно брать конкретные числовые данные, не учитывая выражения (1.2). Коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 приняты постоянными.

К стержню приложены внешние усилия $N(x)$ и $T(x)$ (N, T—нормальная и касательная составляющие заданных усилий). Со стороны стержня на пластинку будут передаваться контактные (внутренние) усилия $N^{(0)}(x)$, $T^{(0)}(x)$. Следовательно, на контуре спая пластинки со стержнем ($y = 0$) имеются следующие условия сопряжения (фиг. 1):

$$(u_1)_{y=0} = u_2, \quad (v_1)_{y=0} = v_2, \quad (\sigma_y)_{y=0} = N^{(0)}(x), \quad (\tau_{xy})_{y=0} = T^{(0)}(x) \tag{1.3}$$

где u_1, v_1 и u_2, v_2 — компоненты вектора смещения пластинки и стержня соответственно.

Пластинка испытывает обобщенное плоское напряженное состояние.

2. При малых деформациях в отсутствии объемных сил зависимость между компонентами вектора перемещений и деформаций для пластинки в случае обобщенного плоского напряженного состояния дается соотношениями

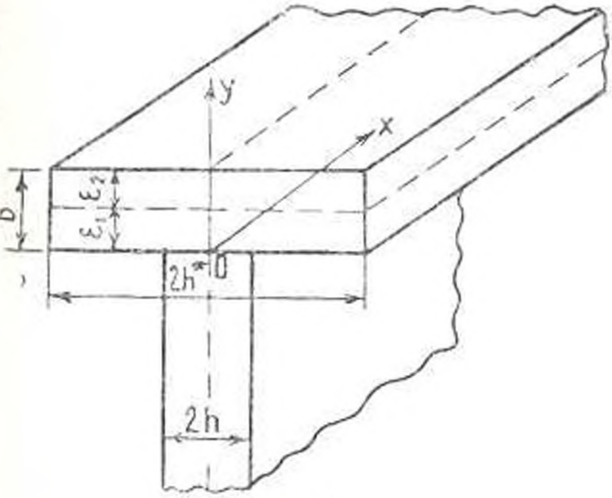
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon_x, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \varepsilon_y, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \gamma_{xy} \tag{2.1}$$

и удовлетворяются условия совместности [1]

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=0 \tag{2.2}$$

Уравнения обобщенного закона Гука, которые связывают компоненты деформаций с компонентами тензора напряжений для ортотропной пластинки, имеют вид

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E_1}(\sigma_x-\nu_1\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E_2}(\sigma_x-\nu_2\sigma_y),\quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy} \tag{2.3}$$



Фиг. 1.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют условиям равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0 \tag{2.4}$$

Подставляя выражения (2.3) в уравнения (2.2), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial^3F}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{1}{E_2}\left(\frac{\partial^4F}{\partial x^4}-\nu_2\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}\right)=0 \tag{2.5}$$

где $F(x, y)$—функция напряжений, через которую компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2},\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.1), (2.3), (2.4), (2.6) и (1.1) находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3u_1}{\partial x^3}&=\frac{1}{E_1}\left(\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^4F}{\partial x^4}\right)\\
\frac{\partial^4v_1}{\partial x^4}&=\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{1}{G}\right)\frac{\partial^5F}{\partial x^4\partial y}-\frac{1}{E_1}\frac{\partial^5F}{\partial x^2\partial y^3}-\frac{k}{E_1}\left(\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^4F}{\partial x^4}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В работе используется интегральное преобразование Фурье по переменной x

$$\overline{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{i\lambda x}\, dx, \qquad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\lambda, y)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda. \quad (2.8)$$

Подставляя выражения (1.1), (1.2) в уравнения (2.5) и применяя интегральное преобразование Фурье (2.8), получим

$$\frac{d^4\overline{F}}{dy^4} + 2k \frac{d^3\overline{F}}{dy^3} - \left\{ k^2 - \lambda^2 \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] \right\} \frac{d^2\overline{F}}{dy^2} -$$

$$- \lambda^2 k \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] \frac{d\overline{F}}{dy} + \lambda^2 \left(\lambda^2 \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} - \nu_1 k^2 \right) \overline{F} = 0 \quad (2.9)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (2.9) запишется в виде

$$\overline{F}(\lambda, y) = \sum_{n=1}^{4} C_n e^{\left(\alpha_n - \frac{k}{2}\right) y} \quad (2.10)$$

где α_n удовлетворяет уравнению

$$\alpha_n^4 - 2 \left\{ \frac{k^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2} \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] \right\} \alpha_n^2 +$$

$$+ \frac{k^4}{16} - \frac{1}{4} k^2 \lambda^2 \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] -$$

$$- \frac{\lambda^4}{4} \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right]^2 =$$

$$= \lambda^4 \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right]^2 - \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \right\} - \lambda^2 \nu_1 k^2 \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) находим

$$\alpha_n = \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + p_0 \lambda^2 \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 (p_0^2 - k_0) - \nu_1 k^2}} \quad (2.12)$$

