

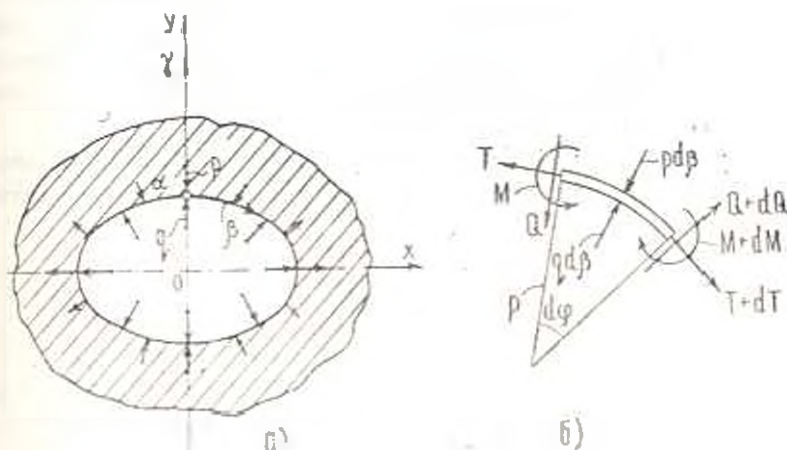
Г. Э. МИКАЕЛЯН

РАВНОВЕСИЕ ДЛИННОЙ ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ УПРУГОМ ОГРАНИЧЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассматриваются большие прогибы длинной ортотропной замкнутой по окружности цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением q .

Предполагается, что оболочка имеет выпуклое поперечное сечение двумя осями симметрии и по внешней поверхности связана со сплошной средой.

Считается, что нормальным перемещениям оболочки окружающая среда отвечает противодействием с интенсивностью p , пропорциональной этим перемещениям ($p = k\omega$), а на тангенциальные перемещения не реагирует, то есть считается, что среда является винклеровским основанием для оболочки. В такой постановке решены многие задачи устойчивости круговых цилиндрических и сферических оболочек, связанных с упругой средой по внешней или внутренней поверхности. Анализ этих работ приводится в обзорной статье [2].



Фиг. 1

1. Пусть длинная ортотропная упругая цилиндрическая оболочка нагружена равномерно распределенным внутренним давлением q и нормально приложенным к срединной поверхности $\gamma = 0$ противодействием окружающей среды P (фиг. 1, а).

Принимаются предположения классической теории оболочек и теории оболочек большого прогиба [1].

Считается, что в процессе деформации цилиндрическая форма срединной поверхности оболочки с двумя плоскостями симметрии не нарушается.

В силу принятых предположений для рассматриваемой гибкой оболочки получаются следующие уравнения и соотношения [1, 3].

Уравнения равновесия дифференциального элемента оболочки (фиг. 1б)

$$\frac{dT}{d\beta} + \frac{N}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{T}{r} - \frac{dN}{d\beta} = q - p \quad (1.2)$$

$$\frac{dM}{d\beta} = N \quad (1.3)$$

Для изгибающего момента M , внутренней силы T и кривизны деформированного элемента оболочки $\frac{1}{r}$ имеем:

$$M = Dv, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \quad (1.4)$$

$$T = C\epsilon, \quad C = \frac{Eh}{1-\nu_1\nu_2} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \kappa \quad (1.6)$$

где D и C — жесткости ортотропной оболочки на изгиб и на растяжение по направлению β , E — модуль упругости по главному направлению упругости β , ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона по главным направлениям α и β , R и h — радиус и толщина оболочки.

Тангенциальная деформация ϵ и изменение кривизны κ срединной поверхности оболочки выражаются через перемещения v и w следующим образом:

$$\epsilon = \frac{dv}{d\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 + \frac{w}{R} \quad (1.7)$$

$$\kappa = - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R} \quad (1.8)$$

Из системы уравнений (1.1)–(1.3), согласно (1.4), получим

$$T = T_0 - D \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{dw}{d\beta} d\beta \quad (1.9)$$

$$\frac{T}{r} - D \frac{d^2w}{d\beta^2} = q - kw \quad (1.10)$$

где T_0 — постоянная интегрирования

Значение T_0 определим из условия замкнутости оболочки

$$\int_0^l \frac{dv}{d\beta} d\beta = 0 \quad (1.11)$$

Здесь l — длина средней линии поперечного сечения оболочки.

