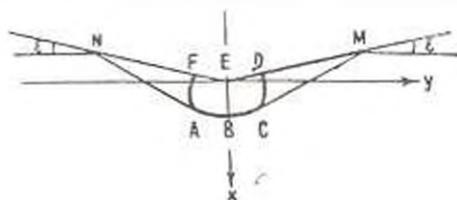


Ա. Դ. ԱՅԱՏՅԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

## ПРОНИКНОВЕНИЕ КЛИНА В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩУЮ ЖИДКОСТЬ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматривается задача о проникании тупого клина в идеальную электропроводящую сжимаемую жидкость со свободной поверхностью, занимающую полупространство, при наличии сильной ударной волны и начального магнитного поля, параллельного невозмущенной свободной поверхности. Для случая слабой магнитогазодинамической волны аналогичная по математической постановке задача о проникании клина в сжимаемую жидкость решена в [1]. При параллельности начального магнитного поля невозмущенной поверхности жидкости, как показано далее, силовые линии магнитного поля не проходят во внутрь клина ( $B_n = 0$  на клине) и поэтому задача может быть решена независимо от поля внутри клина. Для этой задачи система координат выбирается так, чтобы начало координат находилось в вершине клина, направление движения клина совпадало с положительным направлением оси  $x$ , а ось  $y$  была бы параллельна свободной поверхности. Каждая сторона клина образует с осью  $y$  малый угол  $\varepsilon$  (фиг. 1). Скорость



Фиг. 1.

проникания клина  $V$  предполагается такой, чтобы скорость точки пересечения клина с осью  $y$   $\frac{V}{c_0} \gg 1$ , где  $c_0$  — скорость возмущений в жидкости.

Тогда свободная поверхность вне клина будет невозмущена и, кроме того, темп в дифракционной области  $ABCDEF$ , то есть в области влияния вершины, будет мало отличаться от постоянного течения за плоскими ударными волнами  $MC$  и  $MA$ , которое, в свою очередь, мало отличается от одномерного.

**Постановка задачи.** Обозначим через  $U^0$  скорость ударной волны и выбранной системе координат, индексом «0» обозначим параметры исходной невозмущенной жидкости, а индексом «1» — параметры жидкости в области постоянного течения за ударной волной.

Хотя метод решения задачи годится для произвольного магнитного поля, но для получения обозримых значений для параметров ударной волны и аффективного конформного отображения предполагается, что началь-

ное магнитное поле  $B_0$  мало, то есть все параметры за ударной волной ищутся в виде

$$P_1 = P_1' + a_1^2 P_{00}, \quad \rho_1 = \rho_1' + a_1^2 \rho_{00}, \quad g_1 = g_1' + a_1^2 g_{00}, \quad U^* = U_0 + a_1^2 U \quad (1)$$

$$c_1 = c_1' + a_1^2 c_0, \quad \varepsilon = \varepsilon' + a_1^2 \varepsilon_0$$

где

$$a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\sigma_0} \quad (\text{малый параметр})$$

Здесь  $U_0$  и  $\varepsilon'$  — скорость и угол наклона ударной волны к клину в обычной газодинамике,  $P_1'$ ,  $\rho_1'$ ,  $g_1'$  удовлетворяют соотношениям, выполняющимся для косоугольного скачка в обычной газодинамике [2].

Разрешая эти соотношения, получаем

$$P_1 = \frac{[(\gamma-1)M-1] \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16} [(3\gamma-1)M+1] \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{16\gamma M^2} \rho_0 V_0^2$$

$$\rho_1 = \frac{(\gamma+1)M-1 \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M+1 \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}} \rho_0, \quad g_1 = V_0 (\varepsilon + \varepsilon') \quad (2)$$

$$c_1 = \frac{[(\gamma-3)M-1] \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16} [(3\gamma-1)M+1] \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{4M} V_0$$

$$U_0 = \frac{(\gamma-3)M+1 \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{4M} V_0$$

Соотношение  $V_0 \cos \varepsilon = U_0 \cos \varepsilon'$  дает

$$\varepsilon' = \frac{(\gamma-3)M+1 \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{4M} \varepsilon$$

Здесь  $M = \frac{V_0}{c_0}$  — число Маха.