где обозначено

$$k_0 = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}, \qquad p_0 = \frac{1}{2} \left[k_0 (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right]$$

Так как на бесконечности напряжения должны равняться нулю, то в решении уравнения (2.9) в виде (2.10) с учетом (2.12) нужно удержать члены, исчезающие на бесконечности. Тогда

$$\overline{F}(\lambda, y) = C_1 e^{\left(\alpha_1 - \frac{k}{2}\right)y} + C_2 e^{\left(\alpha_2 - \frac{k}{2}\right)y} \tag{2.13}$$

где

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} + p_0\lambda^2 \pm i\lambda\sqrt{\lambda^2(p_0^2 - k_0) - \nu_1 k^2}} \tag{2.14}$$

Применяя к уравнениям (2.7) интегральное преобразование Фурье (2.8) и подставляя в них выражение (2.13), учитывая при этом граничные условия (1.3), будем иметь

$$(\lambda^3 \overline{u}_1)_{y=0} = \frac{1}{E_1^{(0)}}\left(s_1 \overline{N}^{(0)} + i\lambda s_2 \overline{T}^{(0)}\right)$$

$$(\lambda^3 \overline{v}_1)_{y=0} = \frac{1}{E_2^{(0)}}\left(s_3 \overline{N}^{(0)} + i\lambda s_4 \overline{T}^{(0)}\right) \tag{2.15}$$

Здесь введены обозначения

$$s_1 = \nu_1\lambda^2 - \alpha_1\alpha_2 + \frac{k}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{k^2}{4}, \qquad s_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - k$$

$$s_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)\left[\alpha_1\alpha_2 - \frac{k}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{k^2}{4}\right]$$

$$s_4 = \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - \lambda^2\left[\nu_1 - k_0(1 + 2\nu_1) - 1\right]$$

3. Расчет стержня основывается на гипотезе плоского нормального сечения. Исходя из уравнений равновесия элемента стержня, находим

$$\frac{d^2M}{dx^2} = 2h^*\left(N - \varepsilon_2\frac{dT}{dx}\right) - 2h\left(N^{(0)} + \varepsilon_1\frac{dT^{(0)}}{dx}\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = 2h^*T - 2hT^{(0)}; \qquad Q = -\frac{dM}{dx} - \varepsilon_1\frac{dV}{dx} - 2h^*bT \tag{3.1}$$

где V, Q — продольное и поперечное усилия; M — момент, действующий в произвольном сечении стержня; ε_1, ε_2 — расстояния волокон стержня от его оси соответственно внутреннего и внешнего края; $b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ — высота стержня; $2h^*$ — толщина того края стержня, который не соприкасается с пластинкой.

Принимая гипотезу нормального сечения, при малых деформациях вдоль контура спая пластинки со стержнем будем иметь следующие кинематические соотношения

$$\frac{du_2}{dx} = e_0 + \varepsilon_1\frac{d\theta}{dx}, \qquad \frac{dv}{dx} = \theta \tag{3.2}$$

где θ — угол поворота сечения стержня, e_0 — деформация оси стержня.

При малых деформациях закон Гука для стержня сводится к следующим соотношениям

$$e_0 = \frac{V}{g_1}, \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{g_2} \tag{3.3}$$

где $g_1 = E^* S_n$ — жесткость стержня на растяжение, $g_2 = E^* I$ — жесткость стержня на изгиб, S_n — площадь нормального сечения стержня, E^* — модуль упругости, I — момент инерции.

Из равенств (3.1), (3.2) и (3.3), используя интегральное преобразование Фурье (2.8), находим

$$\begin{aligned} \nu^2 \bar{u}_2 &= -\frac{2h\varepsilon_1}{g_2}\bar{N}^{(i)} - i\nu\frac{2h}{G_1}\bar{T}^{(i)} - \frac{2h^*\varepsilon_1}{g_2}\bar{N} + i\nu\frac{2h^*}{G_1}\bar{T} \\ \nu^4 \bar{v}_2 &= -\frac{2h}{g_2}\bar{N}^{(i)} - i\nu\frac{2h\varepsilon_1}{g_2}\bar{T}^{(i)} + \frac{2h^*}{g_2}\bar{N} - i\nu\frac{2h^*\varepsilon_2}{g_2}\bar{T} \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{g_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{g_2}, \qquad \frac{1}{G_2} = \frac{1}{g_1} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{g_2}$$

4. Исходя из условий равенства перемещений на контуре спая (1.3), на основании соотношений (2.15) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{N}^{(i)} + a_{12}\bar{T}^{(i)} &= b_{11}\bar{N} + b_{12}\bar{T} \\ a_{21}\bar{N}^{(i)} + a_{22}\bar{T}^{(i)} &= b_{21}\bar{N} + b_{22}\bar{T} \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$a_{11} = 2h\varepsilon_1 + \frac{g_2 s_1}{E_1^{(0)}}, \qquad a_{12} = i\nu\left(2h\frac{g_2}{G_1} + \frac{g_2 s_2}{E_1^{(0)}}\right)$$

$$a_{21} = 2h + \frac{g_2 s_3}{E_1^{(0)}}, \qquad a_{22} = i\nu\left(2h\varepsilon_1 + \frac{g_2 s_1}{E_1^{(0)}}\right)$$

$$b_{11} = 2h^*\varepsilon_1, \quad b_{12} = i\nu\frac{2h^* g_2}{G_2}, \quad b_{21} = 2h^*, \quad b_{22} = -i\nu 2h^*\varepsilon_2$$

