

А. В. ВАРДАНИН

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

На основе гипотез магнитоупругости, предложенных в работах [1, 2], выводятся уравнения магнитоупругих колебаний двух параллельных пластин, служащих проводниками равномерно распределенного электрического тока. Исследуется влияние физических параметров задачи на частоты колебаний.

1. Пусть две упругие бесконечные пластинки, каждая толщиной $2h$, расположены параллельно друг другу.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что плоскость (x, y) параллельна пластинкам и находится между ними на расстоянии a от срединной плоскости каждой пластинки.

Пластинки служат проводниками равномерно распределенного электрического тока, параллельного срединным плоскостям пластин.

Направления электрических токов в пластинках взаимно перпендикулярны. Ось x выбирается по направлению электрического тока в одной из пластин. Тогда ток в другой пластинке направлен либо по оси y , либо противоположно ей.

Магнитная и диэлектрическая проницаемости сред, окружающих пластинки, равны единице.

Упругие и электромагнитные свойства пластины предполагаются одинаковыми и характеризуются: жесткостью D , плотностью ρ , электропроводностью σ , магнитной проницаемостью μ , диэлектрической проницаемостью ϵ .

Обозначая напряженности электрического поля, обусловленные токами плотности J_1 и J_2 в пластинках, через E_1 и E_2 и решая соответствующую задачу магнитоэластики, найдем напряженности магнитного поля

$$H_x = \begin{cases} 4\pi hc^{-1} E_2 & \text{при } z > a + h \\ 4\pi(z - a)c^{-1} E_1 & \text{при } a - h \leq z \leq a + h \\ -4\pi hc^{-1} E_1 & \text{при } z \leq a - h \end{cases} \quad (1.1)$$

$$H_y = \begin{cases} -4\pi hc^{-1} E_2 & \text{при } z > a + h \\ -4\pi c^{-1}(z - a) E_2 & \text{при } -a - h \leq z \leq -a + h \\ 4\pi hc^{-1} E_2 & \text{при } z \leq -a - h \end{cases}$$

При движении пластин возникает индуцированное электромагнитное поле, которое будет описываться уравнениями электродинамики движущихся

ся проводящих сред для областей, занимаемых пластинами, и уравнениями электродинамики для вакуума в остальных областях. Указанные уравнения необходимо решать совместно с уравнениями движения пластин при общих граничных условиях на движущихся поверхностях пластин.

Линейные уравнения электродинамики принимаются при ограничениях работы [3], что, в частности, исключает материалы из сегнетоэлектриков, ферромагнетиков и сверхпроводников.

Уравнения электродинамики для областей, занимаемых пластинами

$$a - h \leq z \leq a + h \quad (s = 1) \quad \text{и} \quad -a - h \leq z \leq -a + h \quad (s = 2)$$

$$\frac{\partial h_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial h_{ys}}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_{xs} - \frac{\mu}{c} H_{oys} \frac{\partial u_{zs}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial h_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial h_{zs}}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(e_{ys} + \frac{\mu}{c} H_{oxs} \frac{\partial u_{zs}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial h_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial h_{xs}}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_{zs} + \frac{\mu}{c} \left(H_{nys} \frac{\partial u_{xs}}{\partial t} - H_{oxs} \frac{\partial u_{ys}}{\partial t} \right) \right]$$

$$\frac{\partial e_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial e_{ys}}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_{xs}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial e_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zs}}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_{ys}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial e_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xs}}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_{zs}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial h_{ys}}{\partial y} + \frac{\partial h_{zs}}{\partial z} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} \left(E_{oys} \frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial x \partial t} - E_{oxs} \frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial y \partial t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial e_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial e_{ys}}{\partial y} + \frac{\partial e_{zs}}{\partial z} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} \left(H_{oxs} \frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial y \partial t} - H_{oys} \frac{\partial^2 u_{zs}}{\partial x \partial t} \right) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_s$$

$$(s = 1, 2)$$

Уравнения электродинамики для вакуума —

$$\operatorname{rot} \vec{h}_s = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{e}_s = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}_s}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{h}_s = 0, \quad \operatorname{div} \vec{e}_s = 0, \quad (s = 3, 4, 5)$$