Если пренебречь членами порядка  $a_1^2$ , то  $P_1'$ ,  $\rho_1'$ ,  $c_1'$ ,  $U_0$  не будут зависеть от  $\varepsilon$ .

Подставляя (1) в соотношения, выполняющиеся на поверхностях сильного разрыва в магнитной газодинамике [3] и пренебрегая членами, порядок которых превышает  $a_1^2$ , получаем следующую систему уравнений для определения  $P_{10}$ ,  $\rho_{10}$ ,  $g_{10}$ ,  $U$ ,  $B_{1n}$ ,  $B_{1\tau}$  ( $n$  — внешняя нормаль,  $\tau$  — положительное направление к ударной волне):

1.  $B_{1n} = B_0 (\varepsilon + \varepsilon')$
2.  $\rho_1 U + U_{000} - \rho_0 U = 0 \quad (3)$
3.  $P_{10} + \rho_0 U^2 - \frac{\rho_1'^2 - \rho_0^2}{2\rho_0} = 0$

$$\begin{aligned}
 4. & \{(\gamma_0 - \gamma_1)(U V_0 + 1) - \gamma_0 U_0 V_0\}(\varepsilon + \varepsilon') + \gamma_1 V_0 U_0 \varepsilon \varepsilon' = \gamma_1 U_0 g_{00} \\
 5. & B_{11} = \frac{\gamma_1 B_0}{\gamma_0} \\
 6. & \frac{(\gamma_0 - \gamma_1)(1 - U V_0)}{\gamma_0} - \frac{\gamma P_{00}}{(\gamma - 1)\gamma_1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_{11} \gamma_0}{\gamma^2} = 0
 \end{aligned} \quad (3)$$

Линеаризация соотношения  $V_0 \operatorname{cosec} \varepsilon = U^0 \operatorname{cosec} \varepsilon'$  дает

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon U}{V_0} \quad (3')$$

Решение системы (3) следующее:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{2M \{ |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| - (\gamma - 1)M \}}{|(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16| V_0} \\
 \gamma_0 &= \frac{32M^3 \{ |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| - (\gamma - 1)M \}}{|(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|^2 |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16| V_0^2} \gamma_0 \\
 P_{00} &= -\frac{4M \{ (\gamma^2 - \gamma - 2)M^2 + \gamma M |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| - 8 \}}{[(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|^2 |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16|] \gamma_0} \\
 g_{00} &= \frac{2M \{ (\gamma - 1)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| \varepsilon}{|(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16| V_0} \\
 B_{11} &= \frac{(\gamma - 1)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|}{4M} B_0 \\
 B_{12} &= \frac{(\gamma + 1)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|}{(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|} B_0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношение (3') дает

$$\varepsilon_0 = \frac{2M \{ |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| - (\gamma - 1)M \} \varepsilon}{|(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|^2 |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16| V_0}$$

Для  $\varepsilon$  имеем

$$\varepsilon = \frac{A}{B}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= 8(\gamma - 1)M^2 \{ |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| - (\gamma - 1)M \} \\
 B &= |(\gamma - 3)M + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|^2 \{ |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16| \\
 &\quad + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16| \} |(\gamma - 1)M \\
 &\quad + |(\gamma + 1)^2 M^2 + 16|^2 |(\gamma + 1)^2 M^2 - 16| V_0
 \end{aligned}$$

Как видно из формул (1) и (4), в области постоянного течения за ударной волной  $P_1 < P_0$ , то есть при наличии магнитного поля давление уменьшается.

