

В. А. БАБЕШКО, В. Е. ВЕКСЛЕР

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В работе рассматриваются задачи о крутильных колебаниях ограниченных упругих тел, имеющих сферические поверхности; последние, в частности, могут уплощаться. Возбуждение колебаний осуществляется приклеенными к поверхности жесткими штампами. В качестве тел берутся: 1) замкнутый сферический слой радиусов $r_1 \geq r_0$, жестко закрепленный по нижнему основанию и подвергнутый кручению с частотой ω круглым симметричным штампом; 2) шайба (сферический слой бесконечного радиуса) с жестко закрепленным основанием и боковой поверхностью, свободной от напряжений.

В работе предложен метод решения указанных задач, основанный на сведении последних посредством факторизации к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что бесконечные системы квазирегулярны. Изучен также вопрос о вырождении сферического слоя в бесконечный слой, который имеет определенное прикладное значение.

Отметим, что динамические задачи для шара, как в случае кручения, так и при наличии нормального воздействия штампа, рассматривались в работе [1], в которой применен метод парных рядов.

1. Получение бесконечной линейной алгебраической системы

Все описанные выше задачи приводятся к решению интегральных уравнений вида

$$\int_0^a K(\gamma, \varphi) q(\varphi) d\varphi = f(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq a \quad (1.1)$$

$$K(\gamma, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\gamma) S_n(\varphi) S_n(\gamma) \sin \varphi \quad (1.2)$$

где в случаях задач 1)–2) имеют место соответственно следующие соотношения:

1) $\lambda_n = n$, $\gamma_1 = b$ — широта в сферической системе координат

$$S_n(\varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}} P_n^{(1)}(\cos \varphi) \quad (1.3)$$

где $P_n^{(1)}(\cos \varphi)$ — функции Лежандра первого рода на разрезе

$$a = \theta_0, f(\theta) = G \alpha r_1 \sin \theta$$

$$\varphi(x) = \alpha r_1^{-\frac{1}{2}} \frac{J_{1-\frac{1}{2}}(\alpha r_1) J_{1-\frac{1}{2}}(\alpha r_0) - J_{1+\frac{1}{2}}(\alpha r_1) J_{1+\frac{1}{2}}(\alpha r_0)}{J_{-\frac{1}{2}}(\alpha r_0) \frac{d}{dr_1} [r_1^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\alpha r_1)] - J_{\frac{3}{2}}(\alpha r_0) \frac{d}{dr_1} [r_1^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\alpha r_1)]}$$
(1.4)

где G — модуль сдвига, α характеризует величину максимального поворота штампа, $J_\nu(z)$ — функции Бесселя;

2) $\varphi_1 = r$ — радиус в полярной системе координат

$$\Delta_\nu(\psi) = \frac{\sqrt{2} J_\nu(\psi, \psi)}{R J_\nu(\psi, R)}, \quad \varphi(x) = \frac{\operatorname{tg} |x^2 - x^2 h|}{|x^2 - x^2|}$$
(1.5)

ψ_0 определяется из условия $J_\nu(\psi_0, R) = 0$, $f(r) = \varepsilon G r$.

Здесь a , R , h — радиусы штампа и шайбы, толщина шайбы соответственно.

Во всех рассмотренных задачах характерным является наличие у мероморфных функций $\varphi(x)$ нулей и полюсов, обладающих асимптотикой следующего вида:

$$x_k = \alpha k + O(1), \quad p_k = \alpha k_1 + O(1)$$
(1.6)

Вещественных нулей и полюсов может быть лишь конечное число. Ограничимся случаем однократных нулей и полюсов.

Применяя известные приемы представления мероморфных функций в виде суммы главных частей и суммируя ряды, ядра интегральных уравнений можем представить в следующем виде:

$$K(\nu, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k [g(\nu, p_k) \theta(\nu, p_k) H(\nu, \nu) + \\ + g(\nu, p_k) \theta(\nu, p_k) H(\nu, \nu)]$$
(1.7)

$$H(\nu, \rho) = 0.5 [1 - \operatorname{sign}(\nu - \rho)]$$

$$s_k = \operatorname{Res} \varphi(p_k)$$

Здесь в случае задачи 1) имеем

$$g(\nu, p_k) = \frac{1}{p_k(p_k + 1)} P_{p_k}^{(1)}(\cos \nu)$$
(1.8)

$$\theta(\nu, p_k) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi p_k P_{p_k}^{(1)}(\cos \nu) - Q_{p_k}^{(1)}(\cos \nu)$$
(1.9)

$Q_{\mu_k}^{(1)}(\cos \nu)$ — функция Лежандра второго рода на разрезе.