Здесь $\vec{h}_s (h_{xs}, h_{ys}, h_{zs})$, $\vec{e}_s (e_{xs}, e_{ys}, e_{zs})$ — векторы напряженностей индуцированного магнитного и электрического полей, ρ_s — плотность электрических зарядов, $\vec{u}_s (u_{xs}, u_{ys}, u_{zs})$ — вектор перемещения частиц пластины, $s = 3$ показывает принадлежность к области $|z| \leq a - h$, $s = 4$ — к области $z \geq a + h$, $s = 5$ — к области $z \leq -a - h$.

Объемные силы электромагнитного происхождения определяются в данной задаче по формулам

$$\Gamma_{zs} = \frac{u_s}{c} \left\{ B_s h_{zs} - \left[e_{zs} + \frac{u}{c} \left(H_{oyz} \frac{\partial u_{zs}}{\partial t} - H_{oxz} \frac{\partial u_{yz}}{\partial t} \right) \right] H_{oyz} \right\} - \gamma_s C_s \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{ys} = \frac{u_s}{c} \left\{ e_{zs} + \frac{u}{c} \left(H_{oyz} \frac{\partial u_{zs}}{\partial t} - H_{oxz} \frac{\partial u_{yz}}{\partial t} \right) \right\} H_{oxz} - C_s h_{zs} \Big| - \gamma_s B_s$$

где

$$B_1 = E_1, \quad B_2 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = E_2, \quad (s = 1, 2)$$

$$\Gamma_{z1} = \frac{u_1}{c} \left[H_{oy1} \left(e_{z1} - \frac{u}{c} \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} H_{oy1} \right) - H_{ox1} \left(E_1 - e_{y1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{u}{c} \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} H_{ox1} \right) - E_1 h_{z1} \right]$$

$$\Gamma_{z2} = \frac{u_2}{c} \left[H_{oy2} \left(E_2 + e_{z2} - \frac{u}{c} \frac{\partial u_{z2}}{\partial t} H_{oy2} \right) - H_{ox2} \left(e_{y2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{u}{c} \frac{\partial u_{z2}}{\partial t} H_{ox2} \right) - E_2 h_{y2} \right]$$

Уравнения (1.2) и (1.3) рассматриваются совместно с уравнениями движения пластин, учитывающими силы и моменты, обусловленные объемными силами (1.4).

2. В приведенной постановке решение задач магнитоупругости представляет значительные трудности. Использование гипотез магнитоупругости, предложенных и обоснованных в работах [1, 2], позволяет преодолеть эти трудности. Гипотезы магнитоупругости для данной задачи аналитически записываются следующим образом:

$$u_{1s} = [z - (-1)^s a] \frac{\partial v_s}{\partial x}, \quad u_{2s} = [z - (-1)^s a] \frac{\partial v_s}{\partial y}, \\ u_{zs} = v_s(x, y, t), \quad e_{xs} = \tau_s(x, y, t), \quad e_{ys} = \tau_s(x, y, t) \quad (2.1) \\ h_{zs} = f_s(x, y, t), \quad (s = 1, 2)$$

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля определяются из уравнений (1.2) через функции τ_s , f_s , ..., h_{xs} , h_{ys} , h_{zs} в следующем виде:

