ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №5, 1975 Механика

Р. Ю. АМЕНЗАДЕ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ В ТОЛСТОСТЕННУЮ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКО-УПРУГУЮ ТРУБУ

Рассматривается пульсирующее течение вязкой ньютоновой жидкости в толстостенной линейно-вязко-упругой трубе. При этом труба рассматривается как длинная прямая и незакрепленная. Используются линеаризованные уравнения, которые позволяют рассчитывать характеристики волнового движения. Построены дисперсионные кривые, а также зависимость меры затухания от круговой частоты. Показан значительный эффект учета вязкости стенок трубы. Данная задача моделирует движение крови в крупных кровеносных сосудах (артериях и венах).

Уравнения движения несжимаемой однородной изотропной толстостенной оболочки в цилиндрической системе координат имеют вид [1]

$$\frac{\rho^*}{\mu^*}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu^*}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$$\frac{\rho^*}{\mu^*}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu^*}\frac{\partial\Omega}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}=0$$

где ρ^* — плотность материала стенок, μ^* — коэффициент Ламе, Ω — давление, а u_r и u_x — соответственно радиальная и осевая компоненты перемещения стенки. Третье уравнение системы (1) представляет условие несжимаемости. Так как нас интересует распространение гармонической волны, то на основании принципа соответствия [2], система (1) в образах Фурье примет вид

$$u_r=m\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right]-\frac{1}{(i\omega)^2\rho^*}\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$$u_x=m\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right]-\frac{1}{(i\omega)^2\rho^*}\frac{\partial\Omega}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}=0$$

где $m=\dfrac{\mu^*}{(i\omega)^2\rho^*}$, а ω — круговая частота.

Здесь $\bar{\mu}^* = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}$, $\bar{E}$ и $\bar{\nu}$ — соответственно комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона.

На основании условия несжимаемости имеем

$$u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{3}$$

Учитывая выражения (3) в первых двух уравнениях системы (2) и исключая функцию U_r для определения функции φ получим следующее уравнение в частных производных четвертого порядка:

$$L[\varphi - mL(\varphi)] = 0 \tag{4}$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{5}$$

где

$$L(\varphi_1) = 0, \quad L(\varphi_2) = mL(\varphi_2) = 0 \tag{6}$$

Будем искать φ_1 и φ_2 в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1^*(r)\exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ \varphi_2 &= A_2^*(r)\exp[i(\omega t - \gamma x)] \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\gamma = \frac{\omega}{c}$ (c — комплексная скорость), действительная часть которой — волновое число, а мнимая — мера затухания возмущения по длине оболочки.

Учитывая выражения (7) в уравнениях (6), а также условия (5) и (3), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} u_x = \{&C_1\bar{\gamma}J_0(\bar{\gamma}r) - C_2\bar{\beta}J_0(\bar{\beta}r) - C_3\bar{\gamma}Y_0(\bar{\gamma}r) + C_4\bar{\beta}Y_0(\bar{\beta}r)\} \\ &\exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ u_r = \{&\bar{\gamma}C_1J_1(\bar{\gamma}r) - C_2J_1(\bar{\beta}r) - C_3\bar{\gamma}Y_1(\bar{\gamma}r) + C_4\bar{\beta}Y_1(\bar{\beta}r)\} \\ &\exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ \Phi = \{&\omega\bar{\rho}^*[C_1J_0(\bar{\gamma}r) + C_3Y_0(\bar{\gamma}r)]\}\exp[i(\omega t - \gamma x)] \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, J_0 и Y_0 — бессе-

левы функции первого рода, Y_0 и Y_1 — бесселевы функции второго рода, а $\beta^2 = -\left(\gamma^2 + \frac{1}{m}\right)$.

Будем считать, что жидкость — ньютоновская и несжимаемая, а ее движение — ламинарное и осесимметричное. Предполагая, что возмущения достаточно малы, выпишем линеаризованные уравнения движения Навье-Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\right)$$

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

где ρ — плотность жидкости, μ — динамическая вязкость, p — давление, v_r и v_x — соответственно радиальная и осевая компоненты скорости жидкости.