Определим  $B_{2z}$  и  $B_{1z}$  в области постоянного течения

$$B_{1z} = B_{1z} + B_{1z} (\varepsilon - \varepsilon'), \quad B_{1z} = -B_{1z} (\varepsilon + \varepsilon') + B_{1z}$$

Отсюда имеем

$$B_{1z} = - \frac{(\gamma + 1) M + 1}{(\gamma - 3) M + 1} \frac{\overline{(\gamma + 1)^2 M^2 + 16}}{\overline{(\gamma + 1)^2 M^2 + 16}} B_0$$

$$B_{1z} = \frac{(\gamma + 1) M + 1}{(\gamma - 3) M + 1} \frac{\overline{(\gamma + 1)^2 M^2 + 16}}{\overline{(\gamma + 1)^2 M^2 + 16}} B_0$$

Проекция вектора  $B_1$  на нормаль к клину равна  $B_{1N} = B_{1z} + B_{1y} = 0$ , где  $N$  — нормаль к клину, то есть вектор  $B_1$  за ударной волной параллелен клину.

#### Условия в области неравномерного течения

а) Уравнения движения. В области неравномерного течения всем параметрам будем приписывать значок 2. Вводя конические координаты

$\xi = \frac{x}{c_1 t}$ ,  $\eta = \frac{y}{c_1 t}$  (поля давлений и скоростей зависят только от отношения  $\frac{x}{ct} \cdot \frac{y}{ct}$ ), вариацию давления и магнитного поля

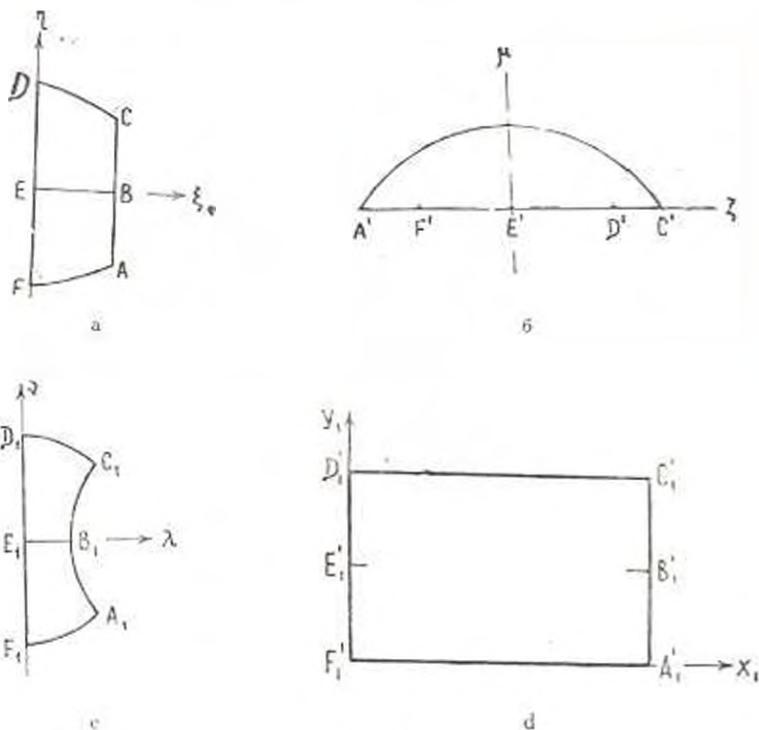
$$p = \frac{P_2 - P_1}{c_1 \partial_1}, \quad b = \frac{B_2 - B_1}{c_1}$$

уравнения плоского нестационарного движения сжимаемой жидкости после их линеаризации можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial b_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_1}{\partial \eta} &= - \frac{B_1}{c_1 \partial_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \xi \frac{\partial b_2}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_2}{\partial \eta} &= \frac{B_1}{c_1 \partial_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{B_1}{4=c_1 \partial_1} \left( \frac{\partial b_1}{\partial \eta} - \frac{\partial b_2}{\partial \xi} \right) \\ \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial P}{\partial \eta} \\ \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u, \omega$  — составляющие скорости  $\vec{g}_2$  по осям  $\xi, \eta$ . Исключая все величины, кроме  $P$ , получим уравнение 4-го порядка для  $P$ .

