

А. А. СПЕКТОР

О ЗОНАХ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ НА УЧАСТКЕ КОНТАКТА КАТЯЩЕГОСЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И ОСНОВАНИЯ ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА

В работе рассматривается плоская задача о качении упругого цилиндра по основанию из того же материала. При качении на участке контакта имеются зоны, где тела проскальзывают друг относительно друга, и зоны, в точках которых относительная скорость цилиндра и основания равна нулю (зоны сцепления).

Впервые частное решение этой задачи было получено Ф. Картером в работе [1]. В ней предполагалось, что участок контакта делится на две зоны: переднюю по направлению качения, где тела имеют нулевую относительную скорость, и заднюю, где происходит проскальзывание и выполнен закон трения Кулона. Были получены распределения напряжений и координата точки раздела участка контакта на зоны. Аналогичное решение было получено и Г. Фроммом [2]. Вопрос обоснования предположения Ф. Картера и единственности полученного им решения рассматривался Г. Порцким [3]. Им были изучены возможные случаи, когда зона сцепления одна, а зон проскальзывания одна или две. Для каждого положения зоны сцепления было получено свое распределение напряжений на участке контакта. В работах [4, 5] было показано, что при некотором уточнении граничных условий на этих решениях, полученных в [3], им будет удовлетворять лишь то, которое совпадает с решением Ф. Картера. Этот вывод не мог считаться окончательным, так как случай разных знаков касательных напряжений в двух зонах проскальзывания не был рассмотрен. В работе [6] было доказано, что этот случай реализоваться не может.

В настоящей работе делается попытка рассмотреть наиболее общую возможную ситуацию, когда на участке контакта имеется произвольное число зон сцепления и проскальзывания. Доказывается, что решение Ф. Картера и в этом случае остается единственным.

Введем прямоугольную систему координат Oxy , связанную с участком контакта. Начало системы координат O поместим в его центре, ось Ox направим вдоль участка в сторону качения цилиндра. Предполагая, как обычно, что ширина участка контакта много меньше радиуса цилиндра R , будем считать контактирующие тела полуплоскостями $y \geq 0$ и $y \leq 0$. Пусть центр цилиндра движется с постоянной скоростью U , а угловая скорость вращения цилиндра вокруг центра — ω . Положим, что скорость качения много меньше скорости распространения звука в среде, и будем в дальнейшем пренебрегать инерционными членами. Обозначим через $S(x)$ разность скоростей точек основания и цилиндра, совпадающих с точкой x участка контакта. Тогда имеет место соотношение [7]

$$s(x) = \frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} = \varepsilon \quad (1)$$

где $s(x) = S(x)/w$; u^+ , u^- — упругие касательные смещения точек цилиндра и основания,

$$z = \frac{R - w}{w}$$

Следовательно, в точках нулевой относительной скорости контактирующих тел будем иметь условие

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} = \varepsilon$$

В остальных точках участка контакта касательные напряжения τ_{xy} пропорциональны нормальным σ , и по направлению противоположны скорости проскальзывания

$$\tau_{xy} = -\mu \sigma \operatorname{sign} s(x) \quad (2)$$

здесь μ — коэффициент трения скольжения. Границы тел вне участка контакта свободны от напряжений.

Используя известные [8] выражения для смещений точек границы упругой полуплоскости под действием касательных и нормальных напряжений на участке контакта, получаем для случая контактирующих тел из одинаковых материалов следующее равенство:

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\lambda - 1}{4\pi\mu} \int_{-l}^l \frac{\tau_{xy} dt}{t - x} \quad (3)$$

здесь $\lambda = \frac{b + 3a}{b + a}$, b и a — постоянные Ляме.

Полуширина участка контакта l и нормальные напряжения на границе τ_y будут теми же, что и в задаче о статическом контакте цилиндра и основания:

$$l = \sqrt{\frac{\lambda + 1}{2\pi}} RP$$

$$\tau_y = -\frac{2\mu}{(\lambda + 1)R} \sqrt{R^2 - x^2}$$

здесь P — нормальная нагрузка на цилиндр.