Из (1.7) и (1.5) для $\frac{dv}{d\beta}$ получим

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{T}{C} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \quad (1.12)$$

Подставляя значения $\frac{dv}{d\beta}$ из (1.12) в (1.11) и учитывая (1.9), для T_0 будем иметь

$$T_0 = -\frac{1}{l} \int_0^l \left[D \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d^2 w}{d\beta^2} - \frac{Cw}{R} - \frac{C}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \right] d\beta \quad (1.13)$$

Уравнение равновесия оболочки (1.10), с учетом (1.6), (1.8), (1.9) и (1.13), приводится к виду

$$\begin{aligned} \Phi = & \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \left[D \int_{\beta_0}^{\beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2 w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2} \right) d \left(\frac{d^2 w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Cw}{R} + \frac{C}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \right] d\beta + \right. \\ & + D \int_{\beta_0}^{\beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2 w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2} \right) d \left(\frac{d^2 w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2 w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2} \right) + \\ & \left. + D \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{d^2 w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + kw - q = 0 \right. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Таким образом, определение нормальных перемещений оболочки сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.14).

2. Уравнение (1.14) будем интегрировать методом Бубнова—Галеркина.

Пусть радиус кривизны средней линии поперечного сечения оболочки имеет вид

$$R = R_0 (1 + \varepsilon_0 \cos \beta) \quad (2.1)$$

где

$$0 \leq \varepsilon_0 < 1, \quad \beta = \frac{4\pi}{l}, \quad l = 2R_0 \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \quad (2.2)$$

Согласно (2.1) параметрические уравнения кривой в декартовой системе координат xoy (фиг. 1, а) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\lambda} \left\{ \sqrt{\frac{1+\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}} \sin \frac{i\beta}{2} \right) \right. \\ y &= -\frac{2}{\varepsilon_0} \left\{ \sqrt{\frac{1-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}} \operatorname{Arsh} \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}} \cos \frac{i\beta}{2} \right) \right. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Интересно отметить, что при определенных значениях ε_0 (например, $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{3}$) кривая (2.3) практически не отличается от эллипса.

Решение уравнения (1.14) представим в виде

$$w = w_0 + f \cos i\beta \quad (2.4)$$

Представление (2.4) соответствует основному предположению о характере деформаций оболочки.

Согласно методу Бубнова—Галеркина необходимо выписать следующие уравнения:

$$\int_0^l \Phi d\beta^2 = 0, \quad \int_0^l \Psi \cos i\beta d\beta = 0 \quad (2.5)$$

Подставляя выражения R и w из (2.1) и (2.4) в (1.14) и выполняя интегрирование (2.5)*, получим следующую систему двух алгебраических уравнений относительно безразмерных параметров нормального перемещения оболочки γ_0 и $\bar{f}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\varepsilon_0^2 \eta_0^2 \gamma_0^2 + [2\varepsilon_0 (\eta^2 - 1) \eta^2] \gamma_0^2 + \left[\frac{1}{2} \eta^2 (\eta^2 - 1)^2 - 3\varepsilon_0^2 \eta \right] \gamma_0 \right\} \bar{f}^2 + \\ & + \left\{ \varepsilon_0 (6 - \eta^2) \gamma_0^2 - \left[\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\eta^2 - 1) \frac{\eta^2}{\varepsilon_0} - \frac{12}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2} \right) - \varepsilon_0 (\eta^2 - 1) \eta^2 \right] \gamma_0 - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_0} \right)^2 (\eta^2 - 1)^2 \bar{f}^2 + \left[(\bar{k} - f \eta) \gamma_0 + \frac{1}{2} (\eta^2 - 1) \frac{\eta}{\varepsilon_0} \right] \bar{f} - \bar{q} = 0 \quad (2.6) \\ & \left\{ -\varepsilon_0 \eta^3 (1 + \varepsilon_0^2) \gamma_0^3 - \frac{1}{2} (\eta^2 - 1) \eta^3 (1 + 3\varepsilon_0^2) \gamma_0^2 - 3\varepsilon_0 \eta \left[\frac{1}{4} \eta^2 (\eta^2 - 1)^2 - \eta^2 \right] \gamma_0 - \right. \\ & - \frac{1}{2} \eta (\eta^2 - 1) \left[\frac{1}{4} \eta^2 (\eta^2 - 1)^2 - 3\varepsilon_0 \right] \bar{f}^2 + \left\{ -\varepsilon_0 (\eta^2 + 6\varepsilon_0) \gamma_0^2 + \right. \\ & + \left[12 \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{2} \right) - (\eta^2 - 1) \eta^2 - 3\varepsilon_0 (\eta^2 - 1) \right] \gamma_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{4} \eta^2 (\eta^2 - 1)^2 + \right. \end{aligned}$$