Решение уравнений (9) проводится тем же способом, что и для компонент перемещений оболочки и при условии ограниченности функций при $r=0$ может быть представлено в виде

$$p = A_1 J_0(i\gamma r)\exp[i(\omega t - \gamma x)]$$

$$v_r = \left\{A_1\frac{\gamma}{\rho\omega}J_1(i\gamma r) - i\gamma A_2 J_1(\beta r)\right\}\exp[i(\omega t - \gamma x)] \tag{10}$$

$$v_x = \left\{A_1\frac{\gamma}{\rho\omega}J_0(i\gamma r) - A_2\beta J_0(\beta r)\right\}\exp[i(\omega t - \gamma x)]$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, J_0 и J_1 — бесселевы функции первого рода, а $\beta^2 = -\left(\gamma^2 + \frac{i\omega}{\mu}\right)$. Обозначим через a и b соответственно внутренний и внешний радиусы оболочки. Для завершения постановки задачи необходимы граничные условия, связывающие движение жидкости и оболочки.

На границе раздела жидкости и оболочки должны выполняться условия непроницаемости и прилипания, которые соответственно имеют вид

$$v_r\big|_{r=a} = (i\omega)\,u_r\big|_{r=a} \tag{11}$$

$$v_x\big|_{r=a} = (i\omega)\,u_x\big|_{r=a} \tag{12}$$

Там же должны выполняться условия равенства касательных и нормальных напряжений, которые запишем в образах Фурье

$$\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\Big|_{r=a}=\mu^*\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} \tag{13}$$

$$\left(-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\Big|_{r=a}=\left(-\Omega+2\mu^*\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} \tag{14}$$

На внешней границе должно выполняться равенство нулю касательных и нормальных напряжений, что в образах Фурье можно записать в виде

$$\mu^*\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)\Big|_{r=b}=0 \tag{15}$$

$$\left(-\Omega+2\mu^*\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\Big|_{r=b}=0 \tag{16}$$

Подчиняя решение уравнений движения жидкости и оболочки граничным условиям (11)—(16), получим систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}A_1+\alpha_{12}A_2+\alpha_{13}C_1+\alpha_{14}C_2+\alpha_{15}C_1+\alpha_{16}C_2=0\\
&\alpha_{21}A_1+\alpha_{22}A_2+\alpha_{23}C_1+\alpha_{24}C_2+\alpha_{25}C_1+\alpha_{26}C_2=0\\
&\alpha_{31}A_1+\alpha_{32}A_2+\alpha_{33}C_1+\alpha_{34}C_2+\alpha_{35}C_1+\alpha_{36}C_2=0\\
&\alpha_{41}A_1+\alpha_{42}A_2+\alpha_{43}C_1+\alpha_{44}C_2+\alpha_{45}C_1+\alpha_{46}C_2=0\\
&\alpha_{51}A_1+\alpha_{52}A_2+\alpha_{53}C_1+\alpha_{54}C_2+\alpha_{55}C_1+\alpha_{56}C_2=0\\
&\alpha_{61}A_1+\alpha_{62}A_2+\alpha_{63}C_1+\alpha_{64}C_2+\alpha_{65}C_1+\alpha_{66}C_2=0
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\alpha_{11}=\frac{i}{\gamma\omega}J_1(i\gamma a),\quad \alpha_{12}=-i\gamma J_1(\beta a),\quad \alpha_{13}=\gamma\omega J_1(i\gamma a)$$

$$\alpha_{14}=\gamma\omega J_1(\beta a),\quad \alpha_{15}=\gamma\omega Y_1(i\gamma a),\quad \alpha_{16}=\gamma\omega Y_1(\beta a)$$

$$\alpha_{21}=\frac{i}{\gamma\omega}J_0(i\gamma a),\quad \alpha_{22}=-\beta J_0(\beta a),\quad \alpha_{23}=\omega\gamma J_0(i\gamma a)$$

$$\alpha_{24}=-i\omega\beta J_0(\beta a),\quad \alpha_{25}=\omega\gamma Y_0(i\gamma a),\quad \alpha_{26}=i\omega\beta Y_0(\beta a)$$

$$\alpha_{31}=-\frac{2i\gamma\mu}{\gamma\omega}J_1(i\gamma a),\quad \alpha_{32}=\mu J_1(\beta a)[\beta^2-\gamma^2],\quad \alpha_{33}=-2\mu^*\gamma^2 J_1(i\gamma a)$$