В случае задачи 2)

$$g(r, p_k) = \frac{\pi}{2} J_1(p_k r)$$
(1.10)

$$\psi(\rho, \rho_1) = \frac{N_2(\rho_1 R)}{J_2(\rho_1 R)} J_1(\rho_1 \rho) - N_1(\rho_1 \rho) \quad (1.11)$$

$N_l(x)$ — функция Неймана.

Несложно установить общий вид решения интегральных уравнений. Для этого достаточно продолжить правые части на полный отрезок $[0, \pi]$, $[0, R]$ соответственно в случае задач 1)–2), затем обратить левую часть, используя формулы разложения по функциям $S_n(\eta)$, и проделать преобразования, аналогичные предыдущим.

В результате, общий вид решения дается соотношением

$$\psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi(x_k, \eta) \quad (1.12)$$

где $\tau(x_k) = 0$.

В случаях задач 1)–2)

$$1) \quad c_0 = \epsilon \mu r_1 C_1 \varphi(1), \quad x_0 = 1, \quad \psi(x_k, \eta) = P_{x_k}''(\cos \tau) \quad (1.13)$$

$$2) \quad c_0 = \mu R^2 C_1 \operatorname{tg} \gamma h, \quad x_0 = 0, \quad \psi(x_k, r) = \frac{J_1(x_k r)}{J_1(x_k R)} \quad (1.14)$$

Дальнейшее исследование состоит в построении уравнений для определения неизвестных c_k ($k=1, 2, \dots$). С этой целью в уравнение (1.1) подставляется ядро в форме (1.7) и решение в форме (1.12). После интегрирования и приравнивания коэффициентов при $\psi(x_k, \eta)$ получается следующая бесконечная алгебраическая система первого рода:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_{k\tau} = -c_0 d_{10} \quad k=1, 2, \dots \quad (1.15)$$

$$d_{k\tau} = \frac{1}{\alpha_{k\tau}} [\psi(x_k, a)]^2 \frac{d}{da} \psi(x_k, a) \quad (1.16)$$

где в случае задачи 1) $x_k = (x_0 - \rho_k)(x_0 + \rho_k - 1)$

и в случае задачи 2) $x_k = \rho_k^2 - x_0^2$.

2. Исследование бесконечной системы

Бесконечные системы, представленные в форме уравнений первого рода, после замены

$$z_k = \psi(x_k, a) c_k$$

соответственно в случае задач 1) и 2), определены на элементах пространства бесконечных последовательностей S_1 .

$$z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in S_1, \text{ если } \{z_k k^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \in S_2$$

где S_0 — пространство бесконечных последовательностей, стремящихся к 0. После введения нормы $\|z\|_S = \sup_k |z_k k'|$, S превращается в банахово пространство.

Бесконечные системы приводятся с помощью факторизации к системам второго рода. С этой целью бесконечные матрицы расщепляются, причем в ряде случаев выделяется матрица A с элементами

$$a_{kk} = \frac{1}{p_k - x_k} \quad (2.1)$$

А линейная система приводится к виду

$$(A + B)z = f, \quad \text{где } f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \quad (2.2)$$

Оставшаяся матрица B , как показывают оценки, порождает в приведенном выше пространстве S вполне непрерывный оператор.

В работе [2] показано, что в S оператор A имеет обратный ограниченный A^{-1} и построен оператор A^{-1}

$$A^{-1} = (\tau_n, \kappa) = \left(\frac{1}{\{\varphi^{-1}(p_k)\} \varphi^{-1}(x_k) (p_k - x_k)} \right) \quad (2.3)$$

3. Предельный переход к случаю бесконечного слоя

Полагая $r_1 = r_0 + h$ и $r_0 \rightarrow \infty$, можно от случая уравнений сферического слоя перейти к случаю бесконечного слоя толщины h в предположении, что все полюсы комплексные. Требование наличия только комплексных полюсов обуславливается необходимостью удовлетворения в случае слоя принципу излучения Зоммерфельда.

Будем исходить из уравнения (1.1) с ядром в форме (1.7)

Укажем некоторые утверждения относительно функции $\varphi(x)$, определенной равенством (1.4), которые получаются при использовании равномерного асимптотического разложения $\varphi(x)$ с помощью формул Лангера [3]

а) при $r_0 \rightarrow \infty$ p_n и $x_n \rightarrow \dots$

б) $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{p_n}{r_0} = p_n^*$, $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{x_n}{r_0} = x_n^*$, где p_n^* и x_n^* соответственно полюсы и нули функции (1.5)

в) $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \varphi(x, r_0) = \lg \nu h$

Используя эти утверждения, можно показать, что

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{z_n}{r_0} = \nu_i(p_n^* h) \quad (3.1)$$

При предельном переходе будем требовать, чтобы

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 \sin \theta = r, \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_1 \sin \theta_0 = a. \quad (3.2)$$

