

Ю. А. БОРИЦ

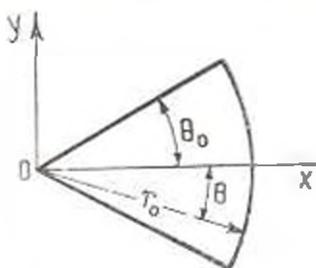
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА В НАПРЯЖЕНИЯХ

Плоская задача теории упругости для полукруга рассматривалась в работах [1—5]. В [6] рассматривается плоская задача для сектора произвольного угла раствора при однородных краевых условиях на прямолинейных участках границы.

В настоящей работе, следуя [7], дается решение плоской задачи теории упругости для кругового сектора произвольного угла раствора при произвольных граничных условиях. Задача сведена к алгебраическим соотношениям смешанного типа, включающим интегральные уравнения и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Доказывается квазирегулярность последних, для неизвестных устанавливается закон асимптотических выражений Б. М. Кояловича [8], устанавливается характер поведения смещений и напряжений в угловых точках.

§ 1. Постановка задачи и построение общего решения уравнений Ляме

Рассматривается плоская задача теории упругости для кругового сектора радиуса r_0 и угла раствора θ_0 (фиг. 1) при задании на границе напря-



(Фиг. 1.

жений. При рассмотрении задачи существенного упрощения выкладок добиваемся выделением симметричной и антисимметричной части поля напряжений и деформаций. Остановимся подробно на случае симметричного относительно полярной оси $\theta_0 = 0$ поля, то есть решаем следующую граничную задачу:

$$\frac{r}{2G} \tau_{\theta r}(r, \theta) = \psi(r) \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (1.1)$$

$$\frac{r}{2G} \tau_{r\theta}(r, \theta) = \varphi(r) \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (1.2)$$

$$\frac{r}{2G} \tau_r(r, \theta) = \gamma(\theta) \quad \text{при } r = r_0, \quad 0 \leq |\theta| \leq \theta_0 \quad (1.3)$$

$$\frac{r}{2G} \tau_\theta(r, \theta) = f(\theta) \quad \text{при } r = r_0, \quad 0 \leq |\theta| \leq \theta_0 \quad (1.4)$$

причем вследствие симметрии функции $f(\theta)$ и $\gamma(\theta)$ должны удовлетворять условиям

$$f(\theta) = f(-\theta), \quad \gamma(\theta) = -\gamma(-\theta)$$

Анализ граничных условий (1.1)–(1.4) указывает, что решение уравнений Ляме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{m}{m-2} \frac{1}{r} \frac{\partial^4 v}{\partial r^4} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

должно содержать по две произвольные функции на интервалах $0 \leq r \leq r_0$ и $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$. В равенствах (1.5) m — число Пуассона,

$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$ — объемное расширение. В связи с этим в соответствии с идеей Ляме [9] искомые компоненты вектора упругих смещений представим в виде

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= B_0 e^{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(m-2) - m\lambda_n] C_n e^{i(\lambda_n+1)\theta} - B_n e^{i(\lambda_n-1)\theta} \} \cos \alpha_n \theta + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [(3m-4)c_1(\tau) - m\tau b_2(\tau) + c_2(\tau)] + \\ &+ \operatorname{sh} \theta \sin \theta [(3m-4)b_1(\tau) - m\tau c_1(\tau) + b_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [(3m-4)b_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\ &+ \operatorname{sh} \theta \sin \theta [m\tau b_1(\tau) - (3m-4)c_1(\tau) - c_2(\tau)] \} \sin \tau d\tau \quad (1.6) \\ v(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ [m\lambda_n - 4(m-1)] C_n e^{i(\lambda_n+1)\theta} + B_n e^{i(\lambda_n-1)\theta} \} \sin \alpha_n \theta + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{sh} \theta \cos \theta [(3m-4)b_1(\tau) - m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] - \\ &- \operatorname{ch} \theta \sin \theta [m\tau b_1(\tau) + (3m-4)c_1(\tau) + c_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \operatorname{sh} \alpha t \cos \theta [c_2(\tau) - (3m-4)c_1(\tau) - m b_1(\tau)] + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \alpha t \sin \theta [m c_1(\tau) - (3m-4)b_1(\tau) + b_2(\tau)] \sin \alpha t d\tau \right.$$

Здесь $\alpha_n = \frac{n\pi}{\theta_0}$.