Введем голоморфную вне участка контакта функцию:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{2\tau_{xy}}{t - z} dt = \frac{2\mu}{\lambda + 1} \varepsilon$$

Напряжения τ_{xy} будем искать в классе функций, удовлетворяющих усло-

нию Гельдера на отрезке $-l \leq x \leq l$. В силу гладкости контуров тел, будем считать τ непрерывной функцией на всей границе тел, и так как напряжения вне участка контакта отсутствуют, то выполняются равенства $\tau_{xy}(-l) = \tau_{xy}(l) = 0$. Тогда существуют граничные значения $W^+(x)$ и $W^-(x)$ функции $W(z)$, удовлетворяющие условиям Гельдера во всех точках участка контакта. При больших $|z|$ функция $W(z)$ представляется в виде

$$W(z) = -\frac{2\pi}{\lambda+1} z + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

По формулам Сохоцкого-Племеля и с учетом равенств (1), (3) получаем

$$\begin{aligned} W^+ - W^- &= 2i\tau_{xy}(x) \\ W^+ + W^- &= -\frac{4\pi}{\lambda+1} s(x) \quad \text{при} \quad -l \leq x \leq l \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Функция $s(x)$ не меняет знака на участке контакта (относительная скорость контактирующих тел в точках участка контакта не меняет направления).

Доказательство. Функцию $W(z)$ будем рассматривать как отображение плоскости z на некоторую конформную часть плоскости W . Достаточно рассмотреть лишь отображение верхней полуплоскости $\text{Im} z \geq 0$, так как $W(\bar{z}) = \overline{W(z)}$, $W^+(x) = \overline{W^-(x)}$. Обозначим множество точек $\text{Im} z > 0$ через L , а множество $\text{Im} z = 0$ через $\bar{L}$. Предположим теперь, что существуют хотя бы две точки $x = P$ и $x = Q$, в которых функция $s(x)$ имеет разные знаки.

Тогда найдутся точки $z \in L$, которые отображение $W(z)$ переводят внутрь I-го и III-го квадрантов плоскости W . Действительно, из (4) вытекает, что

$$W^+ = -\frac{2\pi}{\lambda+1} s(x) + i\tau_{xy}(x) \quad (5)$$

Следовательно, если $s(P) > 0$, а $s(Q) < 0$, то из условия (2) и знакопостоянства σ получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } W^+(P) &< 0, \quad \text{Re } W^+(P) < 0 \\ \text{Im } W^-(Q) &> 0, \quad \text{Re } W^-(Q) < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Итак, граничные точки P и Q множества L переводятся отображением W внутрь III-го и I-го квадрантов. В силу непрерывности функции W , найдется и пара внутренних точек P и Q множества L , достаточно близких к P и Q , которые переходят внутрь этих квадрантов.

Покажем, что ни одна точка множества $\bar{L}$ не переходит внутрь II-го и IV-го квадрантов плоскости W . Действительно, в силу соотношений $\text{Im } W^-(x) = 0$ при $-\infty < x < -l$, $l < x < \infty$; $\text{Im } W^+(x) = \text{Re } W^-(x) > 0$

при $-1 \leq x \leq 1$, ни одна точка границы множества L не переходит внутрь этих квадрантов. Предположим, что хотя бы одна внутренняя точка m множества L переходит внутрь II-ого или IV-ого квадрантов. Через точку O — начало координат в плоскости W и точку m проведем луч и рассмотрим множество точек M этого луча, обладающих прообразами в $\bar{L}$. Пусть

$$\gamma = \sup_M |W| \quad (7)$$

Ясно, что $0 < \gamma < \infty$. Исходя из непрерывности функции $W(z)$, легко показать, что точка W_0 луча Om , для которой $|W_0| = \gamma$, обладает прообразом в L и, следовательно, принадлежит множеству M . Но ранее доказанному, этим прообразом не может быть граничная точка L . Функция $W(z)$, голоморфная в L , переводит внутренние точки во внутренние [9]. Если же точка W_0 внутренняя для образа множества $\bar{L}$, то равенство (7) не может быть выполнено. Итак, предположение о наличии точек, переводимых внутрь II-ого или IV-ого квадрантов, привело нас к противоречию.

Рассмотрим вновь точки p и q . Их прообразы, очевидно, могут быть соединены непрерывной кривой, проходящей через внутренние точки множества $\bar{L}$. Так как отображение W голоморфно в L , то образ этой кривой будет непрерывной и проходящей через внутренние точки образа $\bar{L}$ кривой, которая соединит p и q . Эти точки лежат в I-ом и III-ем квадрантах, а во II-ом и IV-ом квадрантах отсутствуют образы точек $\bar{L}$, следовательно, любой непрерывный путь pq должен проходить через точку O . Но точка O не может быть образом никакой внутренней точки множества $\bar{L}$, так как иначе она была бы внутренней точкой образа $\bar{L}$ и тогда нашлись бы точки, переходящие внутрь II-ого и IV-ого квадрантов. Поэтому искомого пути pq не существует, и наше предположение о перемене знака функцией $s(x)$ несправедливо. Легко показать, что знак этой функции совпадает со знаком δ . Лемма доказана.