Сделав замену переменных $r_0 \sin \theta = \rho$, используя (3.1)—(3.2) и формулы [3], связывающие функции Лежандра и Бесселя, и перейдя к пределу при $r_0 \rightarrow \infty$ и $r_1 = r_0 + b_0$, получим

$$\frac{1}{\mu} \int_0^a z(\rho) \rho k(\rho, r) d\rho = zr$$

где

$$k(\rho, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{h} \left| j_1(p_n r) j_1(p_n \rho) - \begin{cases} j_1(p_n r) N_1(p_n \rho), & r < \rho \\ j_1(p_n \rho) N_1(p_n r), & r > \rho \end{cases} \right. \quad (3.3)$$

Можно показать, что (3.3) есть разложение по вычетам интеграла

$$k(\rho, r) = \int_0^{\infty} u \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 - u^2} h}{|x^2 - u^2|} j_1(ur) j_1(u\rho) du \quad (3.3')$$

Таким образом, (3.2) является уравнением для случая бесконечного слоя.

4. Нулевой член асимптотики

Найдем нулевой член решения уравнения (2.2). Для этого надо решить уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} z_n = f_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Используя (2.3), получаем

$$c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{[\varphi^{-1}(p_k)]' \varphi'(-x_n) (p_k - x_n)} \Big|_{\varphi(x_n, a)} \quad (4.2)$$

Рассмотрим f_k как функцию от p_k и на отрезке $[\delta, a]$, $\delta > 0$ аппроксимируем f_k отношением двух полиномов

$$f_k \approx \frac{N_l(p_k)}{M_m(p_k)} \quad (4.3)$$

Увеличивая l и m и уменьшая δ , можно приблизить f_k с любой точностью.

Подставляя (4.3) в (4.2) и используя разложения мероморфной функции на простейшие дроби, получаем

$$\alpha_n = \frac{1}{K'(-x_n)} \sum_{j=1}^m \frac{K'(\xi_j) N_j(\xi_j)}{(x_n - \xi_j) M_j(\xi_j)} - \frac{1}{-(x_n, a)} \quad (4.4)$$

где $M_m(\xi_j) = 0$.

Используя метод работы [4], можно показать, что $q(\rho)$ имеет особенность $(a - \rho)^{-1/2}$.

В заключение отметим, что указанный метод почти без изменений переносится:

а) на случай части сферического слоя, ограниченного круговым конусом, вершина которого совпадает с центром сферы, с закрепленной внутренней поверхностью, с боковой поверхностью как свободной, так и жестко закрепленной;

б) на случай шайбы с закрепленной боковой поверхностью;

в) на случай замкнутого сферического слоя, колеблющегося двумя одинаковыми штампами, симметрично расположенными на его внешней поверхности и на ряд других аналогичных задач.

Институт механики и прикладной математики
Рязанского государственного университета

Получила 19 VI 1974

◀ Ա. ԲԱԲԵՇԿՈՒ, Վ. Ե. ՎԵՔՍԼԵՐ

ՈՒՍՏՈՒՄԱՆ ԳԻՆԱՍՏՐԵԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԱՇԽԵՐԿ
ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐՈՎ ՄԱՐԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ս փ

Տառամուխղ շառամուղ սֆերիկ շերտի և հարթ աափօղակի համար դիտարկվել են սլորման գինամիկական խնդիրներ: Առաջացած առաջին սեղ ինտեգրալ հավասարումը բերվում է անփերջ հանրահաշվական հավասարումների սխեմների, որի կվադրոնգույլարտոթյունը սուղը է արված:

Քանզամ է լուծման գրոյական անգամի ասիմպտոսիկան և եզակիութլունը աամպի եզրի վրա: Ստամնասիրված է սֆերիկ շերտից անփերջ հարթ շերտին անցման աահմանային դեպրը:

DYNAMIC PROBLEM FOR TWISTED BODIES WITH SPHERICAL SURFACES

V. A. BABESHKO, V. E. VEXLER

S u m m a r y

Examined are dynamic problems of twisting a spherical layer and a flat washer by an oscillating punch. The integral equations obtained are reduced to an infinite linear algebraic system, with subsequent re-

gularization of the latter. The zero member of the asymptotic solution is found as well as the solution peculiarity at the punch border. The maximum transition from the spherical layer to the infinite flat one is also investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х., Баблонн А. А. О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
2. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, т. 30, вып. 4, 1966.
3. Бейтмен Г., Эрдси А. Высшие трансцендентные функции. «Наука», М., т. 2, 1966.
4. Бабешко В. А., Гарагуля В. А. Асимптотическое решение задачи о действии штампа круглого и плоского на упругий слой. Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1971.