$$h_{xs} = \frac{h_{xs}^+ + h_{xs}^-}{2} + [z - (-1)^s a] \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} - \frac{4\pi z}{c} \tau_s \right) + \\ + \frac{(-1)^{s-1}}{2^{s-1}} \left(\frac{4\pi z}{c} \right)^s \frac{\pi}{c} E_1 \left[|z - (-1)^s a|^3 h^{s-1} - \frac{h^s}{2} (1 - (-1)^s) \right] \frac{\partial v_s}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 h_{ys} &= \frac{h_{ys}^+ + h_{ys}^-}{2} + [z + (-1)^s a] \left(\frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{4\pi z}{c} \varphi_s \right) - \\
 &- \frac{1}{2^{s-1}} \left(\frac{4\pi z}{c} \right)^2 \frac{y}{c} E_s \left\{ [z + (-1)^s a]^s h^{2s-2} - \frac{h^2}{2} [1 + (-1)^s] \right\} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \\
 &e_{zs} = \frac{cM_s}{4\pi z} - \frac{4\pi z \mu}{c^2} \left\{ h E_s \frac{3^{s-1} [z + (-1)^s a]^s - \frac{h^2}{2} [1 + (-1)^s]}{2^{s-2}} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x \partial t} - \right. \\
 &- E_1 \frac{(-1)^s 3^{2-s} [z + (-1)^s a]^{3-s} - \frac{h^2}{2} [1 - (-1)^s]}{2^{2-s}} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y \partial t} \left. \right\} - \\
 &- [z + (-1)^s a] \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$h_{ys}^+, h_{ys}^-, h_{qs}, h_{ys}^-$ — значения компонентов h_{ys}, h_{ys} при $z = (a - h)(-1)^{s+1}$ соответственно;

$$M_s = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_{ys} - h_{ys}^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_{ys} - h_{ys}^-}{2} \right)$$

Осредняя уравнения (1.2) по z так, как это делается в работах [1, 2], и присоединяя уравнения движения пластин, получим следующие уравнения, определяющие неизвестные функции $\varphi_s, \varphi_s, f_s, \omega_s$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{4\pi z}{c} \varphi_s &= (-1)^{s+1} \frac{h_{ys} - h_{ys}^-}{2h} + \left(\frac{4\pi z}{c} \right)^2 \frac{h\mu}{c} G_s \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \\
 \frac{\partial f_s}{\partial x} - \frac{4\pi z}{c} \varphi_s &= (-1)^{s+1} \frac{h_{ys} - h_{ys}^-}{2h} + \left(\frac{4\pi z}{c} \right)^2 \frac{h\mu}{c} G_s \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \\
 \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} &= -\frac{2}{c} \frac{\partial f_s}{\partial t}, \quad G_1 = E_s, \quad G_2 = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = E_1 \\
 D\Delta^2 \omega_s - 2\mu h \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial t^2} &= R_s + \frac{\partial m_{ys}}{\partial x} + \frac{\partial m_{qs}}{\partial y}, \quad (s = 1, 2)
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь R_s, m_{ys}, m_{qs} — нормальная сила и моменты, обусловленные объемными силами электромагнитного происхождения (1.4), в рассматриваемом случае определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 R_{ys} &= \frac{2(-1)^s \pi z h}{c} \left\{ \frac{h_{ys}^+ + h_{ys}^-}{2} E_s - \frac{(-1)^s 4\pi z h}{c} A_s \left[\frac{1 - (-1)^s}{2} \varphi_s + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{1 - (-1)^s}{2} \varphi_s - \frac{4\pi z h}{c^2} A_s \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
m_{x,s} &= -\frac{8\pi\mu^2 h^4}{3c^2} A_s \left(\frac{\partial z_s}{\partial x} + \frac{\partial y_s}{\partial y} + \frac{4\pi\mu h\mu}{c^2} A_s \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial x \partial t} \right) \\
m_{y,s} &= \frac{8\pi\mu^2 h^4}{3c^2} E_s \left(\frac{cM_s}{4\pi c} + \frac{4\pi\mu h^2}{5c^2} E_s \frac{\partial^2 \omega_s}{\partial y \partial t} \right) + \frac{zh}{4\pi} (e_{zs}^+ - e_{zs}^-) E_s - \frac{M_s 2h^2 c}{(4\pi)^{2/3}} E_s + \frac{z(c\mu - 1)}{c^2} E_s^2 \frac{2}{3} h^3
\end{aligned} \quad (2.4)$$

$$A_1 = E_y, \quad A_2 = -E_1, \quad (x_1 = x, \quad x_2 = y), \quad (y_1 = y, \quad y_2 = x), \quad (s = 1, 2)$$