6) *Граничные условия.* На плоскости  $\xi, \eta$  область неравномерного течения является область, заключенная между стенкой, скачком и дугами  $DC$  и  $FA$ , представляющими фронт волны возмущения, порожденной малым углом  $\varepsilon$ . Так как на стенке и скачке изменение  $\xi$  по сравнению с изменением  $\eta$  происходит медленно, то обе эти величины можно аппроксимировать прямолинейными отрезками (фиг. 2а). При этом на стенке будем иметь  $\xi = 0$ , на скачке



Фиг. 2

$$\xi = \frac{x}{c_2^2} = \frac{U^0}{c_1} = \frac{U_0}{c_2} + a_1^2 c_1^2 U = k_{00} + a_1^2 k_1 = \xi \ll 1 \quad (6)$$

где

$$a_1^2 = \frac{a^2}{c_1^2}$$

На стенке из условия равенства нулю нормальной составляющей скорости ( $g_{2N} = 0$ ) имеем  $u = a(\xi^2) = 0$  при  $\xi = 0$  для любого  $\eta$ . Тогда из уравнения (1) системы (5) получаем, что  $b_1$  на стенке равно нулю, то есть из граничного условия  $u = 0$  и уравнений движения вытекает условие  $b_1 = B_{2N} = 0$  на стенке, что позволяет решать задачу для жидкости независимо от задачи определения магнитного поля и кинематики

И наконец, в соответствии с уравнением (3) системы (5) имеем  $\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0$  при  $\xi = 0$ . На дугах  $DC$  и  $FA$  функции непрерывны. Следовательно, на этих дугах  $P = 0$ .

Для того, чтобы найти граничное условие на  $ABC$ , запишем уравнение слабо-искривленного фронта в виде

$$\xi = \frac{U^*}{c_1} + \gamma f_1(\eta) = k_0 + \gamma f_1(\eta)$$

Тогда применяя законы сохранения к искривленной части скачка, получаем

$$P = \frac{A'}{B'} (f_1 - \gamma f_1)$$

где

$$A' = U^* (\rho_1 - \rho_0) [4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1)B_1^2] - (\gamma - 1)(4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)\rho_0 V_0$$

$$B' = \rho_1 (B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})$$

$$u = \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_0)(4\pi\rho_1 U^{*2} - 4\pi\gamma P_1 - B_1^2)}{\rho_1 (B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})} - \frac{4\pi U^* V_0 \rho_1 (\gamma - 1)}{(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})} \right] c_1 (f_1 - \gamma f_1) \quad (7)$$

$$b = \frac{4\pi B_1 [(\gamma - 1)(\rho_1 - \rho_0) U^* - \rho_0 V_0 (\gamma - 1)]}{(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2}) \rho_1} c_1 (f_1 - \gamma f_1)$$

$$b_0 = \frac{(B_1 - B_0)}{\rho_1} f_1 - \frac{B_1}{\rho_1}$$

$$w = - \left[ V_0 + \frac{B_0^2 - B_0 B_1}{4\pi\rho_1 U^*} \right] f_1$$

Исключая из этих уравнений функцию  $f_1$ , получаем

$$u = D_0 P, \quad \gamma w_1 = E_0 P, \quad b = C_0 P, \quad \gamma \frac{\partial b_0}{\partial \xi} = L_0 \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (8)$$

$$D_0 = \frac{[(\rho_1 - \rho_0)(4\pi\gamma\rho_1 U^{*2} + 4\pi\gamma P_1 + B_1^2) - 4\pi\gamma U^* V_0 (\gamma - 1)] c_1}{U^* (\rho_1 - \rho_0) [4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1)B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)} \quad (9)$$

$$C_0 = \frac{4\pi B_1 c_1 \rho_1 [(\gamma - 1)(\rho_1 - \rho_0) U^* - \rho_0 V_0 (\gamma - 1)]}{U^* (\rho_1 - \rho_0) [4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1)B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)}$$

$$E_0 = \frac{A''}{B''} \quad (9)$$

где

$$A'' = (4\pi\gamma_1 U^* V_0 + B_0^2 - B_0 B_1) (B_1^2 + 4\pi\gamma_1 P_1 - 4\pi\gamma_1 U^2)$$

$$B'' = 4\pi U^* \{ U^* (\gamma_1 - \gamma_0) [4\pi(\gamma - 1) \gamma_1 U^2 - 8\pi\gamma_1 P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1) \gamma_1 V_0 (4\pi\gamma_1 U^2 - B_1^2) \}$$

$$L_0 = \frac{(B_0 - B_1) (B_1^2 + 4\pi\gamma_1 P_1 - 4\pi\gamma_1 U^2) \gamma_1^2}{U^* (\gamma_1 - \gamma_0) [4\pi(\gamma - 1) \gamma_1 U^2 - 8\pi\gamma_1 P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1) \gamma_1 V_0 (4\pi\gamma_1 U^2 - B_1^2)}$$