* Некоторые интегралы вычислены при помощи рядов.

$$-9\epsilon^2(3-\epsilon) - 6\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \left| \bar{f} - \left[\left(\frac{f}{\epsilon_0} - \epsilon^2 \epsilon_0 \right) - \frac{6q}{\epsilon_0 \theta} \right] \gamma_0 - \frac{1}{2} \bar{k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \theta (\epsilon^2 - 1) \left(\epsilon_0 - \frac{f}{\epsilon_0^2} \right) + 12 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \frac{1}{\epsilon_0^2} \right] = 0 \quad (2.7)$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\epsilon = \frac{h}{R_0}, \quad \gamma_0 = \frac{w_0}{f} = \frac{\bar{w}_0}{\bar{f}}, \quad \epsilon_0 = \epsilon R, \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{h}, \quad \bar{f} = \frac{f}{h} \\ \bar{k} = k \frac{R_0^3 h}{D}, \quad \bar{q} = q \frac{R_0^3}{D}, \quad f = \frac{1}{2(1-\epsilon_0^2)} \left[\epsilon_0 \ln \frac{1-\epsilon_0}{1+\epsilon_0} - \ln(1-\epsilon_0^2) \right] \quad (2.8)$$

Подставляя в (1.9) значения T_n , $\frac{1}{\rho}$ соответственно из (1.13), (1.6), (1.8), с учетом (2.1) и (2.4) для безразмерного тангенциального усилия $\bar{T}$ получим

$$\bar{T} = T \frac{R_0^2}{D} = \left[\epsilon_0^2 \theta^2 \gamma_0^2 + \epsilon_0 \theta^2 (\epsilon^2 - 1) \gamma_0 + \frac{1}{4} (\epsilon^2 - 1) \theta^2 + 3\epsilon^2 \right] \bar{f} - \\ - \left[2 \left(\theta \ln \sqrt{1-\epsilon_0^2} + \frac{3\theta}{\theta} \right) \gamma_0 + 2 \frac{\theta}{\epsilon_0} (\epsilon^2 - 1) \ln \sqrt{1-\epsilon_0^2} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\theta}{2} \right) \frac{12}{\epsilon_0 \theta} \right] \bar{f} - \left[\frac{1}{\epsilon_0} \ln(1 + \epsilon_0 \cos \alpha \beta) + \right. \\ \left. + \bar{f} \theta (2\epsilon_0 \gamma_0 + \epsilon^2 - 1) \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \beta - \theta \gamma_0 \bar{f} \cos \alpha \beta \right] (2\epsilon_0 \gamma_0 + \epsilon^2 - 1) \theta \bar{f} \quad (2.9)$$

Решая систему уравнений (2.6) и (2.7), определим все расчетные величины задачи.

В частном случае ортотропной круговой цилиндрической оболочки, когда $\epsilon_0 = 0$, $\bar{f} = 0$, из (1.9) и (1.10), с учетом (1.6), (1.8), (1.13), (2.1), (2.4) и (2.8), получим соотношения, которые устанавливают простую связь между расчетными величинами ($\bar{q}$, $\bar{w}_0$, $\bar{T}$) оболочки

$$\bar{q} = \left(\frac{12}{\theta} + \bar{k} \right) \bar{w}_0 - 12 \bar{w}_0^2, \quad \bar{T} = \frac{12}{\theta} \bar{w}_0 \quad (2.10)$$

3. Рассмотрим численный пример.