Уравнение (2.3) необходимо решать совместно с уравнениями (1.3) при общих граничных условиях на поверхностях раздела сред $z = a + h$, $a - h$, $-a + h$, $-a - h$. На поверхности раздела $z = a - h$ эти условия согласно работе [3] имеют вид

$$h_{x1} = h_{x3}, \quad h_{y1} = h_{y3}$$

$$h_{x1} = \frac{1}{\mu} h_{x3} + (\mu - 1) \frac{4\pi zh}{c} E_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - (\mu - 1) \frac{4\pi zh}{c} E_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$e_{x1} = e_{x3} - \frac{\mu(\mu - 1) 4\pi h z}{c^2} E_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial t}, \quad e_{y1} = e_{y3} + \frac{\mu(\mu - 1) 4\pi h z}{c^2} E_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t}$$

$$e_{x1} = \frac{1}{\mu} e_{x3} + E_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y}$$

Аналогичным образом записываются граничные условия на остальных поверхностях раздела.

3. Рассмотрим задачу колебаний двух параллельных токонесящих пластин в случае, когда $\varepsilon = \mu = 1$. Представляя решения (2.3) и (1.3) в виде

$$\begin{aligned}
Q_s &= Q_s \exp i(\omega t - k_x x - k_y y), \quad Q_{10} = \text{const}, \quad (s = 1, 2) \\
Q_s &= Q_{s0}(z) \exp i(\omega t - k_x x - k_y y), \quad (s = 3, 4, 5)
\end{aligned} \quad (3.1)$$

где Q_s — любая из искоемых функций, входящих в уравнения (2.3) и (1.3), получим обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $Q_{s0}(z)$ ($s = 3, 4, 5$). Решая эти уравнения и удовлетворяя граничным условиям на поверхностях раздела типа (2.5) и условиям затухания на бесконечности, после преобразований получим следующую систему уравнений относительно амплитуд прогибов колебаний ω_{10} и ω_{20} :

$$\begin{aligned}
\left\{ \Omega^2 + \left[\alpha_2 \beta_0 E_1 E_2 + (\alpha_1 \beta_0 + \alpha_2) E_1^2 \frac{\alpha_2 k_1^2 h^2}{15} E_1^2 \right] \Omega + 1 + \alpha_1 E_1^2 \right\} \omega_{10} + \\
+ (\alpha_2 \alpha_4 E_1^2 + \alpha_1 \alpha_4 E_1 E_2) \Omega \omega_{20} = 0 \\
(\alpha_2 \alpha_7 E_2^2 + \alpha_1 \alpha_7 E_1 E_2) \Omega \omega_{10} +
\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$+ \left\{ \Omega^2 + [\alpha_2 \alpha_7 E_1 E_2 + (\alpha_1 \alpha_7 + \alpha_2) E_1^2 + \frac{\alpha_2 k_2^2 h^2}{15} E_2^2] \Omega + 1 + \alpha_2 E_2^2 \right\} \omega_{20} = 0$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma = \sqrt{n - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad n = k_1^2 + k_2^2, \quad \Omega_0^2 = \frac{Dn^2}{2\gamma h}, \quad \Omega = \frac{\omega i}{\Omega_0},$$

$$\alpha_2 = \frac{S}{R}$$

где

$$S = A_1 + c k_1 [z_1 h \gamma (\omega + 4\pi z i) + z_1 [(4\pi z h \gamma i - h \omega - \omega) e^{2(a-h)\gamma} +$$

$$+ 8\pi \omega h^2 \gamma^2 i \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma]]$$

$$R = \omega (8\pi z h \gamma i - \omega e^{2(a-h)\gamma}) + 2(4\pi z h \gamma)^2 \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma$$

$$\varphi_2 = -\frac{n}{k_2 \gamma \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma} \left\{ \gamma^2 \left(1 + \frac{k_1^2 c^2 i}{4\pi z \omega} \right) (z_3 + z_1 e^{-2(a-h)\gamma}) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{n c^2 i}{4\pi z \omega} \right) \left(k_1 \varphi_3 - \frac{4\pi z i}{c} \sigma_3 \right) \frac{2 k_1 k_2 \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma}{e^{2(a-h)\gamma}} \right\}$$