Если положить  $\bar{B} = 0$ , то получим

$$D_0 = \frac{[\gamma (\gamma_1 - \gamma_0) (\gamma_1 U_0^2 - P_1) - (\gamma - 1) \gamma_1^2 U_0 V_0] c_1}{U_0 [(\gamma_1 - \gamma_0) [(\gamma - 1) \gamma_1 U_0^2 + 2\gamma P_1] - (\gamma - 1) \gamma_1^2 U_0 V_0]} \quad (10)$$

$$E_0 = \frac{V_0 \gamma_1 (\gamma P_1 - \gamma_1 U_0^2)}{U_0 [(\gamma_1 - \gamma_0) [(\gamma - 1) \gamma_1 U_0^2 + 2\gamma P_1] - (\gamma - 1) \gamma_1^2 U_0 V_0]}$$

$$C_0 = 0, \quad L_0 = 0$$

Условия (8) в силу линейности задачи, считаем выполняющимися на прямой  $\bar{x} = k_0$ .

При помощи уравнений движения из уравнений (8) можно исключить  $u$ ,  $w$ ,  $b$ ,  $b_n$ , что даст условие из скачке для  $P$ .

$$\frac{\partial P / \partial z}{\partial P / \partial x} = \frac{\left( D_0 - k_0 \frac{C_0}{4 - k_0} - \frac{N^2}{4\pi k_0} \right) \gamma - \left( E_0 k_0 - \frac{E_1}{4\pi k_0} - \frac{L_1}{4\pi} \right) \gamma^{-1}}{1 - k_0^2 + \frac{N^2}{4\pi}} \quad (11)$$

где

$$N = \frac{B_1}{c_1 \gamma_1^2}, \quad C_0 = N C_0, \quad L_0 = N L_0, \quad E_0 = N^2 E_0$$

Дополнительно к (11) берется условие

$$\int \frac{E_0}{\gamma} P_1 d\tau = \int \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau = g_1 \quad (12)$$

заключающееся в том, что изменение  $w$  вдоль ударной волны от центра до вершины равно (12).

#### Решение граничной задачи

К линеаризованным уравнениям магнитной газодинамики применим метод Смирнова—Соболева [4], то есть давление  $P$  ищем как действительную часть аналитической функции

$$P = \operatorname{Re} \beta(z)$$

где  $\alpha$  определяется равенством

$$z\gamma + \beta(z)\bar{z} = 1 \quad (13)$$

причем  $P$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} = 0$$

где  $\frac{1}{z} = \xi + i\eta$ , а  $\beta(z)$  есть решение дисперсионного уравнения магнитной гидродинамики

$$\beta(z) = \sqrt{\frac{(1 - a_1^2 z^2)(1 - z^2)}{(1 - a_1^2 z^2 + a_1^2 z^4)}}$$

Так как рассматривается слабое магнитное поле, то разлагая функцию  $\beta(\alpha)$  в ряд по малому параметру  $a_1^2$ , подставляя в (13) и отделяя действительную и мнимую части  $\frac{1}{z}$ , получаем

$$\xi = \frac{\eta}{1 - \xi^2}, \quad \eta = \frac{\xi \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{1 - \xi^2}, \quad \xi = \xi \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right) \quad (14)$$

Это разложение верно исходу, кроме окрестности точек  $z = \frac{1}{a_1}$ ,  $z = \frac{1}{a_1} \sqrt{1 - a_1^2}$ . В статье это разложение используется только вблизи ударной волны.

В результате преобразования (14) область неоднородного течения в плоскости  $\xi, \eta$  переходит в область  $A'B'C'D'E'F'$  из плоскости  $\bar{z}, z$ , ограниченную отрезком  $A'C'$  действительной оси  $\bar{z}$  и эллипсом  $A'B'C$  (фиг. 26).

