

Կ. Ե. ԼԵՄԻՐՈՎՍԿԻՆ, Բ. Տ. ՐԵԶՆԻԿՈՎ

## О НАЧАЛЬНОМ РАЗРУШЕНИИ АРМИРОВАННЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Армированные конструкции в процессе деформирования проявляют ряд особенностей поведения по сравнению с однородными конструкциями из традиционных материалов. В частности, они обладают свойствами ослабленного сопротивления поперечному сдвигу [1] и существенным влиянием структуры армирования на поведение конструкции [2].

Учет влияния поперечного сдвига на поведение анизотропных пластин исследовался в [3] при использовании гипотезы Тимошенко и ее обобщения в [4, 5]. В качестве основного предположения [4] используется статическое условие, что касательные напряжения по толщине пластинки меняются по заданному закону (в частности, по закону квадратной параболы). В [5] получены уравнения, основанные на кинематических гипотезах, которые соответствуют заданию закона изменения по толщине не только радиальных перемещений, но и нормальных перемещений. Использование кинематических гипотез [5] приводит к сложной системе дифференциальных уравнений даже в случае осесимметричного изгиба круглых пластин.

Необходимо отметить, что структура армирования входит в уравнения [1, 3—5] лишь косвенным путем.

В данной работе на основе обобщенной гипотезы Тимошенко (задается закон изменения радиальных перемещений по толщине) получены уравнения, соответствующие принятой кинематической гипотезе. При этом коэффициенты в разрешающих уравнениях в отличие от работ [1, 3—5] определяются расчетным путем с использованием значений механических характеристик элементов композиционного материала. Таким образом, полученные уравнения позволяют не только учесть влияние сдвига на напряженно-деформированное состояние армированной пластинки, но и исследовать вопросы о характере начального «разрушения», о величине нагрузки начального «разрушения», а также поставить и решить задачу о рациональном характере подбора механических параметров элементов композиции и структуры армирования пластинки с точки зрения прочности и жесткости.

1. При осесимметричном нагружении, закреплении и ортотропном армировании (с цилиндрической анизотропией) кольцевой пластинки все величины от угловой координаты  $\varphi$  не зависят, тогда

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (1.1)$$

Пренебрегая обратным, то есть полагая

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{и} \quad \omega = \omega(r) \quad (1.2)$$

будем считать, что напряжения  $\tau_{rz}$  малы по сравнению с остальными нормальными напряжениями.

Если для армированного слоя принять предположения, изложенные в [6], и считать, для простоты и определенности, что имеем четыре семейства нитей армирования, два из которых расположены в главных геометрических направлениях, а два — под симметричными углами к радиальному направлению, то связь между осредненными напряжениями и деформациями для композиционного материала будет иметь вид

$$\tau_r = a_{13}\varepsilon_r + a_{12}\varepsilon_z, \quad \sigma_z = a_{12}\varepsilon_r - a_{22}\varepsilon_z, \quad \sigma_{\theta\theta} = a_{11}\varepsilon_{\theta\theta} \quad (1.5)$$

для нитей армирования —

$$\sigma_1^* = E_1^* \varepsilon_1, \quad \sigma_2^* = E_2^* \varepsilon_2, \quad \sigma_3^* = E_3^* (\varepsilon_1 \cos^2 \mu + \varepsilon_2 \sin^2 \mu) \quad (1.4)$$

и для связующего —

$$\sigma_r^c = \frac{E_c}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_r + \nu_c \varepsilon_z), \quad \sigma_z^c = \frac{E_c}{(1-\nu_c^2)} (\nu_c \varepsilon_r + \varepsilon_z), \quad \sigma_{\theta\theta}^c = a_{11}\varepsilon_{\theta\theta} \quad (1.5)$$

где

$$a_{1j} = a - a_1 \sum_{i=1}^3 \nu_i E_i l_i^2, \quad (j = 1, 2)$$

$$a_{12} = \nu_c a - a_2 \sum_{i=1}^3 \nu_i E_i l_i^2$$

(1.6)

$$a_{13} = E_c [2(1 + \nu_c) a_1]^{-1}, \quad l_{1i} = \cos \mu_i, \quad l_{2i} = \sin \mu_i$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \pi/2, \quad \mu_3 = \mu_1 = \mu_2, \quad \nu_3 = \nu_c$$

$$a = a_1 E_c (1 - \nu_c^2)^{-1}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения:  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  — радиальная, тангенциальная и нормальная координаты пластинки;  $u$ ,  $w$  — смещения вдоль осей  $r$  и  $z$ ;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  — нормальные и касательные напряжения в пластинке;  $2h_0$ ,  $r_0$ ,  $R_0$  — толщины, внутренние и внешний радиусы пластинки;  $E_c$ ,  $\nu_c$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего,  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — модули Юнга материалов нитей армирования;  $\mu$  — углы между направлением оси « $or$ » и направлением нитей углового армирования;  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — удельные интенсивности армирующих нитей в плоскости армированного слоя,  $a_1$  ( $a_2 = 1 - a_1$ ) — интенсивность армирующего слоя по толщине пластинки,  $\nu_c$  — удельное объемное содержание нитей армирования, которое определяется следующим образом:

$$\nu_c = (R_0^2 - r_0^2)^{-1} 2 \int_0^{R_0} (m_1 + m_2 + 2m_3) r dr \quad (1.7)$$

Величины с индексом « $a$ » относятся всюду к арматуре, а с индексом « $c$ » — к слою связующего.