$$\alpha_1 = \frac{n}{\gamma \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma} \left\{ \frac{2\omega}{c} \left(1 + \frac{n c^2 i}{4\pi z \omega} \right) \left(1 + \frac{4\pi z h \gamma i}{\omega} \right) z_3 \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{c^2 \gamma^2 i}{4\pi z \omega} + \frac{\omega^2 h^2}{3c^2} \right) k_1 \alpha_1 + \left[\left(\frac{\omega i}{4\pi z} - \frac{\omega^2 h^2}{3c^2} + 1 \right) e^{2(a-h)\gamma} - \right. \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{n c^2 i}{4\pi z \omega} \right) (e^{2(a-h)\gamma} + 2h\gamma \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma) \right] k_1 z_3 \Big\} \quad (3.3)$$

$$z_2 = \frac{2nhci}{\Omega_0} \left[\frac{ck_2}{\omega} (e^{2(a-h)\gamma} + 2h\gamma \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma) z_3 + \frac{ck_1}{\omega} \left(\frac{h^2 \omega^2}{c^2} + 1 \right) z_4 + \right.$$

$$\left. + \left(e^{2(a-h)\gamma} - \frac{8\pi z h \gamma i \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma}{\omega} \right) z_5 \right]$$

$$z_6 = -\frac{2nh i}{k_2 \Omega_0} (c k_1 z_5 + \omega z_3), \quad A_3 = 0, \quad A_j = \frac{\omega n}{c \gamma \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma}, \quad (j = 2, 3)$$

$$c_1 = \left(\frac{4\pi z}{c} \right)^3 \frac{zh^2}{c^3 \gamma}, \quad \sigma_2 = \left(\frac{4\pi z}{c} \right)^2 \frac{zh^2}{c^2 \gamma \Omega_0}, \quad z_j = \frac{h k^2}{2\pi n \gamma i}, \quad (j = 1, 2)$$

$$\sigma_3 = \frac{k_2 c^2 (c^2 \gamma e^{2(a-h)\gamma} + 8\pi z \omega i + 2nhc^2) \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma}{n [(c^2 \gamma e^{2(a-h)\gamma} + 8\pi z \omega i + 2nhc^2)^2 - c^4 \gamma^2]}$$

$$\sigma_4 = \frac{k_2 c^4 \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma}{n [(c^2 \gamma e^{2(a-h)\gamma} + 8\pi z \omega i + 2nhc^2)^2 - c^4 \gamma^2]}$$

$$\beta_3 = -\frac{k_1}{k_2} \sigma_4, \quad \beta_4 = -\frac{k_1}{k_2} z_3$$

Остальные искомые величины выражаются через ω_1 и ω_2 . Приведем некоторые из них:

$$f_1 = \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{2h^2 n \omega}{c} (a_1 E_1 \omega_2 + \beta_1 E_2 \omega_1)$$

$$f_2 = \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{2h^2 n \omega}{c} (a_2 E_1 \omega_1 + \beta_2 E_2 \omega_2)$$

Приравняв детерминант (3.2) нулю, получим характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний.

В общем случае характеристическое уравнение оказывается трансцендентным.