Координаты точек  $C'$  и  $A'$  следующие:

$$C' \left( \frac{1}{k_0} - \frac{a_1^2 k_0^2}{2k_0^3}, 0 \right) \quad k_0 = \sqrt{1 - k_0^2}$$

$$A' \left[ - \left( \frac{1}{k_0} - \frac{a_1^2 k_0^2}{2k_0^3} \right), 0 \right]$$

Уравнение кривой  $A'B'C'$

$$\frac{\eta^2}{k_0^2} + \frac{\xi^2}{k_1^2} = 1 \quad (15)$$

где

$$k_0 = k_0 \left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right), \quad k_1 = \sqrt{1 - k_0^2}$$

Теперь применим конформное преобразование

$$K = \frac{2i\omega}{1 - \omega^2} \quad (16)$$

где  $K = \lambda + i\mu$ . Далее можно ввести плоскость  $z = \omega$ , примем  $z = \lambda + i\mu$ , и по переменным  $\lambda, \mu$  снова удовлетворит уравнению Лапласа.

Это свойство сохраняется в дальнейших конформных преобразованиях. Когда магнитное поле отсутствует,  $z$  представляет собой плоскость Буземана [5].

В результате преобразования (16) на плоскости  $\lambda, \mu$  получаем область  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ограниченную отрезком мнимой оси  $D_1 E_1 F_1$ , где  $\lambda \in (-1, 1)$ , дугами  $D_1 C_1$  и  $F_1 A_1$  единичной окружности  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  и дугой окружности (фиг. 2с)

$$2\lambda = k_0'(1 - \lambda^2 - \mu^2) \quad (17)$$

Вблизи ударной волны связь между плоскостями  $z_1, z_2$   $z_1 - z_2 = i\gamma e^{i\theta}$  можно взять такой же, как в обычной газодинамике [5]

$$\xi = \frac{2\gamma \cos \theta}{1 - \gamma^2}, \quad \eta = \frac{2\gamma \sin \theta}{1 - \gamma^2} \quad (18)$$

$$\left( r = \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\eta}{\xi} \right)$$

Для преобразования краевого условия на слабонесжимаемом фронте к переменным  $\rho, \theta$  нужно провести ряд элементарных выкладок, опуская которые условие (11) в плоскости  $\rho, \theta$  можно записать в виде ( $n$  — внешняя нормаль,  $s$  — положительное касательное направление).

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial n}{\partial s} \frac{\left[ A_0(1 - k^{*2})k_0 - \left(1 - k_0^2 - \frac{N^2}{2\pi}\right)k_0' \right] \operatorname{tg} \theta - B_0(1 - k_0'^2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{k_0}}{\left(1 - k^2 - \frac{N^2}{4\pi}\right)(1 - k_0' \sec^2 \theta)^2} \quad (19)$$

где

$$A_0 = D_0 = k_0 = \frac{C_0}{4 - k_0} = \frac{N^2}{4 - k_0}, \quad B_0 = E_0 k_0 = \frac{E_0}{4 - k_0} = \frac{L_0}{4\pi} \quad (20)$$

$$k_0' = k_0' = \frac{a_1^2 k_0^2}{4k_0}$$

На стенке  $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial P}{\partial n} = 0$ , на дугах  $s = 1, P = 0$ . Полученная задача по математической постановке аналогична [5], поэтому используем метод, изложенный в [5].