Для радиального смещения  $u$  примем зависимость [5]

$$u = u_0(r) - z^2 \gamma_2(r) + z^4 \gamma_4(r) \quad (1.8)$$

которая соответствует разложению смещения  $u(r, z)$  и ряд по степеням  $z$ . Зависимость (1.8) соответствует минимальному числу членов ряда, при котором возможно учесть сдвиговые напряжения в армированной пластинке, удовлетворяющие заданным условиям на поверхностях  $z = \pm h_0$ . Следует отметить, что при  $\gamma_2(r) = \gamma_4(r) = 0$  соотношение (1.8) соответствует гипотезе Тимошенко С. П., а при  $\gamma_2 = \gamma_4 = 0$  и  $\gamma = -\frac{dw}{dr}$  (1.8) — гипотезе Кирхгофа-Лява.

В дальнейшем будут рассмотрены задачи, для которых касательные напряжения на поверхностях  $z = \pm h_0$  равны нулю, то есть

$$\tau_{rz}|_{z=\pm h_0} = 0 \quad (1.9)$$

тогда, используя выражения для деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dr} \quad (1.10)$$

и последнее соотношение из (1.3), нетрудно получить

$$\ddot{\gamma}_2 = 0, \quad \ddot{\gamma}_4 = -\frac{1}{32h_0^2} (\gamma - u') \quad (1.11)$$

Дифференциальные уравнения изгиба кольцевой пластинки и граничные условия можно получить, используя принцип виртуальных перемещений, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$\int_{-h_0}^{h_0} \int_{r_0}^{R_0} (z_r \delta \varepsilon_r + z_z \delta \varepsilon_z + z_{rz} \delta \varepsilon_{rz}) r dr dz = \int_{r_0}^{R_0} q^0 w r dr + \\ + \int_{-h_0}^{h_0} \{ [p^0(R_0, z) \delta u(R_0, z) - p_r^0(R_0, z) \delta w(R_0)] R_0 - \\ - [p_r^0(r_0, z) \delta u(r_0, z) + p^0(r_0, z) \delta w(r_0)] r_0 \} dz \quad (1.12)$$

где  $q(r)$  — распределенная нормальная нагрузка, действующая на пластинку;  $p^0(R_0, z)$  и  $p_r^0(r_0, z)$  — распределенные нагрузки, направленные вдоль оси  $r$  и приложенные в сечениях  $r = r_0$  и  $r = R_0$ , соответственно;  $p_r^0(R_0, z)$  и  $p^0(r_0, z)$  — распределенные нагрузки, направленные вдоль оси  $z$  и приложенные в сечениях  $r = r_0$  и  $r = R_0$ , соответственно. Подставляя (1.12) и (1.10) с учетом (1.8) и (1.11), выполняя интегрирование по частям и учитывая все зависимости вариаций  $\delta u$ ,  $\delta \gamma$  и  $\delta w$ , получим

уравнения изгиба

$$T_r - \frac{d}{dr} (rT_r) = 0, \quad M_r - \frac{d}{dr} (rM_r) - r\bar{Q} = 0$$

$$\frac{d}{dr} (\bar{Q}r) = -qr \tag{1.13}$$

и граничные условия

$$(T_r - T_r^{(1)})\delta u_0 = 0, \quad (\bar{M}_r - \bar{M}_r^{(1)})\delta \bar{u}_r = 0$$

$$\alpha (M_r^{(1)} - M_r^{(1)0}) \frac{d^2 w}{dr^2} = 0, \quad (\bar{Q} - Q^0)\delta w = 0 \tag{1.14}$$

где введены следующие обозначения:

$$T_{r(z)} = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{r(z)} dz, \quad M_{r(z)} = \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{r(z)} z dz, \quad Q = \int_{-h_0}^{h_0} \tau_{rz} dz$$

$$M_r^{(1)} = \frac{1}{3h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \sigma_{r(z)} z^2 dz, \quad Q^{(1)} = \frac{1}{h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \tau_{rz} z^2 dz \tag{1.15}$$

$$\bar{M}_{r(z)} = M_{r(z)} - \alpha M_r^{(1)}, \quad \bar{Q} = Q - \alpha Q^{(1)} - \frac{\alpha}{r} \left[ M_r^{(1)} - \frac{d}{dr} (rM_r^{(1)}) \right]$$

и

$$T_r^0 = \int_{-h_0}^{h_0} p_r^0 dz, \quad M_r^0 = \int_{-h_0}^{h_0} p_r^0 z dz, \quad Q^0 = \int_{-h_0}^{h_0} p_z^0 dz$$

$$M_r^{(1)0} = \frac{1}{3h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} p_r^0 z^2 dz, \quad \bar{M}_r^0 = M_r^0 - \alpha M_r^{(1)0} \tag{1.16}$$

Для удобства дальнейшего изложения в соотношения (1.13)—(1.16) введем параметр  $\alpha = 0; 1$ , смысл которого будет указан ниже.

Уравнения равновесия (1.13) по форме совпадают с известными [4] уравнениями изгиба в усилиях и моментах для круглых пластин, но «перерезывающая» сила  $\bar{Q}$  в (1.13) отличается от обычного значения перерезывающей силы некоторыми добавочными членами, которые, как будет показано далее, увеличивают порядок разрешающих дифференциальных уравнений в задаче изгиба пластинки и оказывают влияние на характер распределения касательных напряжений по координате  $z$  и максимальную величину нормальных напряжений.