4. Для простоты рассмотрим задачу в случае, когда колебания не зависят от координаты y . Тогда система уравнений (3.2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & [\Omega^2 + \gamma_1 E_1^2 (1 - 4\pi\gamma_1) \Omega + 1] \omega_{10} + \alpha_2 (p\gamma_2 - q_2\gamma_1) E_1^2 \Omega \omega_{20} = 0 \\ & \left| \frac{p\gamma_1 \Omega_0^2}{\gamma_1^2} \Omega^2 - \left(q_2\gamma_1 + \frac{\gamma_1 k_1^2 c^2 p}{4\pi\gamma_1} \right) \Omega \Omega^2 + \frac{c^2 \gamma_1 q_2 k_1^2}{4\pi\sigma} \Omega \right| \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} E_2^2 \omega_{10} = (3.4) \\ & + \left| 1 + (1 - \gamma_1\gamma_1 E_1^2) \Omega^2 + \gamma_1 \left(E_1^2 + \frac{h^2 k_1^2}{15} E_2^2 \right) \Omega + \frac{h}{2\pi k_1^2 D} E_2^2 \right| \omega_{20} = 0 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= q_1/(q_1^2 - q_2^2), \quad \gamma_2 = q_2/(q_1^2 - q_2^2), \quad \gamma_3 = q_3 \left/ \left(q_3^2 + \frac{\omega^2}{\gamma_1^2} q_2^2 \right) \right. \\ \gamma_4 &= q_2 \left/ \left(q_3^2 + \frac{\omega^2}{\gamma_1^2} q_2^2 \right) \right., \quad \gamma_1^2 = k_1^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad p = \frac{\gamma_1}{2h} (\operatorname{cth} 2(a-h)\gamma_1 - 1) \\ q_2 &= \frac{\omega i}{2h\gamma_1} (1 + \operatorname{cth} 2(a-h)\gamma_1) - 4\pi\sigma, \quad \Omega_0^2 = \frac{k_1^2 D}{2\gamma_1 h}, \quad \Omega = \frac{\omega i}{\Omega_0} \\ q_1 &= k_1^2 + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \Omega_0 \Omega + \frac{\gamma_1}{2h} (1 + \operatorname{cth} 2(a-h)\gamma_1), \quad q_2 = \frac{\gamma_1}{2h \operatorname{sh} 2(a-h)\gamma_1} \end{aligned}$$

Остальные искомые величины выражаются через ω_1 и ω_2 . Приведем некоторые из них:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{hk_1 \omega}{c} \gamma_2 E_1 \omega_2, & f_2 &= -\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{hk_2 \omega}{c} \gamma_1 E_1 \omega_2 \\ \varphi_1 &= -\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{hi\omega\gamma_1 E_2 \omega_{11}}{c}, & \varphi_2 &= \left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2 \frac{\omega^2 h}{\gamma_1^2} \gamma_1 E_2 \omega_1 \end{aligned}$$

Приравняв детерминант системы (3.4) нулю, получим характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний. Пренебрегая ω^2/c^2 по сравнению с k_1^2 и предполагая $2(a-h)k_1 \gg 1$, то есть предполагая, что расстояние между пластинами намного больше длины волны, рассмотрим частные случаи.

а) При $E_0 = 0$ характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний, распадается на два уравнения

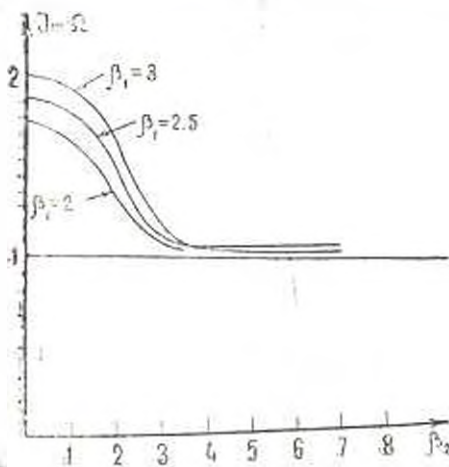
$$\Omega^2 + 1 = 0$$

$$\Omega^3 + \beta_0 \Omega^2 + (1 + \beta_1) \Omega + \beta_2 = 0 \quad (3.5)$$

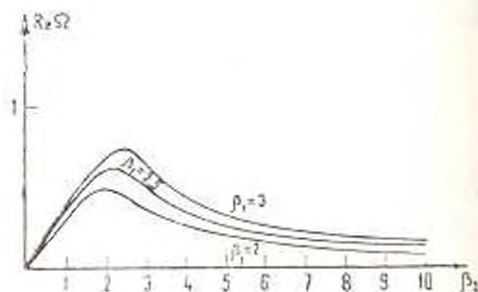
$$\beta_1 = \frac{4\pi h k_2 (k_2 h + 1)}{c^2 \rho \Omega_0^2} J_1, \quad \beta_2 = \frac{k_0 (k_2 h + 1) c^2}{4\pi h \Omega_0}$$

Первое уравнение из (3.5) показывает, что колебания первой пластины не зависят от электрического поля, то есть отсутствует взаимодействие между пластинами.