Применяем дополнительное конформное преобразование

$$z_1 = \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \pi i \quad (21)$$

где  $z = \gamma e^{i\theta}$

отображающее возмущенную область на прямоугольник (фиг. 2d)

$$0 < x_1 < x_0 \quad 0 < y_1 < \pi$$

где

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k_0}{1-k_0} = \text{const}$$

С учетом того, что на дуге окружности (17)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1-k_0^2} \cos y_1}{k_0} = \frac{k_0'}{k_0} \cos y_1$$

получаем граничное условие в плоскости  $z_0$  на правой вертикальной стороне прямоугольника  $A_1 B_1 C_1$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial P}{\partial y_1} \left[ \left[ \frac{k_0 (1-k_0'^2)}{k_0' (k_0'^2 + \frac{N^2}{4\pi})} - k_0 \right] \cos^2 y_1 - \right. \\ \left. - B_0 \frac{k_0 (1-k_0'^2)}{k_0 k_0'^2 (k_0'^2 + \frac{N^2}{4\pi})} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

На левой вертикальной стороне прямоугольника  $\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$ , на горизонтальных сторонах  $D_1 C_1$  и  $F_1 A_1 P = 0$ .

Надо найти аналитическую функцию  $w^*(z_1) = \frac{\partial P}{\partial x_1} + i \frac{\partial P}{\partial y_1}$ , которая имеет чисто мнимые значения на трех сторонах прямоугольника, а на четвертой стороне  $x_1 = x$  обращается в заданную функцию  $w^*$ .

Решение окончательно находится в виде [5]

$$w^*(z_1) = iK_0 \frac{\theta_1(i - i_1)}{\theta_1(-iz_1)} W(z_1) \quad (23)$$

где  $K_0$  — нормирующий множитель,  $\theta_1, \theta_1'$  — тета-функции и

$$W(z_1) = \exp \left\{ -\sum_n (2 - a^n - b^n) n^{-1} e \operatorname{sch} 2nz \operatorname{sch} 2nz_1 \right\}$$

$a$  и  $b$  — заданные функции  $M$

$$a = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}, \quad b = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1}$$

где  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{z^2 - \beta^2} = A_0 \frac{k_0(1 - k_0'^2)}{k_0 \left( k_0'^2 + \frac{N^2}{4\pi} \right)} - k_0' B_0 \frac{k_0'(1 - k_0'^2)}{k_0 k_0'^2 \left( k_0'^2 + \frac{N^2}{4\pi} \right)} \quad (24)$$

$$\frac{z^2 \beta^2}{1 - \beta^2} = B_0 \frac{k_0'(1 - k_0'^2)}{k_0 k_0'^2 \left( k_0'^2 + \frac{N^2}{4\pi} \right)}$$

Из (23) для распределения давления на стенке имеем

$$\left( \frac{\partial P}{\partial y_2} \right)_{y_2=0} = -K_0 \frac{\xi_2(y_1)}{u_1(y_1)} W'(iy_1)$$

По формулам

$$\frac{\xi_2}{i_0} = \bar{g}_1 = \bar{g}_1 + \bar{a}_1^2 \bar{g}_{00}, \quad \frac{P_1}{z_0 |V_0^2} = \bar{P}_1 = \bar{P}_1 + \bar{a}_1^2 \bar{P}_{00}$$

$$\frac{\xi_1}{\rho_0} = \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1 + \bar{a}_1^2 \bar{\rho}_{00}, \quad \frac{c_1}{V_0} = \bar{c}_1 = \bar{c}_1 + \bar{a}_1^2 \bar{c}_1, \quad \frac{B_1}{B_0} = \bar{B}_1 = \bar{z}_1$$

где

$$\bar{a}_1^2 = \frac{a_1^2}{V_0^2}$$

вычислены значения безразмерных параметров, характеризующих ударную волну для значений числа Маха  $M = 1.5; 3; a_1 = 0.1; 0.01 M$ .

Кроме того, подсчитано значение

$$K_0 : V_0^2 = \frac{(\bar{g}_1 + \bar{a}_1^2 \bar{g}_{00}) k_0 k_0'}{\kappa E_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k_1(y_1)}{u_1(y_1)} |W'| \frac{(z^2 - \beta^2) \sin y_1 dy_1}{1 - \beta^2 \sin^2 y_1 - \cos^2 y_1 + \beta^2 \sin^2 y_1 - \cos^2 y_1}}$$