Если в уравнениях (1.13) положить  $\alpha = 0$ , то соотношения (1.3)—(1.11), (1.13), (1.14), хотя и определяют сдвиговые напряжения в пластинке, как и в [4], но уравнения (1.13) при  $\alpha = 0$  необходимо рассматри-

вать как приближенные к уравнениям (1.13) при  $\alpha = 1$ . Поэтому в дальнейшем уравнения (1.13) при  $\alpha = 0$  будем называть для простоты приближенными, а уравнения (1.13) при  $\alpha = 1$  — точными. Граничные условия для приближенных уравнений (1.13) нетрудно получить из (1.14), положив  $\alpha = 0$ . Следует отметить, что для приближенных уравнений (1.13) граничные условия в случае жесткой заделки, как и в [4], могут иметь несколько вариантов, например, при  $r = R_0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $\frac{dw}{dr} = 0$ ,  $w = 0$  или  $u(R_0; h_0) = 0$ ,  $w = 0$ . Эта неоднозначность является следствием того, что количество постоянных, полученных при интегрировании приближенных уравнений (1.13) недостаточно, чтобы удовлетворить условию  $u(z) = 0$  на жестко защемленном крае пластинки. Для точных уравнений (1.13), которые имеют порядок выше, чем приближенные граничные условия в случае жесткой заделки определяются однозначно из (1.14)

$$u_0 = \gamma = \frac{dw}{dr} = w = 0 \quad (1.17)$$

Используя (1.8), (1.11) и (1.17), нетрудно показать, что на жестко защемленном крае пластинки в случае точных уравнений (1.13) имеет  $u(z) = 0$

Рассмотрим пластинку с такой структурой армирования, что коэффициенты упругости  $a_{ij} = \text{const}$ , ( $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3$ ). Тогда, используя (1.3), (1.10), (1.11), (1.15) и (1.13), система уравнений (1.13) сводится к следующим уравнениям для определения функций  $u_0$ ,  $\gamma$  и  $w$ :

$$r^2 u_0'' - r u_0' - r^2 u_0 = 0 \quad (1.18)$$

$$\gamma = \Psi + \frac{1}{5} z \quad (1.19)$$

$$w = \frac{4}{3} \int_0^z \gamma dr - \int_0^z \Psi dr - C_1 \quad (1.20)$$

где функции  $\Psi$  и  $\chi$  определяются из уравнений

$$r^2 \Psi'' + r \Psi' - 11\Psi = -\frac{3r}{2h_0^2 a_{13}} \left( \int_0^z q r dr - C_2 \right) \quad (1.21)$$

$$\chi = -\frac{3}{4h_0 a_{13} r} \left( \int_0^z q r dr - C_2 \right) \quad \text{при } z = 0 \quad (1.22)$$

и

$$r^2 \chi'' + z \chi' - z \left( \chi^2 + \frac{210 a_{13}}{h_0^2 a_{11}} r^2 \right) = \frac{315 r}{2 h_0^2 a_{11}} \left( \int_0^z q r dr - C_2 \right) \quad (1.23)$$

при  $z = 1$ .

$C_1, C_2$  — постоянные интегрирования,  $\alpha^2 = \frac{2\sigma_0}{a_{11}}$  и штрих — производная по  $r$ .

Необходимо отметить, что коэффициенты в уравнениях (1.18) — (1.23) зависят от величин  $a_{ij}$  ( $i=1, 2; j=1, 2, 3$ ), которые, в отличие от работ [1, 4—5] определяются расчетным путем из соотношений (1.6) и зависят от механических характеристик элементов композиции, их объемного содержания и структуры армирования.

Из (1.18) — (1.23) видно, что система точных уравнений (1.13) ( $\alpha=1$ ) имеет восьмой порядок, а система приближенных уравнений (1.13) ( $\alpha=0$ ) — шестой. Таким образом, порядок дифференциальных уравнений (1.13) соответствует порядку граничных условий (1.14).

Интегрируя уравнения (1.18), (1.21) и (1.23), получим

$$u_0 = C_3 r^3 + C_4 r^{-1} \tag{1.24}$$

$$\Psi = r^4 \left( C_5 - \int_0^r r^{-2} \tau_1 dr \right) + r^{-2} \left( C_6 + \int_0^r r^3 \tau_1 dr \right) \tag{1.25}$$

и

$$x = I_1(\xi) \left[ C_7 + \int_0^{\xi} \tau_2 K_1(\xi) d\xi \right] + K_1(\xi) \left[ C_8 - \int_0^{\xi} \tau_2 I_1(\xi) d\xi \right] \tag{1.26}$$

(при  $\alpha=1$ )

где  $C_1$  —  $C_8$  — постоянные интегрирования

$$\tau_1 = \frac{3}{2h_0^3 a_{11}^3} \left( \int_0^r q r dr - C_2 \right)$$

$$\tau_2 = \frac{315}{2h_0^3 a_{11}^3 r} \left( \int_0^{\xi} q r dr - C_2 \right)$$

$$\xi = \frac{r}{R_0}, \quad \xi_0 = \frac{a}{R_0} \sqrt{\frac{210 a_{21}}{a_{11}}}, \quad \xi_0 = \frac{R_0}{n_0}, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{R_0}$$

$I_1(\xi)$  и  $K_1(\xi)$  — функции Бесселя от чисто мнимого аргумента.

2. Соотношения (1.19), (1.20), (1.22), (1.24) — (1.26) и (1.3) — (1.5), (1.8), (1.10) позволяют определить не только распределение осевых смещений, деформаций и напряжений в пластинке, но также и величины напряжений во всех элементах (в связующем и арматуре) армированной пластинки. Последнее обстоятельство позволяет исследовать вопросы: о характере начального «разрушения», о величине нагрузки начального «разрушения», а также поставить и решить задачу о рациональном выборе механических параметров элементов композиции и структуры армированной пластинки с точки зрения прочности и жесткости.

В дальнейшем для удобства будем рассматривать только «простое» нагружение, тогда

$$q = pq_0(r), \quad p_1'' = pp_{10}(z), \quad p_2'' = pp_{20}(z) \quad (2.1)$$

и любое напряжение до начала «разрушения» можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_i'' &= p\bar{\sigma}_i'' & (i = 1, 2, 3) \\ \sigma_{1,2}'' &= p\bar{\sigma}_{1,2}'' & \sigma_3'' = p\bar{\sigma}_3'' \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $q_0, p_{10}, p_{20}$  — заданные функции, а  $p = 0$  — параметр нагружения, который для простоты будем называть нагрузкой.