Система уравнений (4.1) служит для определения трансформант контактных усилий $\bar{N}^{(i)}$, $\bar{T}^{(i)}$ при подкреплении неоднородной ортотропной полуплоскости прямолинейным стержнем. Сами же усилия восстанавливаются при помощи формулы обращения (2.8).

Рассмотрим случай нагружения подкрепляющего стержня нормальным усилием $N(x)$ $(T = 0)$. Тогда

$$b_{12} = b_{22} = 0 \tag{4.2}$$

Решение системы уравнений (4.1) в этом случае с учетом формулы обращения (2.8) можно представить в виде

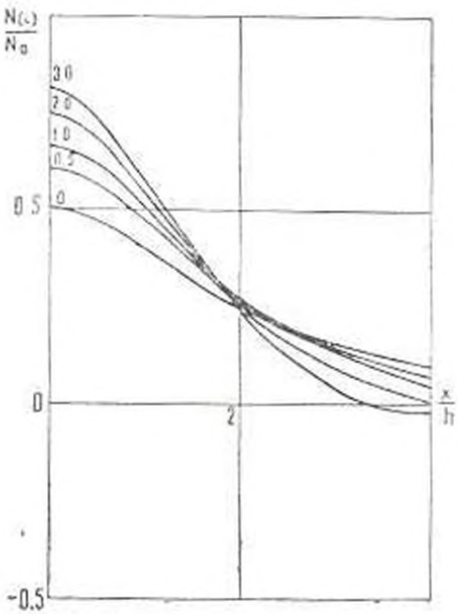
$$N^{(I)}(x)=\frac{b_{21}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{R_1(\lambda)}{R(\lambda)}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}N(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

$$T^{(I)}(x)=\frac{b_{21}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{R_2(\lambda)}{R(\lambda)}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}N(t)\sin\lambda(t-x)\,dt \tag{4.3}$$

где

$$R(\lambda)=a_{11}a_{22}^{*}-a_{12}^{*}a_{21},\quad R_1(\lambda)=\varepsilon_1 a_{22}^{*}-a_{12}^{*}$$

$$R_2(\lambda)=a_{12}-\varepsilon_1 a_{21},\quad a_{12}^{*}=\frac{2hg_2}{G_1}+\frac{g_2 s_0}{E_1^{(0)}},\quad a_{22}^{*}=2h\varepsilon_1+\frac{g_2\varepsilon_1}{E_1^{(0)}}$$



Фиг. 2.

Если на стержень действует сосредоточенная сжимающая сила N_0, то в формулах (4.3) следует положить

$$N(t)=-N_0\delta(t) \tag{4.4}$$

и учесть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cos\lambda(t-x)\,dt=\cos\lambda x,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\sin\lambda(t-x)\,dt=-\sin\lambda x \tag{4.5}$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака.

5. Для примера рассмотрим неоднородную ортотропную полуплоскость и подкрепляющий стержень прямоугольного сечения $b\times 2h^*$ со следующими упругими, жесткостными и геометрическими характеристиками:

$$\frac{2h^*}{2h} = 2.5, \quad \frac{E^*}{E_1^{(0)}} = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} = 3.0, \qquad g_1 = 2E^*bh^*, \qquad b = 2h$$

$$g_2 = \frac{1}{6}E^*h^*b^3, \qquad \nu^* = \nu_1 = 0.3, \qquad z_1 = z_2 = h$$

На фиг. 2 изображена зависимость контактных усилий $X^{(k)}$ от координаты x при различных значениях параметра k, характеризующего степень неоднородности материала полуплоскости.

Вычисления контактных усилий производились на ЭВМ «Минск-22» по методу Гаусса с точностью до 10^{-3} знака.

Львовский государственный
университет им. Ив. Франко

Поступила 24 XI 1975

Տ. Լ. ՄԱՐՏԻՆՈՎԻՉ, Վ. Ե. ՅՈՒՐՑԵՎ, Ի. Ա. ՆԻՇՉԵՆԿՈ

ԱՄՐԱՑՎԱԾ ԵԶՐՈՎ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով լուծված է ամրացված եզրով ոչ համասեռ օրթոտրոպ կիսահարթության լարված վիճակի մասին խնդիրը։

NON-HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC SEMI-PLANE WITH HINGED EDGE

T. L. MARTYNOVICH, V. E. YORTSEVS, J. A. NISHCHENKO

Summary

By using the method of integral Fourie transformations the problem of strained state of a non-homogeneous orthotropic plate with hinged edge is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехтеоретиздат, 1957.