и численно давление  $\bar{P}$  на стенке

$$\bar{P} = \frac{P_1 - P_2}{z(P_1 - P_0)}$$

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

	$M=1.5$ $\alpha_1=0.1$	$M=1.5$ $\alpha_1=0.01$	$M=3$ $\alpha_1=0.1$	$M=3$ $\alpha_1=0.01$
$\bar{P}_1$	1.48572118	1.49679642	1.26637198	1.28617529
$\bar{P}_1$	2.97623610	3.01208180	4.31004399	4.49310199
$\bar{P}_1$	1.78293484	1.81405425	1.28476950	1.36493068
$\bar{P}_1$	0.91582752	0.91823908	0.64529521	0.65236587
$K_1 \cdot V_0$	0.20312864	0.21135715	0.10189070	0.11604402
$\bar{P}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	0.26071675	0.28119263	0.18550328	0.2649654
$\bar{P}\left(\frac{\pi}{3}\right)$	0.47341359	0.50356436	0.32132316	0.4293633
$\bar{P}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	0.34923252	0.37991294	0.36733156	0.47308742
$\bar{P}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$	0.47341359	0.50356436	0.32132316	0.4293633
$\bar{P}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$	0.26071675	0.28119263	0.18550328	0.2649654
$\bar{P}(\pi)$	0	0	0	0
$B_1$	3.0124438	3.0124438	4.49192076	4.49192076

Расчеты были проведены в вычислительном отделе института механики АН Арм.ССР Г. А. Саркисяном, которому авторы выражают свою благодарность.

Ереванский государственный университет  
Институт механики АН  
Армянской ССР

Получила 11 V 1975

Վ. Ք. ԱՂԱՏՅԱՆ, Ս. Ք. ԲԱԳՅԱՆ

ՄԱՊԻ ԿՆԵՐՔԱՌՈՒՆՑՈՒՄԸ Ի ԷԼԵՏՐՈՎՈՉԱԿՈՐԵԻՓ շԵՂՈՒԽԻ ԱՆՉ  
ՐՈՒՄՆԵՐՈՒՄԻՆ ԳՈՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆՈՒՄԸ

Ա ռ ի ո թ ո ռ ռ

Գիտարկվում է բույժ սեպի ներթափանցման խնդիրը ազատ մակերևույթ ունեցող սեղմելի հեղուկի մեջ ուժեղ հարվածային ալիքի և հեղուկի ազատ մակերևույթին դուրսից սկզբնական մաղնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Երբ սկզբնական մաղնիսական դաշտը դուրսից և հեղուկի շրջագծած մակերևույթին մաղնիսական դաշտի ուժազտերը չեն թափանցում սեպի մեջ և այդ պատճառով խնդիրը կարելի է լուծել անկախ սեպի մեջի դաշտից:

Որոշված են հնդոսկի պարամետրերը հարվածային ալիքի ետևում: Եզրափն խնդիրը անալիտիկ ֆունկցիայի համար անհավասարաչափ հասանքի տիրույթում լուծված է կաշիխիլի մեթոդով: Որոշված է ճնշման բաշխումը սեպի վրա և կատարված են թվային հաշվարկներ:

## PENETRATION OF A WEDGE INTO AN ELECTROCONDUCTING FLUID IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

L. D. AZATIAN, A. G. BAGDOEV

### S u m m a r y

The problem of penetration of a blunt wedge into a compressible fluid with a free surface for the case of a strong shock wave and the original magnetic field parallel to the free surface of the fluid is considered.

When the initial magnetic field is parallel to the undisturbed surface of fluid, the line of magnetic force does not pass into the wedge and so the problem may be solved independently of the field within the wedge.

Parameters of field in the region behind the shock wave are determined.

In the region of non-uniform flow the boundary-value problem for analytical functions (pressure) is solved by the Lighthill method.

The pressure distribution at the wedge is determined and numerical calculation is presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Манасян М. М. Проникновение тела в полупространство сжимаемой жидкости при наличии магнитного поля. Известия АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
2. Хейлм Г. и Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Изд. ИЛ, М., 1950.
3. Куликовская А. Г. и Любимова Г. А. Магнитная гидродинамика. Государств. изд. физико-математ. литературы, М., 1962.
4. Багдоев А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1967.
5. M. J. Lighthill, The diffraction of blast, II. Proc. Roy. Soc., 1950, A, 200, 554-565.