Известно [7—9], что материал связующего многих реальных стекло-боро- и углепластиков обладает различными характеристиками прочности при растяжении и сжатии. Поэтому будем считать, что связующее подчиняется условно прочности П. П. Баладина [10]. Тогда один из критериев начального «разрушения» пластинки примет вид

$$\max_{\substack{z \\ -h_1 \leq z \leq h_2}} |(\sigma_1'')^2 + (\sigma_2'')^2 - \sigma_3''\sigma_3'' + 3(\sigma_{12}'')^2 + (\sigma_1'' - \sigma_2'')(\sigma_1'' + \sigma_2'')| = \sigma_+''\sigma_-'' \quad (2.3)$$

где  $\sigma_+$  — пределы прочности материала связующего при растяжении (плюс) и сжатии (минус). При  $\sigma_+'' = \sigma_-''$  условие (2.3) переходит в условие прочности Мизеса.

Для нитей армирования также примем, что пределы прочности при растяжении и сжатии различны. При этом под «разрушением» или пластическим поведением арматуры при сжатии будем понимать любое отклонение от упругого поведения, например, поведение арматуры в процессе ее дешифрирования от сжатия в связующем. Учитывая, что нити армирования в принятой модели (1.4) являются одномерными, введем второй критерий начального «разрушения» пластинки в виде

$$\begin{aligned} \sigma_i'' &= \sigma_i'' & \text{при } \sigma_i'' \geq 0 \\ \min_{\substack{r \\ -h_1 \leq r \leq h_2}} | \sigma_1'' = \sigma_{11}'' &, \quad | \sigma_2'' = \sigma_{21}'' & \text{при } \sigma_1'' \geq 0 \text{ и } \sigma_2'' \leq 0 \\ | \sigma_3'' = \sigma_{31}'' & \text{при } \sigma_3'' \leq 0, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\sigma_i'' = \max_{\substack{r, z \\ -h_1 \leq r \leq h_2 \\ -h_1 \leq z \leq h_2}} \sigma_i'', \quad \sigma_i'' = \min_{\substack{r, z \\ -h_1 \leq r \leq h_2 \\ -h_1 \leq z \leq h_2}} \sigma_i''$$

$\sigma_{ij}$  — пределы прочности материалов нитей армирования  $i$ -того семейства при растяжении (плюс) и сжатии (минус).

Используя соотношения (2.3) и (2.4), можно определить нагрузки, соответствующие началу «разрушения» связующего  $p''$  и арматуры

$$p'' = \min_{i=1, 2, 3} (p_i'') \quad (2.5)$$

где  $p_i^*$  — нагрузка, при которой начинают «разрушаться» нити  $i$ -того семейства. На основании (2.2) и (2.4) величина  $p_i^*$  определяется следующим образом:

$$p_i^* = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}_{ul}^i}{\bar{\sigma}_i^*} & \text{при } \bar{\sigma}_i^* > 0 \\ \min \left\{ \frac{\bar{\sigma}_{ul}^i}{\bar{\sigma}_i^*}, \frac{\bar{\sigma}_{ul}^i}{|\bar{\sigma}_i^*|} \right\} & \text{при } \bar{\sigma}_i^* < 0 \text{ и } \bar{\sigma}_i^* > 0 \\ \frac{\bar{\sigma}_{ul}^i}{|\bar{\sigma}_i^*|} & \text{при } \bar{\sigma}_i^* < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma}_i^* = \max_{\substack{K_i \\ K_i}} \bar{\sigma}_i^*, \quad \bar{\sigma}_i^* = \min_{\substack{K_i \\ K_i}} \bar{\sigma}_i^*, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Практическое использование соотношения (2.3) для отыскания нагрузки  $p$ , соответствующей началу «разрушения» связующего, даже с помощью существующих численных методов весьма затруднительно. Во-первых, координаты точки  $r_1, z_1$ , в которой реализуется условие (2.3), должны определяться из системы трансцендентных уравнений. Получение этой системы, построение соответствующего метода численного счета и исследование его сходимости представляет значительные математические трудности. Во-вторых, величина нагрузки в соотношении (2.3) входит нелинейным образом, что приводит к зависимости координат  $r_1, z_1$  от величины нагрузки  $p$ . При этом, как величина нагрузки  $p^*$ , так и величины  $r_1, z_1$  в свою очередь зависят от параметров геометрии  $\beta, L$ , вида армирования  $\alpha, \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и механических характеристик материалов арматуры и связующего  $E_{s1}, E_{s2}, \tau_{11}, \tau_{12}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Поэтому в дальнейшем для упрощения численного счета, будем использовать условие прочности для связующего в виде параллелепипеда, описывающего в пространстве напряжений условие прочности П. П. Баландина (или вписанного в соответствующий эллипсоид) и стороны которого параллельны плоскостям  $\sigma_1^0 \sigma_2^0, \sigma_1^0 \sigma_3^0$  и  $\sigma_2^0 \sigma_3^0$ . Тогда нагрузка, соответствующая началу «разрушения» связующего, определяется следующим образом:

$$p^* = \min \{ p_{11}^*, p_{12}^*, p_{22}^* \} \quad (2.7)$$

где  $p_{11}^*$  определяется из условия

$$p_{11}^* = \sqrt{\frac{\sigma_1^0 \sigma_2^0}{3}} \quad (2.8)$$

и  $p_{12}^*$  из условия

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{r(\tau)}^+ = \sigma_{co}^- \\
 \min_{\substack{r \in R \\ h_c \leq z \leq h_0}} |\sigma_{r(\tau)}^+ - \sigma_{en}^+|, |\sigma_{r(\tau)}^+ - \sigma_{co}^-| \\
 |\sigma_{r(\tau)}^+| = \sigma_{co}^-
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{при } \sigma_{r(\tau)}^+ = 0 \\
 \text{при } \sigma_{r(\tau)}^+ > 0 \text{ и } \sigma_{r(\tau)}^- < 0 \\
 \text{при } \sigma_{r(\tau)}^+ < 0
 \end{array}
 \quad (2.9)$$

$$\sigma_{r(\tau)}^+ = \max_{\substack{r \in R \\ -h_c \leq z \leq h_0}} |\sigma_{co}^-|, \quad \sigma_{r(\tau)}^- = \max_{\substack{r \in R \\ -h_c \leq z \leq h_0}} \sigma_{r(\tau)}^-$$

$$\sigma_{r(\tau)}^+ = \min_{\substack{r \in R \\ -h_c \leq z \leq h_0}} \sigma_{r(\tau)}^+, \quad \sigma_{co} = \left| \sigma_{co}^- - \sigma_{co}^- \pm \sqrt{\frac{4}{3} [(\sigma_{co}^+)^2 + (\sigma_{co}^-)^2 - \sigma_{co}^+ \sigma_{co}^-]} \right|.$$