При решении, следуя [7], введена новая независимая переменная t в радиальном направлении по формуле

$$t = \ln \frac{r}{r_0}$$

которая будет изменяться в интервале $-\infty \leq t \leq 0$, если $0 \leq r \leq r_0$.

В представлении решения уравнений Ляме (1.6) выделены три части. Первая часть, содержащая B_n , дает возможность выбрать несомоуравновешенные составляющие в напряжениях. Вторая часть (суммирование по n) дает возможность удовлетворить граничным условиям на дуговой части сектора. Эта часть решения содержит две произвольные функции на интервале $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, представленные рядами по $\sin \alpha_n \theta$ и $\cos \alpha_n \theta$. Третья часть (интегрирование по τ) является решением для бесконечного клина и также содержит две произвольные на интервале $-\infty \leq t \leq 0$ функции, представленные интегралами Фурье. Отсюда следует, что функционального произвола в решении (1.6) достаточно для удовлетворения граничным условиям (1.1)–(1.4) на сторонах сектора.

Выражения для компонентов тензора напряжений находим из (1.6) с помощью соотношений закона Гука

$$\frac{r}{2G} \sigma_r(t, \theta) = \frac{m}{m-2} B_0 e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-B_n (x_n - 1) e^{t(x_n - 1)} - \right. \\ \left. - m(x_n + 1)(x_n - 2) C_n e^{t(x_n + 1)} \right] \cos \alpha_n \theta + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \cos \alpha t [\operatorname{sh} \alpha t \sin \theta (m b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) - c_2(\tau)) + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \alpha t \cos \theta (3m b_1(\tau) + m c_1(\tau) - b_2(\tau))] + \right. \\ \left. + \sin \alpha t [\operatorname{ch} \alpha t \cos \theta (m b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) - c_2(\tau)) + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \alpha t \sin \theta (3m b_1(\tau) - m c_1(\tau) - b_2(\tau))] \right\} d\tau \\ \frac{r}{2G} \sigma_\theta(t, \theta) = \frac{m}{m-2} B_0 e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(x_n - 1) B_n e^{t(x_n - 1)} + \right. \\ \left. + m(x_n - 1)(x_n - 2) C_n e^{t(x_n + 1)} \right] \cos \alpha_n \theta$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \theta \sin \theta [-mc_1(\tau) - m^2b_1(\tau) - c_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{ch} \theta \cos \theta [-mc_1(\tau) - m^2b_2(\tau) - c_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \theta \sin \theta [-mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \sin \tau d\tau \quad (1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{2G} \tau_{\theta}(t, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (2n-1) B_n e^{n(a_n-1)\tau} - m^2 a_n (2n-1) C_n e^{2(a_n+1)\tau} \} \sin 2n\theta + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{sh} \theta \cos \theta [m^2c_1(\tau) - b_2(\tau) - mb_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta \sin \theta [m^2b_1(\tau) + c_2(\tau) - mc_1(\tau)] \} \sin \tau d\tau + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \operatorname{sh} \theta \cos \theta [c_2(\tau) - m^2b_1(\tau) + mc_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta \sin \theta [m^2c_1(\tau) - mb_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \cos \tau d\tau
\end{aligned}$$