Пусть теперь множество точек x участка контакта, для которых $s(x) = 0$, есть совокупность n отрезков, положение и размеры которых должны быть определены в ходе решения задачи.

Положим для определенности $\delta > 0$. Тогда по лемме функция

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2i(z_0 - \zeta_0)}{t - z} dt = \frac{2z_0}{z - 1} \quad (8)$$

голоморфна вне зон сцепления и ограничена в концах всех этих зон. В точках зон сцепления выполняется условие

$$W_1' = W_1'' = -\frac{4z_0}{(z-1)^2} \quad \forall$$

Строя такую функцию по известным формулам [10], получим

$$W_1(z) = \begin{cases} -\frac{2W_0}{(\lambda+1)R} z + P(z)X(z) & \text{при } n > 1 \\ \frac{2W_0}{(\lambda+1)R} (iz + 1(a+z)(b-z)) + P(z)X(z) & \text{при } n = 1 \end{cases}$$

здесь $X(z)$ — решение соответствующей однородной задачи сопряжения,

$P(z)$ — произвольный полином, — a и b — концы зоны сцепления.

Из равенства (8) следует, что при больших $|z|$ функция $W_1(z)$ остается ограниченной. Из равенства же (9) вытекает, что при $n > 1$ ограниченных решений задачи не существует. При $n = 1$ искомая функция существует, если положить $P(z) = 0$. Определяя теперь функцию $W(z)$ и затем по формулам (4) функции $\tau_{xy}(x)$ и $\chi(x)$, можно показать, что если перед зоной сцепления лежит зона проскальзывания, то условие (2) нарушается. Поэтому зона сцепления примыкает к передней по направлению качения границе участка контакта.

Касательные напряжения и длина участка сцепления, найденные после определения функции $W(z)$ совпадают с таковыми в решении [1, 2]. Таким образом, единственность решения Д. Картера доказана.

Всероссийский научно-исследовательский
конструкторско-технологический институт
подшипниковой промышленности

Поступила 14 V 1975

Ա. Ա. ՍԵԿՏՈՐ

ԳԼՈՐԿՈՂ ԱՌԱՋՎՈՒԹՅԱՆ ԳԼՍՆԵ ԵՎ ՆՈՒՅՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՀԻՄՔԻ
ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ԿՅՐԱՆ ԵՎ ԽՈՇՐՈՆ ՏԵԳԱՐԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում դիտարկվում է առաձգական դաճի կաշտնացված ղրորումը
առան նյութից հիմքի վրայով:

Ենթադրվում է, որ տեղի ունի կամանտան-կաշտի շար շփման օրենքը:
Կաման և առան տեղամասերի թիվը և սիրրը հիմնավորվում է առանց
սրել քայտուցի: Ենթադրությունների օղտադորման:

ON REGIONS OF SLIP AND ADHESION WITHIN CONTACT AREA OF A ROLLING ELASTIC CYLINDER AND A FOUNDATION OF THE SAME ELASTIC PROPERTIES

A. A. SPECTOR

S u m m a r y

A steady rolling of an elastic cylinder over a foundation of the same elastic properties is considered. Amonton-Coulon's law of dry

friction is assumed to hold. The number and disposition of regions of slip and adhesion are established without any supplementary assumptions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter F. W.* On the action of a locomotive driving wheel. Proc. Roy. Soc. (A), v. 12, 1926.
2. *Fromm H.* Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Scheiben. ZAMM, B. 7, 1927.
3. *Poritsky H.* Stresses and deflections of a cylindrical bodies in contact. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
4. *Cain B. S.* Discussion on Poritsky. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
5. *Poritsky H.* Author's reply. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
6. *Горячева И. Г.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. М., 1974.
7. *Глаголев Н. И.* Работа сил трения и износ перекатываемых тел. Труды III-ей Всесоюз. конференции по трению и износу в машинах.
8. *Годин Л. Л.* Контактные задачи теории упругости. М., 1955.
9. *Шабит Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.