Используя (2.2), (2.8), (2.9), нетрудно получить

$$p_{r,z} = \sqrt{\frac{\sigma_{co}^+ \sigma_{co}^-}{3}} \frac{1}{\sigma_{co}^+} \quad (2.10)$$

$$p_{r(\tau)}^+ = \begin{cases} \frac{\sigma_{co}^-}{\sigma_{r(\tau)}^+} & \text{при } \sigma_{r(\tau)}^+ > 0 \\ \min \left\{ \frac{\sigma_{en}^+}{\sigma_{r(\tau)}^+}, \frac{\sigma_{co}^-}{|\sigma_{r(\tau)}^+|} \right\} & \text{при } \sigma_{r(\tau)}^+ > 0, \sigma_{r(\tau)}^- < 0 \\ \frac{\sigma_{co}^-}{|\sigma_{r(\tau)}^+|} & \text{при } \sigma_{r(\tau)}^+ \leq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$\sigma_{r,z}^+ = \max_{\substack{r \in R \\ -h_c \leq z \leq h_0}} \sigma_{r,z}^+, \quad \sigma_{r(\tau)}^- = \max_{\substack{r \in R \\ -h_c \leq z \leq h_0}} \sigma_{r(\tau)}^-, \quad \sigma_{r(\tau)}^+ = \min_{\substack{r \in R \\ -h_c \leq z \leq h_0}} \sigma_{r(\tau)}^+$$

Таким образом, если величину  $p^+$  находить из соотношений (2.7), (2.10), (2.11), то при определении координат точки  $(r, z)$ , в которой впервые возникает «разрушение» связующего по критерию (2.7), необходимо будет решить фактически одно трансцендентное уравнение и при этом координаты  $r, z$  не зависят от величины нагрузки  $P$ .

Полученные соотношения (2.5)—(2.7), (2.10), (2.11) позволяют определить нагрузку, соответствующую началу «разрушения» пластинки

$$P_0 = \min(p^+, p'') \quad (2.12)$$

Пластинка будет оптимальной по начальному «разрушению», если при заданных параметрах геометрии  $B_0, \bar{z}_0$ , удельного содержания нитей армирования  $\bar{\psi}_0$  и нитенасыщенности армирующего слоя  $a$ , существуют такие механические характеристики материалов арматуры и связующего  $E_{a_i}, \sigma_{a_i}^+$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $E_c, \sigma_c$  и параметры армирования  $\mu_i, \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), при которых величина  $p_0$  достигает максимального значения, то есть

$$P_0 = \max_{(E_{a_i}, \sigma_{a_i}^+, E_c, \sigma_c)} p \quad (2.13)$$

где  $0 \leq i \leq 2$ ,  $0 \leq j \leq 3$  и удовлетворяют условию (1.7).  $E_{ai} \in \Sigma_{ai}$ ,  $\tau_{ai} \in \Sigma_{\tau i}$ ,  $E_i \in \Sigma_{E_i}$ ,  $\tau_i \in \Sigma_{\tau_i}$ ,  $\Sigma_{ai}$ ,  $\Sigma_{\tau i}$ ,  $\Sigma_{E_i}$  и  $\Sigma_{\tau_i}$  — области допустимых значений параметров  $E_{ai}$ ,  $\tau_{ai}$ ,  $E_i$  и  $\tau_i$ , соответственно. Здесь и в дальнейшем для простоты будем считать, что коэффициент Пуассона  $\nu_i$  — величина заданная, так как для многих реально существующих материалов он практически одинаков.

Если на пластинку по условиям эксплуатации накладываются некоторые ограничения на величину прогиба, то представляет интерес проектировать пластинки рациональные с точки зрения жесткости.

Под рациональным проектом с точки зрения жесткости будем понимать проект, для которого при заданных параметрах —  $\beta_0$ ,  $\xi_0$ ,  $u_0$ ,  $a_0$ ,  $E_{ai}$ ,  $\tau_{ai}$ ,  $E_i$ ,  $\tau_i$ , определится такая структура армирования  $\rho^*$ ,  $\omega_i^*$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), что допустимый уровень прогиба

$$\omega^* = A_{\omega}^* = \min_{\substack{\rho, \omega_1, \omega_2 \\ \rho \in \Sigma_{\rho}, \omega_i \in \Sigma_{\omega_i}}} A_{\omega}, \quad \left( \max_{\substack{r_0 \leq r \leq R \\ \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2}} |\omega(r)| = A_{\omega} \right) \quad (2.14)$$

при выполнении в качестве ограничений для параметров  $E_{ai}$ ,  $\tau_{ai}$ ,  $E_i$ ,  $\tau_i$  неравенств

$$\begin{aligned} \sigma_{(i)}^* &\leq \sigma_{ai}^+ && \text{при } \sigma_{(i)}^* \leq 0 \\ \sigma_{(i)}^* &\leq \sigma_{ai}^+ \text{ и } |\sigma_{(i)}^*| \leq \sigma_{ai}^- && \text{при } \sigma_{(i)}^* > 0 \text{ и } \sigma_{(i)}^* < 0 \\ |\sigma_{(i)}^*| &\leq \sigma_{ai}^- && \text{при } \sigma_{(i)}^* \leq 0, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.15)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{(i)}^* &\leq \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ei}^+ \\ \sigma_{ei}^- \end{array} \right. && \text{при } \sigma_{(i)}^* > 0 \\ \sigma_{(i)}^* &\leq \sigma_{ei}^+ \text{ и } |\sigma_{(i)}^*| \leq \sigma_{ei}^- && \text{при } \sigma_{(i)}^* > 0 \text{ и } \sigma_{(i)}^* < 0 \\ |\sigma_{(i)}^*| &\leq \sigma_{ei}^- && \text{при } \sigma_{(i)}^* \leq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

которые указывают, что напряжения в связующем и нитях армирования не должны нарушать условий прочности.