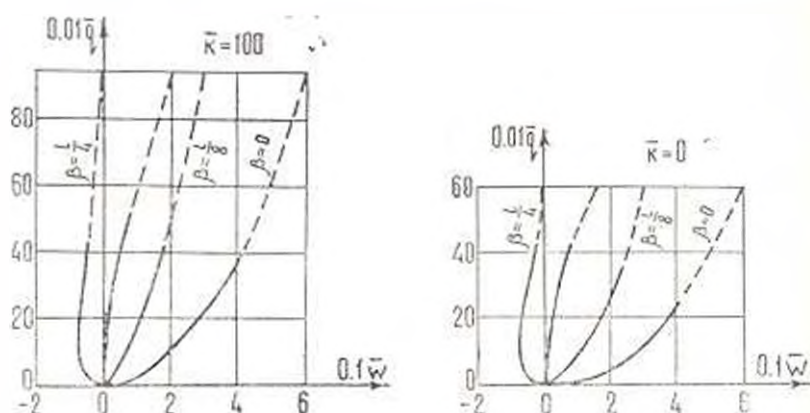
Пусть

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3}, \quad \theta = \frac{1}{50}$$

Отношение полуосей поперечного сечения рассматриваемой оболочки, согласно (2.3), равно 0.7935.

Покажем характер изменения закономерности $\bar{q} - \bar{w}$ для точек $\beta = 0$, $\beta = \frac{1}{8}$ и $\beta = \frac{1}{4}$ срединной поверхности оболочки при $\bar{k} = 0$ и при наличии окружающей среды с параметром $\bar{k} = 100$.

Задавая значение γ_0 , из (2.7) определим соответствующее значение $\bar{l}$. Далее по известным значениям γ_0 и $\bar{l}$ из (2.6) находим соответствующее значение нагрузки $\bar{q}$.



Фиг. 2.

На фиг. 2 приведены кривые зависимости «нагрузка—прогиб» для рассматриваемой оболочки и для круговой цилиндрической оболочки с параметром $\bar{\nu} = \frac{1}{50}$.

Сравнивая полученные кривые, замечаем, что и рассматриваемой задаче некруговая цилиндрическая оболочка, как и следовало ожидать, имеет весьма большую гибкость по сравнению с круговой. Это является результатом качественно отличающегося друг от друга поведения оболочек двух типов; некруговая цилиндрическая оболочка деформируется с интенсивным изменением формы поперечного сечения, а круговая — без изменения.

Что касается вопроса влияния окружающей среды, то, как показывают кривые, среда, в зависимости от коэффициента $\bar{k}$, может значительно ограничить нормальные перемещения оболочки, придавая ей дополнительную жесткость.

Հ. Չ. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ

ՄԵՆ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԿՈՒՆ ԴԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱԿԱՆԹԻ
ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՆԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ՏԱԿ, ՆՈՐՄԱԼ
ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐԻ ԱՌԱՋԴԱՐԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ս. մ. լ. ո. լ. ո. լ. ո.

Դիտվում են Սրբուտրոպ, ոչ շրջանային, առանցական, փակ դաշնային թաղանթի մեծ ճկվածքները հավասարաչափ բաշխված ներքին ճնշման տակ: Ենթադրվում է, որ թաղանթին ունի երկու առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ, ուռուցիկ լայնական կտրվածք և արտաքին մակերևույթով միացված է հոծ միջավայրի հետ: Ընդունվում է, որ միջավայրը հանդես է գալիս որպես վիճակային ձիճք:

Թաղանթի նորմալ տեղափոխումների սրոշման համար ստացված է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարում, որը լուծվում է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով:

Քվային սրինակում բացահայտվում են դիտվող խնդրում շրջանային և ոչ շրջանային դաշնային թաղանթների վարքերի սրակապին տարրեր բնորոշ կողմերը: Նշվում է, որ շրջապատող միջավայրը սահմանափակում է թաղանթի նորմալ տեղափոխումները՝ տալիս է նրան լրացուցիչ կոշտություն:

EQUILIBRIUM OF A LONG FLEXIBLE CYLINDRICAL SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE WITH ELASTIC LIMITATION ON NORMAL DISPLACEMENTS

H. Z. MIKHAELIAN

S u m m a r y

Large deflections of an orthotropic closed non-circular elastic cylindrical shell connected with Vinkler foundation along the external surface are examined.

To determine the normal shell displacements an integro-differential equation is obtained solved by Bubnov-Galyorkin's method.

An example is presented to show characteristic aspects of qualitatively different from one another modes of behaviour of non-circular and circular cylindrical shells in the problem under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алборцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974.
2. Иванов В. А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек. Казань, вып. 2, 1971.
3. Тимошенко В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., Наука, 1969.
4. Известия АН Армянской ССР. Механика, № 2