Характеры изменения частоты колебания и коэффициента затухания второй пластины в зависимости от изменения проводимости β_2 и плотности электрического тока β_1 приведены на фиг. 1, 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из фиг. 1 видно, что частота колебания второй пластины имеет максимум при $\beta_2 = 0$ ($\sigma \rightarrow \infty$) и уменьшается при возрастании β_2 (уменьшение σ). При $\beta_2 \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow 0$) частота колебания стремится к частоте собственного колебания пластины.

Увеличение плотности тока β_1 приводит как к увеличению, так и к уменьшению частоты колебания в зависимости от значения β_2 .

Из фиг. 2 видно, что коэффициент затухания вначале возрастает с возрастанием β_2 , достигает максимума при определенном значении β_2 , затем уменьшается и в пределе стремится к нулю при $\beta_2 \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow 0$).

Численное решение второго уравнения из (3.5) показывает, что коэффициент затухания возбужденного электромагнитного поля возрастает с возрастанием β_2 (уменьшением σ).

б) При $E_0 = 0$ характеристическое уравнение, определяющее частоты колебаний, распадается на два уравнения

$$\Omega^2 + 2\delta\Omega + \gamma = 0 \quad (3.6)$$

$$\Omega^2 + 2(1 - \beta)\Omega + \Omega_0^2 = 0$$

где

$$\beta = \beta_2 \frac{h^2 k_2^2}{30} E_2^2, \quad \gamma = 1 - \frac{h E_2^2}{2 k_2^2 D}, \quad \alpha = \frac{4\pi shk_0}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{4\pi h}{c^2 k_0} f^2$$

Первое уравнение из (3.6) определяет колебания и затухания второй пластины. Его решение показывает, что при $\delta^2 < \gamma$ затухание возмущения в пластине имеет колебательный характер с частотой $(\gamma - \delta^2)^{1/2} \Omega_0$ и коэффициентом затухания $\delta \Omega_0$.

При $\delta^2 \geq \gamma$ возмущения затухают без колебаний с коэффициентом затухания $[\delta + (\delta^2 - \gamma)^{1/2}] \Omega_0$.

Считаю долгом выразить благодарность участникам семинара «Электродинамика сплошных деформируемых сред» за обсуждение настоящей работы и ценные замечания.

Ереванский армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Получила 2 X 1975

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆԻԱՆ

ԵՐԿՐՈՒ ԶՈՒՊԱԼՆԵՐ ԶՈՍԱՆՔԱՍԱՐ ՍՍԼԵՐԻ
ՄԱԳՆԵՏԱՍՏԱՏՈՒԿԱԿԱՆ ՏՈՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ս. Վ. Վ Ի Վ Ա Ն Ի Ա Ն

Դիտարկվում են երկու զուգահեռ հոսանքատար առավելագույն սալեր, որոնք գտնվում են միմյանցից որոշակի հեռավորության վրա:

Էլեկտրական հոսանքների սղղությունները սահիում միմյանց ուղղահայաց են և զուգահեռ են սալերի միջին մակերևույթներին:

Բարակ մարմինների համար մագնիսատատվականության վարկածների հիման վրա ստացվում են սալերի մագնիսատատվական տատանումների հաճախարումները: Ստացված է խնդրին համապատասխանող խառակտրիստիկ նախաարումը, որը հանդիսանում է տատանումների հաճախականությունների որոշման համաարումը: Այդ համաարումը ուսումնասիրված է սարրեր մասնավոր դեպքերում:

Բերվում են բվային արդյունքներ:

MAGNETOELASTIC VIBRATIONS OF TWO PARALLEL CURRENT-CARRYING PLATES

L. V. VARDANIAN

S u m m a r y

On the basis of magnetoelasticity hypothesis the equations for magnetoelastic vibrations of two parallel current-carrying plates are de-

duced. The directions of the electric currents in the plates are perpendicular.

The frequency of oscillations and the law of damping, depending on electric current density, are defined for a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Вадасарян Г. Е., Бельбескиан М. В. К граничным задачам магнитоупругих колебаний пластины. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. Амбарцумян С. А., Вадасарян Г. Е., Бельбескиан М. В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. Бельбескиан М. В. К уравнениям магнитоупругости токонесущих пластин. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 2.