3. Рассмотрим кольцевую пластинку, шарнирно опертую на внешнем контуре и свободную на внутреннем, под действием равномерно распределенной нагрузки, тогда

$$q_1 = 1, \quad p_{(1)} = p_{(2)} = 0 \quad \text{при } r = r_0 \text{ и } R_0 \quad (3.1)$$

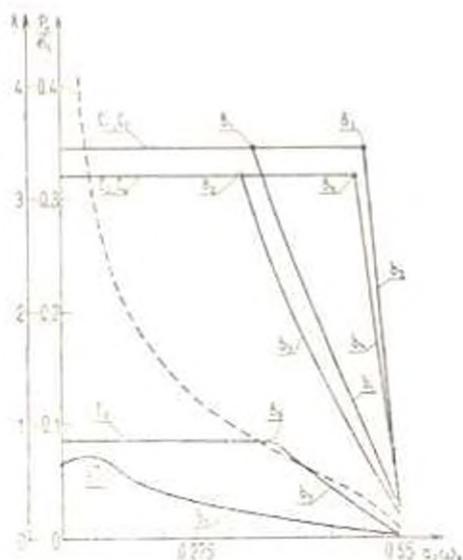
и из (1.14) имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_0 \quad T_r = \bar{M}_r = 2M_r^{(1)} = \bar{Q} = 0 \\ \text{при } r = R_0 \quad \omega = 0, \quad T_r = \bar{M}_r = 2M_r^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пользуясь условиями (3.1), (3.2) и выражениями (1.3), (1.15), (1.19), (1.20), (1.22), (1.24)–(1.26), можно определить постоянные интегрирования  $C_1$ – $C_4$ . После чего из (1.8), (1.20), (1.4), (1.5) определим значения перемещений в пластинке, а также напряжения в связующем и арматуре, которые можно использовать для решения сформулированных выше задач рационального проектирования. Ввиду громоздкости соответствующие выражения здесь не приводим. Укажем только некоторые результаты численного счета при следующих параметрах:

$$E_{s1} = E_s, \quad \nu_{s1} = \nu_s \quad (i = 1, 2, 3), \quad \nu_s = 0.2 \quad (3.3)$$

$$\nu_{s2} = 0.55, \quad \nu_{s3} = 0.35, \quad a_2 = 0.7, \quad z = 0. \quad (3.4)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приведены зависимости нагрузки начального «разрушения» оболочки от величины параметра армирования  $\alpha_0$  при  $\omega = 0$

1.	$\beta_0 = 5$ ,	$E = 15$ ,	$\xi_0 = 1.3$ ,	$\alpha^* = 15.2$	(3.5)
2.	$\beta_0 = 5$ ,	$E = 75$ ,	$\xi_0 = 1.3$ ,	$\alpha^* = 51.5$	
3.	$\beta_0 = 5$ ,	$E = 15$ ,	$\xi_0 = 0.2$ ,	$\alpha^* = 16.8$	
4.	$\beta_0 = 5$ ,	$E = 75$ ,	$\xi_0 = 0.2$ ,	$\alpha^* = 70.3$	
5.	$\beta_0 = 20$ ,	$E = 15$ ,	$\xi_0 = 1.3$ ,	$\alpha^* = 15.8$	
6.	$\beta_0 = 20$ ,	$E = 75$ ,	$\xi_0 = 1.3$ ,	$\alpha^* = 63.4$	

$$z > z^* (E = E_s, E_s, z = \lambda_s z_s).$$

Ниже будет указано, как определялась величина  $\alpha^*$ , которая указывает, что при  $z > z^*$   $p_s = p$ , то есть начальное «разрушение»

пластинки происходит из-за „разрушения“ связующего, а нити армирования остаются упругими. Здесь и в дальнейшем индексы у букв, которыми обозначены кривые, соответствуют номеру варианта параметров, указанных в каждом конкретном случае (в рассматриваемом случае некоторые варианты параметров приведены в (2.5)); точка  $A_i$  соответствует параметрам армирования, при которых пластинка начинает „разрушаться“ от нормальных напряжений  $\sigma^0$  (условие (2.9)) и от сдвиговых напряжений  $\tau_{\theta z}$  (условие (2.8)) одновременно; точка  $B_i$  — от сдвиговых напряжений  $\tau_{\theta z}$  (условие (2.8)) и от нормальных напряжений  $\sigma^0$  (условие (2.9)), одновременно; точка  $c_i$  — от нормальных напряжений  $\sigma^0$  и  $\sigma^z$  одновременно; точка  $a_i$  соответствует параметрам армирования, при которых пластинка начинает „разрушаться“ от нормальных напряжений  $\sigma^z$ ; точка  $b_i$  — от нормальных напряжений  $\sigma^z$ ; точка  $d_i$  — от сдвиговых напряжений  $\tau_{\theta z}$ . Так, например, на фиг. 1 кривая  $c_1 B_1 b_1$  соответствует первому варианту параметров из (3.5). При этом на прямолинейном участке  $c_1 B_1$  пластинка начинает „разрушаться“ от сдвиговых напряжений в связующем на окружности  $r = R_0$  и  $z = 0$ , на участке  $B_1 b_1$  пластинка начинает „разрушаться“ от нормальных напряжений в связующем —  $\sigma^z$  на окружностях  $r = R_0$ ,  $z = \pm h_0$ .