$$\alpha_{34}=\mu^* J_1(\beta a)[\beta^2-\gamma^2],\quad \alpha_{35}=-2\mu^*\gamma^2 Y_1(i\gamma a),\quad \alpha_{36}=\mu^* Y_1(\beta a)[\beta^2-\gamma^2]$$

$$\alpha_{41}=-J_0(i\gamma a)-2\frac{\mu\gamma^2}{\gamma\omega}J_0(i\gamma a)-\frac{2\gamma\gamma_1}{a\gamma\omega}J_1(i\gamma a)$$

$$\alpha_{42}=2\mu i\gamma\left[\frac{1}{a}J_1(\beta a)-\beta J_0(\beta a)\right]$$

$$\alpha_{43} = \omega^2\rho^* J_0(i\gamma a) + 2\bar{\mu}^* \left\{\gamma^2 J_0(i\gamma a) + \frac{i\gamma}{a} J_1(i\gamma a)\right\}$$

$$\alpha_{44} = 2\bar{\mu}^* i\gamma \left\{\frac{1}{a} J_1(\bar{\beta} a) - \bar{\beta} J_0(\bar{\beta} a)\right\}$$

$$\alpha_{45} = \omega^2\rho^* Y_0(i\gamma a) + 2\bar{\mu}^* \left\{\gamma^2 Y_0(i\gamma a) - \frac{i\gamma}{a} Y_1(i\gamma a)\right\}$$

$$\alpha_{46} = 2\bar{\mu}^* i\gamma \left\{\frac{1}{a} Y_1(\bar{\beta} a) - \bar{\beta} Y_0(\bar{\beta} a)\right\}$$

$$\alpha_{51} = \alpha_{52} = 0, \quad \alpha_{53} = 2\gamma^2 J_1(i\gamma b), \quad \alpha_{54} = J_1(\bar{\beta} b)[\gamma^2 - \bar{\beta}^2]$$

$$\alpha_{55} = 2\gamma^2 Y_1(\bar{\beta} b), \quad \alpha_{56} = Y_1(\bar{\beta} b)[\gamma^2 - \bar{\beta}^2], \quad \alpha_{61} = \alpha_{62} = 0$$

$$\alpha_{63} = -J_0(i\gamma b)[\omega^2\rho^* + 2\bar{\mu}^*\gamma^2] - 2\bar{\mu}^* \frac{i\gamma}{b} J_1(i\gamma b)$$

$$\alpha_{64} = 2\bar{\mu}^* \left\{i\gamma\bar{\beta} J_0(\bar{\beta} b) - \frac{i\gamma}{b} J_1(\bar{\beta} b)\right\}$$

$$\alpha_{65} = -2\bar{\mu}^* \left\{\gamma^2 Y_0(i\gamma b) + \frac{i\gamma}{b} Y_1(i\gamma b)\right\} - \omega^2\rho^* Y_0(i\gamma b)$$

$$\alpha_{66} = 2\bar{\mu}^* \left\{i\gamma\bar{\beta} Y_0(\bar{\beta} b) - \frac{i\gamma}{b} Y_1(\bar{\beta} b)\right\}$$

Для нетривиального решения системы (17) имеем

$$\det(\alpha_{ij}) = 0 \tag{18}$$

Таким образом, нами получено дисперсионное уравнение.

Перейдем теперь к вычислению комплексных модулей $\bar{E}(\omega)$ и $\bar{\nu}(\omega)$. Следуя [2]

$$\bar{E}(\omega) = 3\left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v}\right)^{-1}, \qquad \bar{\nu}(\omega) = \frac{Y_v - Y_s}{2Y_v + Y_s} \tag{19}$$

Предположим, что поведение материала оболочки описывается моделью Фойгта. Для подобного рода модели значение податливости сдвига имеет вид [2]

$$J_s = \frac{E}{E^2 + \omega^2\eta^2} - i\frac{\omega\eta}{E^2 + \omega^2\eta^2}, \quad \text{и} \quad Y_s = \frac{1}{J_s} \tag{20}$$

Здесь E — модуль Юнга для упругой задачи, η — вязкость материала оболочки.