§ 2. Удовлетворение граничных условий. Анализ бесконечных систем

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ch} \theta_0 \cos \theta_0 [-mc_1(\tau) - m^2b_1(\tau) - c_2(\tau)] - \\
& - \operatorname{sh} \theta_0 \sin \theta_0 [-mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] = 0 \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{m-2} \frac{B_0}{1-\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 \left\{ \frac{(2n-1)^2 B_n}{\tau^2 - (2n-1)^2} + \frac{m(a_n+1)^2 (2n-2)}{\tau^2 - (2n+1)^2} C_n \right\} + \\
+ \operatorname{ch} \theta_0 \cos \theta_0 [mb_1(\tau) - m^2c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\
+ \operatorname{sh} \theta_0 \sin \theta_0 [-mc_1(\tau) - m^2b_1(\tau) - c_2(\tau)] = \bar{\varphi}(\tau) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \{ \operatorname{sh} \theta_0 \cos \theta_0 [m^2c_1(\tau) - b_2(\tau) + mb_1(\tau)] + \\
& + \operatorname{ch} \theta_0 \sin \theta_0 [m^2b_1(\tau) + c_2(\tau) - mc_1(\tau)] \} = \bar{\varphi}(\tau) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sh} \theta_0 \cos \theta_0 [c_2(\tau) - m^2b_1(\tau) + mc_1(\tau)] + \\
& - \operatorname{ch} \theta_0 \sin \theta_0 [m^2c_1(\tau) - mb_1(\tau) - b_2(\tau)] = 0 \quad (2.4)
\end{aligned}$$

При получении условий (2.1)—(2.4) использована следующая формула:

$$e^{i\alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{\alpha^2 - t^2} \cos t d t$$

где $\alpha = \text{const}$. При этом функции $\bar{\varphi}(\tau)$ и $\bar{\psi}(\tau)$ равны

$$\bar{\psi}(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \cos t d t, \quad \bar{\varphi}(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin t d t$$

Вводим две функции $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ посредством следующих формул:

$$\tau^2 b_1(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} \{ \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 x_1(\tau) + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 x_2(\tau) \} \quad (2.5)$$

$$\tau^2 c_2(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} \{ \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 x_1(\tau) - \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 x_2(\tau) \}$$

Здесь функция $\Delta(\tau, \theta)$ равняется $\Delta(\tau, \theta_0) = \text{ch}^2 \tau \theta_0 \sin^2 \theta_0 + \text{sh}^2 \tau \theta_0 \cos^2 \theta_0$.

Из условий (2.3) и (2.4) с помощью (2.5) легко найдем, что

$$\begin{aligned} \tau^2 c_1(\tau) = & \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} \{ -m(\tau \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0) x_1(\tau) + \\ & + m(\tau \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 - \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0) x_2(\tau) + \tau \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 \bar{\varphi}(\tau) \} \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^2 b_0(\tau) = & \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)} \{ m(\tau \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 - \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0) x_1(\tau) + \\ & + m(\tau \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0) x_2(\tau) - \tau \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 \bar{\psi}(\tau) \} \end{aligned}$$

Из (2.1) с помощью (2.5) и (2.6) получаем, что

$$x_1(\tau) = \frac{\tau \sin \theta_0 \cos \theta_0}{T(\tau)} \bar{\varphi}(\tau) \quad (2.7)$$

Здесь

$$T(\tau) = 2m(\text{sh } \tau \theta_0 \text{ch } \tau \theta_0 + \tau \sin \theta_0 \cos \theta_0)$$

Из граничных условий (1.3) и (1.4) с помощью разложений функций $\text{sh } \tau \theta \sin \theta$, $\text{ch } \tau \theta \cos \theta$, $\text{sh } \tau \theta \cos \theta$, $\text{ch } \tau \theta \sin \theta$ в тригонометрические ряды на интервале $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ получаем следующие функциональные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m-2} B_0 + \frac{2}{\pi \theta_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau^2}{1+\tau^2} \{ \text{ch } \tau \theta_0 \sin \theta_0 [m b_1(\tau) - 3m c_1(\tau) - c_2(\tau)] + \\ + \text{sh } \tau \theta_0 \cos \theta_0 [3m b_1(\tau) + m c_1(\tau) - b_0(\tau)] \} d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{1+\tau^2} \{ \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [3mb_1(\tau) - m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] - \\
& - \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [m\tau b_2(\tau) - 3mc_1(\tau) + c_2(\tau)] \} d\tau = f_0 \\
& - B_n (x_n - 1) - m (x_n + 1) (x_n - 2) C_n - \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [mb_1(\tau) - 3mc_1(\tau) + c_2(\tau)] + \\
& + \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [3mb_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} + \frac{1}{\tau^2 - (x_n - 1)^2} \right| d\tau = \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [m\tau b_2(\tau) - 3mc_1(\tau) + c_2(\tau)] + \\
& - \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [3mb_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{x_n + 1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} - \frac{x_n - 1}{\tau^2 - (x_n - 1)^2} \right| d\tau = f_n \quad (2.8) \\
& + (x_n - 1) B_n + m x_n (x_n + 1) C_n + \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [c_2(\tau) - m\tau b_1(\tau) + mc_1(\tau)] - \\
& - \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [m\tau c_2(\tau) + mb_1(\tau) + b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{1}{\tau^2 + (x_n + 1)^2} - \frac{1}{\tau^2 + (x_n - 1)^2} \right| d\tau = \\
& + \frac{2(-1)^n}{\pi b_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau \{ \operatorname{sh} \tau b_0 \cos b_0 [c_2(\tau) - m\tau b_1(\tau) + mc_1(\tau)] - \\
& - \operatorname{ch} \tau b_0 \sin b_0 [m\tau c_2(\tau) + mb_1(\tau) + b_2(\tau)] \} \\
& \left| \frac{x_n + 1}{\tau^2 - (x_n + 1)^2} + \frac{x_n - 1}{\tau^2 + (x_n - 1)^2} \right| d\tau = \gamma_n
\end{aligned}$$