Как видно из фиг. 1, для параметров армирования, соответствующих прямой  $c_i B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 6$ ) и точке  $b_i$ , нагрузка начального „разрушения“ пластинки является наибольшей. Таким образом, значения  $\sigma_0$  на прямой  $c_i B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 6$ ) и в точке  $b_i$  соответствуют пластинке, оптимальной по начальному „разрушению“ при параметрах (3.3)–(3.5) и  $\alpha_2 > \alpha^A$ . При этом нагрузка начального „разрушения“ пластинки оптимальной структуры может превышать нагрузку начального „разрушения“ пластинки с нерациональной структурой армирования в несколько раз.

Из соотношений (2.5)–(2.7), (2.10), (2.11) при параметрах (3.3) нетрудно видеть, что величина  $p'$  пропорциональна параметру  $\alpha_2$ , а величина  $p''$  — параметру  $\alpha_1$ , тогда из условия

$$p' = p'' \tag{3.6}$$

нетрудно получить зависимость

$$\alpha_2 = f(\alpha_1, \alpha_0, \nu, \nu_1, \alpha_2, \nu, \nu_1, \alpha) \tag{3.7}$$

используя которую можно определить величину  $\alpha^A$  следующим образом:

$$\alpha^A = \max_{\alpha_1, \alpha_2} f \quad (0 < \alpha_1 \leq 2, \quad \alpha_2 = 0 \text{ и } \alpha_1 + \alpha_2 + 2\nu_1 = \alpha) \tag{3.8}$$

На фиг. 1 пунктирная кривая соответствует зависимости параметра  $i = \sqrt{\frac{\alpha_{\theta z}}{\alpha_{\sigma z}}}$  (характеризующего отношение изгибной жесткости пластинки в кольцевом направлении к изгибной жесткости в радиальном) от  $\alpha_2^0$ , при  $\alpha_1 = 0$  и  $K = 75$ . Из сравнения этих кривых и вели-

чины  $p_0$  видно, что с точки зрения начального „разрушения“ структура армирования пластинки будет оптимальной не только при  $\lambda > 1$ , как это утверждается, например, в [3], но и при  $\lambda < 1$ . „Так, для 1, 2, 3, 4 и 6 вариантов параметров из (3.5) при  $0.275 < a_{2p_1} < a_{2p_1}(B_i)$  ( $a_{2p_1}(B_i)$  — абсцисса точки  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 6$ ) пластинка также является оптимальной по начальному „разрушению“, однако  $1 > \lambda$ “.

На фиг. 2 приведены зависимости нагрузки начального „разрушения“ от угла армирования —  $\mu$  при (3.3), (3.4).

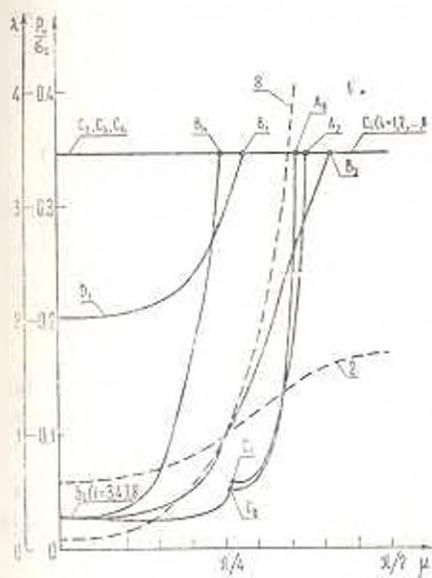
$$\begin{array}{l} \bar{\sigma}_0 = 5, \quad \bar{\sigma}_0 = 1.3 \\ 1. (2) \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3, \quad E = 15 (75), \quad z^b = 9.9 (17.1) \\ 3. (4) \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 = 2\omega_3, \quad E = 15 (75), \quad z^b = 8.2 (14) \\ 5. (6) \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 = 2\omega_3, \quad E = 15 (75), \quad z^b = 7.6 (11.1) \\ 7. (8) \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad E = 15 (75), \quad z^b = 6.5 (16.6) \end{array} \quad (3.9)$$

и  $z > z^b$ . Как видно из фиг. 2, значения  $\mu$  на прямых  $B_1C_1$ ,  $C_2C_2$ ,  $B_3C_3$ ,  $B_4C_4$ ,  $C_5C_5$ ,  $C_6C_6$ ,  $A_1C_7$ ,  $A_2C_8$  соответствует пластинке оптимальной структуры по начальному „разрушению“.