Для определения Y_v примем гипотезу Ю. Н. Работнова [3], гласящую, что при описании наследственных свойств реальных сред наиболее

существенную роль играет сдвиговое последействие, тогда как объемное последействие можно считать отсутствующим $K=\text{const}$.

В упругом случае $K=\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$, а в вязком $K=\dfrac{1}{3}Y_1$, откуда по предыдущей гипотезе имеем

$$Y=\frac{E}{1-2\nu} \tag{21}$$

Значение $\nu=0.5$ (нами используется случай несжимаемости) рассматривать нельзя, ибо это приводит к необходимости деления на нуль. Поэтому в дальнейшем будет принято значение $\nu=0.49$, что дает очень мало отличающиеся результаты для значений ν, сколь угодно близких к 0.5.

Дисперсионное уравнение (18) выражает зависимость константы распространения γ от частоты ω и параметров системы. Для решения этого уравнения были использованы разложения бесселевых функций от аргументов γa, γb, βb, поскольку эти величины значительно меньше единицы (так как нас интересуют наибольшие значения скорости распространения пульсовой волны), а для $J_0(\beta a)$ и $J_1(\beta a)$ принимались следующие апроксимации:

$$J_0(\beta a)\sim J_0(\delta)+\left|\frac{\gamma^2a^2}{2\delta}\right|J_1(\delta)$$

$$J_1(\beta a)\sim J_1(\delta)-\left|\frac{\gamma^2a^2}{2\delta^2}\right|[J_1(\delta)-\delta J_0(\delta)]$$

где

$$\delta=\xi^2,\quad \xi=\frac{\omega a^2\rho}{\mu}$$

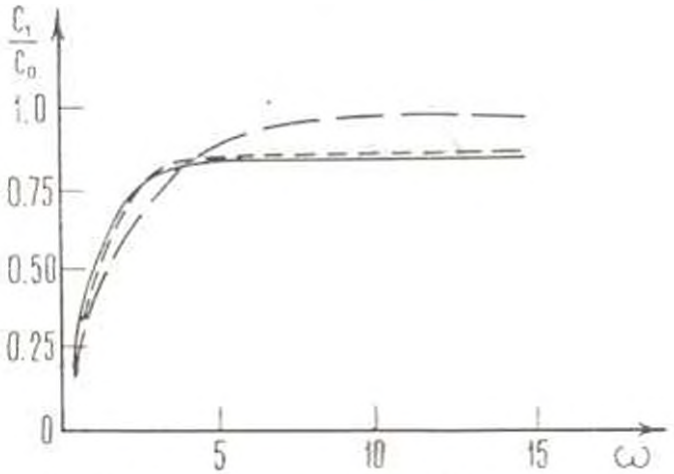
При следующих значениях параметров системы:

$$a=1.3\ см,\ b=1.5\ см,\ \mu=0.04\ \frac{г}{см\ сек};\quad \rho=\rho^*=1.05\ \frac{г}{см^3}$$

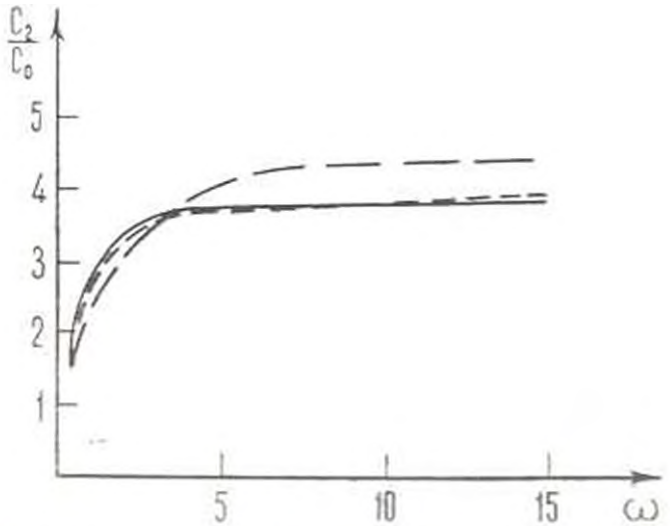
$$E=3\cdot10^6\ \frac{дн}{см^2},\quad \nu=0.49;\quad \gamma_1=8.7\cdot10^4\ \frac{г}{см\ сек};\quad c_0=541\ \frac{см}{сек}$$