Здесь f_0, f_n, γ_n — коэффициенты Фурье функций $f(\theta)$ и $\tau(\theta)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
p_n &= -\frac{b_0}{2} (x_n^2 - 1) (-1)^n C_n \\
q_n &= \frac{b_0}{2m} \frac{(x_n - 1)^2}{x_n} (-1)^n E_n
\end{aligned} \quad (2.9)$$

С помощью (2.5), (2.6), (2.7) и (2.9) функциональные соотношения (2.2) и (2.8) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{m-2}{m} (f_0 + \Phi_0) \\
 &= \frac{2m}{b_0} \frac{z_n}{z_n-1} q_n - \frac{2m}{b_0} \frac{z_n-2}{z_n-1} p_n \\
 &+ \frac{16ma_n^2}{\pi b_0} \int_0^{\bar{r}} \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2 + (z_n+1)^2][\tau^2 - (z_n-1)^2]} d\tau - f_n (-1)^n + \Phi_1(\tau) \\
 &= \frac{2m}{b_0} \frac{z_n q_n}{z_n-1} - \frac{2m}{b_0} \frac{z_n p_n}{z_n-1} \\
 &+ \frac{16mz_n}{\pi b_0} \int_0^{\bar{r}} \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2 + (z_n+1)^2][\tau^2 - (z_n-1)^2]} d\tau - f_n (-1)^n + \Phi_2(\tau) \quad (2.10) \\
 x_2(\tau) &= \frac{\tau \Delta(\tau, b_0)}{T(\tau)} \left\{ \bar{\varphi}(\tau) + \frac{\text{sh } \tau b_0 \text{ ch } \tau b_0}{\tau \Delta(\tau, b_0)} \bar{\varphi}(\tau) - \frac{m}{m-2} \frac{B_0}{1-\tau^2} \right. \\
 &- \frac{2m}{b_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{z_n q_n}{\tau^2 + (z_n+1)^2} - \frac{z_n p_n}{\tau^2 + (z_n-1)^2} - \frac{z_n p_n}{\tau^2 + (z_n-1)^2} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{b_0 p_n}{(z_n-1)[\tau^2 - (z_n+1)^2]} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Функции $\Phi_0(\tau)$, $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$ зависят от внешней нагрузки.

Асимптотический анализ формул (1.7) показывает, что для того, чтобы напряжения были конечными в угловых точках сектора, необходимо, чтобы функция $x_2(\tau)$ имела такое асимптотическое поведение

$$x_2(\tau) \sim x_0 \quad (2.11)$$

С помощью асимптотического значения для интеграла

$$\int_0^{\bar{r}} \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2 - (z_n+1)^2][\tau^2 + (z_n-1)^2]} d\tau \sim \frac{\pi x_0}{4z_n^2} \quad (2.12)$$

полученного с учетом условия (2.11), из второго и третьего уравнения системы (2.10) следует, что

$$p_n \sim q_n \sim x_0 \quad (2.13)$$

при этом необходимо, чтобы функции $l(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $\bar{\varphi}(\tau)$, задающие внешнюю нагрузку, удовлетворяли таким асимптотическим условиям

$$f_n \sim z_n \sim \frac{1}{z_n^{1+\varepsilon}}, \quad \bar{\varphi}(\tau) \sim \frac{1}{z_n^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0 \quad (2.14)$$