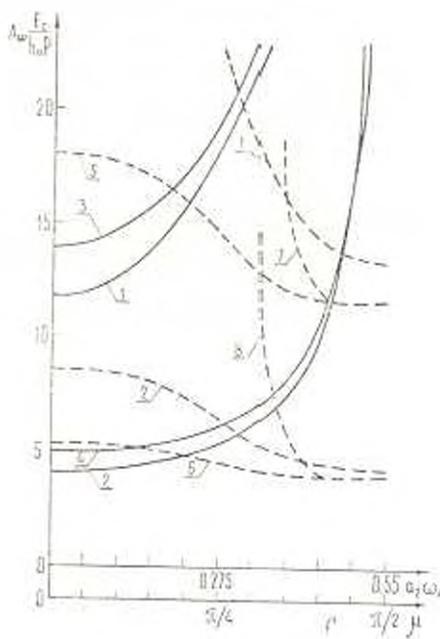
Пунктирные кривые на фиг. 2 соответствуют зависимостям параметра  $\mu$  от  $\mu$  при  $E = 75$  и параметрах 2) и 8) из (3.9). Из рассмотрения кривых на фиг. 2 видно, что (кривая  $E_1C_1A_1C_1$ ) для значений  $\mu$  на участке  $b_1C_8$  пластинка начинает „разрушаться“ от нормальных напряжений в связующем —  $\bar{\sigma}_0$  на окружностях  $r = r_0$ ,  $z = \pm h_0$  на участке  $C_1A_1$  — от нормальных напряжений в связующем —  $\bar{\sigma}_0$  на окружностях  $r = r_0$ ,  $z = \pm h_0$  и на участке  $A_1C_1$  — от сдвиговых напряжений в связующем —  $\bar{\tau}_0$  на окружности  $r = R_0$  и  $z = 0$ . При этом на участке  $C_1A_1$  при  $\mu > \mu^*$  пластинка не является оптимальной по начальному „разрушению“, а тем самым и распределение напряжений будет нерациональным. Однако, при  $\mu > \mu^* = 4$  и восьмом варианте параметров из (3.9)  $\lambda > 1$ , но это противоречит утверждению [3], что при  $\lambda < 1$  распределение напряжений является рациональным.

Результаты, приведенные из фиг. 2, 3, позволяют сделать выводы: а) использование модели армированного слоя из [6] (соотношения (1.3) — (1.6)) позволяет определить не только вид начального „разрушения“ и координаты, в которых оно начинается в зависимости от структуры армирования пластинки, но и такую структуру армирования, при которой нагрузка начального „разрушения“ является наибольшей; б) при создании материала армирования и связующего целесообразно добиваться увеличения относительной прочности армиатуры выше величины  $\bar{\sigma}_0$ , так как это не приводит к увеличению нагрузки начального „разрушения“ пластинки; в) пластинка, оптимальная по начальному „разрушению“, является и рациональной с точки зрения распределения напряжений, поэтому утверждение [3], что при  $\lambda \geq 1$  пластинка имеет рациональное распределение напряжений не всегда справедливо.

На фиг. 3 приведена зависимость  $A$  от  $a_2\omega$ , при параметрах (3.3)—(3.5) (сплошные кривые) и от угла армирования—при параметрах (3.9) (штриховые линии).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Как видно из фиг. 3, для рассматриваемых значений параметров, пластинка будет рациональной с точки зрения жесткости, если вся арматура уложена в кольцевом направлении. При этом величина максимального прогиба рациональной пластинки может быть существенно ниже (на порядок и более) по сравнению с максимальным прогибом пластинки с нерациональной структурой.

Институт гидродинамики  
СО АН СССР

Поступила 29 V 1972

ՀԱՅ. Պ. ԱՄԵՐԻԿԱԿԱՆ Բ. Ս. ՈՅՏԱՆԻՈՎ

ԱՐԹԱՎԱՐՎԱՆ ԿԼՐ ԵՎ ՈՂԱԿԱՅԻՆ ՍԱԿՐԻ  
ՍԿՐԻՆԱԿԱՆ ՔԱՅՔՈՅՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Վ. Ի. Ն. Փ. Ն. Մ.

Սափրի առանցքասիճևարիկ ծովան հափասարումների հիման վրա, որտեղ հաշիբ ևն ստնվում լաիահան սա՛րր, արմափորման ձևը ուսումնասիրվել են սալի սկզբնական բաշրայման հետ կառված հարցերը արմատաւրայի և կապող նյութի բաշրայման հաշվատումով:

Գրվել է կոնկրետ ղեպերի նամար լուծվել է ամրության և կոշտության տեսակետից կառուցվածի տարրերի մեխանիկական պարամետրերի և սայի արմատավորման ձևի բնութագրության ուղղությամբ բնույթի մասին խնդիրը:

Յույց է սրված, որ մեխանիկական և կազմային պարամետրերը նպաստողում են սայի բայրավման բնույթի վրա և ոչ բոլոր ղեպերում է նպաստակա նամար մեծացնել արմատորայի ամրությունը կոնստրուկցիայի կողմանակալայինը բարձրացնելու նամար:

## ON INITIAL FRACTURE OF REINFORCED CIRCULAR AND RING SHAPED PLATES

Yu. V. NEMIROVSKY, B. S. RESNIKOV

### S u m m a r y

The equations are derived for axisymmetric bending of circular plates, taking into account the structure of reinforcement and the effect of transversal shear. The mode of initial fracture is examined.

The cases of fracture in plates due to the action of transversal shear, normal stresses in matrix and elements of reinforcement are singled out. The initial fracture loads for these cases are determined.

Some problems of rational choice of mechanical parameters for elements of composition and structure of reinforcement in terms of strength and rigidity are formulated. A few specific examples are presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Тарнопольский Ю. М., Резн. А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. «Экспресс», Рига, 1969.
2. Резников Б. С., Немировский Ю. В. О некоторых особенностях деформирования изогнутых и плоских круглых армированных и ослабленных оболочек. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 25, № 4, 1972.
3. Ковалева В. И. Свойства анизотропные пластики и оболочки из армированных пластмасс. «Машиностроение», М., 1965.
4. Либардурия С. А. Теория анизотропных пластин. «Наука», М., 1967.
5. Терезилова И. Г. К построению точечных теорий пластин и оболочек. ПММ, т. XXVI, вып. 2, 1962.
6. Немировский Ю. В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя. ПМТФ, № 6, 1969.
7. Андрияшвили Г. А. Вискоупругое ориентирование стеклопластика. М., «Наука», 1966.
8. Физические и механические свойства стеклопластиков. Справочник под ред. Ю. М. Молчанова. Рига, «Экспресс», 1969.
9. «Современные композиционные материалы». Под ред. А. Браутмана, Р. Крока. М., «Мир», 1970.
10. Билибин И. И. К вопросу о гипотезах прочности. Вестник инженерной и технической, 1937, № 1.