учитывая в дисперсионном уравнении (18) формулы (19), (20) и (21) и разложения бесселевых функций, итерационным методом численно получены зависимости фазовой скорости $\dfrac{c_1}{c_0}$ (меньший корень), соответствующей волне Юнга, распространяющейся в жидкости, фазовой скорости $\dfrac{c_2}{c_0}$ (больший корень), соответствующей волне Ламба, бегущей в оболочке, и

меры затухания e^{-kx} от угловой частоты ω. Здесь $c_0 = \left(\frac{Eh}{\rho a}\right)^{1/2}$ $(2h = b - a)$ определялось по формуле Резала. k — коэффициент затухания, λ — длина волны.

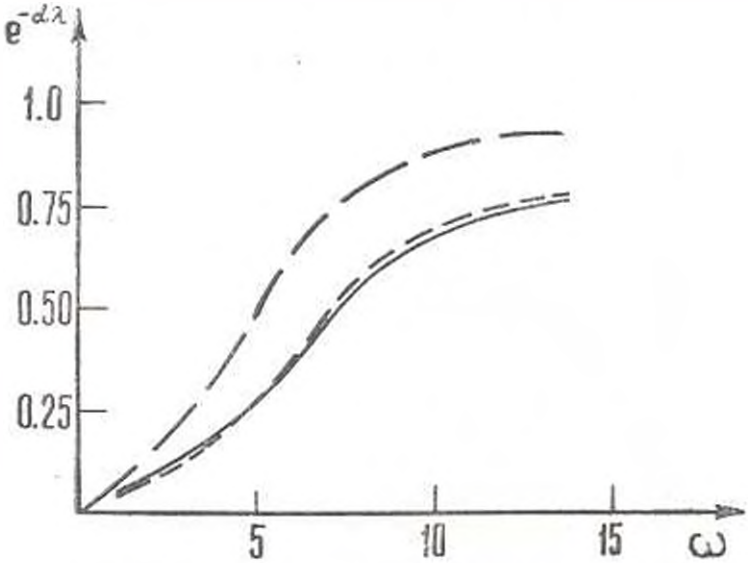


Фиг. 1. Зависимость фазовой скорости Юнга от угловой частоты.



Фиг. 2. Зависимость фазовой скорости Ламба от угловой частоты

Соответствующие кривые приведены на фиг. 1, 2, 3: сплошной линии соответствует взятая модель, мелкой пунктирной линии — случай тонкостенности оболочки, а крупной пунктирной линии — упругой изотропной модели.



Фиг. 3. Зависимость меры затухания от угловой частоты.

Выводы. 1. Численный расчет показывает достаточно значительный эффект вязкости материала стенок на дисперсионные кривые и на меру затухания. Дисперсионные кривые для случаев идеальной и вязкой жидкости практически совпадают.

2. На приведенных графиках очевидна незначительность эффекта толщины стенки оболочки.

Азербайджанский Ордена Трудового Красного Знамени Государственный университет им. С. М. Кирова

Поступила 6 I 1975

Ռ. ՅՈՒ. ԱՄԵՆԶԱԴԵ

ՀԵՂՈՒԿԱՅԻ ԱՅԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆԸ ԴԵԱՅԻՆ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՊԱՏ ԵՎԼՈՎԱԿՈՒՄ ՊԱՐՈՒՆԱԿՎԱԾ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ

Ամփոփում

Առաջարկվում է մոդել, որը նկարագրում է հարմոնիկ ալիքի տարածումը լայնքին մածուցիկ առաձգական հաստապատ խողովակում պարունակված հեղուկում:

ON PROPAGATION OF HARMONIC WAVES IN VISCOUSE FLUID WITHIN A THICK-WALLED VISCO-ELASTIC TUBE

R. Ju. AMENZADE

S u m m a r y

A model is developed to describe the propagation of harmonic waves traveling through a Newtonian fluid within a cylindrical thick-walled visco-elastic tube.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Love A. E. H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. New-York, Dover Publ., 1944.
2. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости. «Мир», М., 1965.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. «Наука», М., 1966.