С учетом асимптотических значений для следующих сумм [10], полученных с учетом (2.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2 q_n}{[z^2 - (z_n - 1)^2][z^2 - (z_n + 1)^2]} = \frac{x_0}{4} \left[\frac{q_0}{z} \operatorname{cth} z \theta_0 - \frac{q_0^2}{\operatorname{sh}^2 z \theta_0} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{z^2 - (z_n + 1)^2} \sim \frac{x_0}{2z^2} [-1 - z \theta_0 \operatorname{cth} z \theta_0] \quad (2.15)$$

из последнего уравнения системы (2.10) снова получим равенство (2.11), при этом функция $\bar{\psi}(z)$ должна удовлетворять условию

$$\bar{\psi}(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z > 0 \quad (2.16)$$

Квазирегулярность системы (2.10) в смысле сходимости метода последовательных приближений [8, 11] следует из (2.12), (2.14) — (2.16).

§ 3. Анализ формул для напряжений и смещений

Теперь рассмотрим напряжения и смещения.

С учетом (2.5), (2.6) и (2.9) из формул (1.7) легко получим, например, для напряжения $\sigma_r(t, 0)$ выражение

$$\begin{aligned} \frac{r}{2G} \sigma_r(t, 0) &= \frac{m}{m-2} B_0 e^t + \frac{2m}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ -\frac{z_n}{z_n-1} q_n e^{i(z_n-1)t} + \right. \\ &+ \left. \frac{z_n-2}{z_n-1} \theta_n e^{i(z_n+1)t} \right\} \cos z_n \theta + \frac{4m}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\Delta(z, \theta_0)} \left\{ \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0 - \right. \\ &- \left. \operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 \right\} \frac{1}{z} (\operatorname{sh} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \sin \theta \sin \theta_0 + \\ &- \operatorname{ch} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \cos \theta \cos \theta_0) \left| \cos zt + \frac{2}{z} (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 - \right. \\ &- \left. \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0) \sin zt \right| x_0(z) dz + \\ &- \frac{4m}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{z} (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 - \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0) \cos zt + \right. \\ &- \left. (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \cos \theta \sin \theta_0 - \operatorname{sh} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \sin \theta \cos \theta_0) \right. \\ &- \left. \frac{1}{z} (\operatorname{ch} z \theta \operatorname{sh} z \theta_0 \cos \theta \cos \theta_0 + \operatorname{sh} z \theta \operatorname{ch} z \theta_0 \sin \theta \sin \theta_0) \right\} \sin zt \left| \frac{x_0(z)}{\Delta(z, \theta_0)} dz + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} (\operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau \theta_0 \sin \tau \sin \theta_0 + \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau \theta_0 \cos \theta_0 \cos \tau) \cos \tau +$$

$$+ (\operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau \theta_0 \sin \tau \cos \theta_0 - \operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} \tau \theta_0 \cos \tau \cos \theta_0 \sin \tau) \sin \tau \frac{\bar{\sigma}(\tau)}{\Delta(\tau, \theta_0)} d\tau \quad (2.17)$$

Из закона асимптотических выражений (2.11), (2.13) следует, что непрерывная и дискретная части напряжения $\sigma_r(t, \theta)$ имеют каждая отдельно особенность при стремлении точки (t, θ) в угловую точку сектора. Заменяя в (2.17) функции их асимптотическими значениями, получим, например, на дуге сектора $r=0$

$$\frac{r_0}{2G} \sigma_r(0, \theta) = -\frac{4m}{t_0} x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \tau_n \theta}{a_n} + \frac{4m}{\pi} x_0 \int_0^{\theta} \frac{e^{-\tau(\theta-\tau)}}{\tau} d\tau + 0 \quad (1)$$

После соответствующих вычислений [12] получим

$$\frac{r_0}{2G} \sigma_r(0, \theta) \sim \frac{4m}{\pi} x_0 \left\{ \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2\theta_0} \right) - \ln A(\theta_0 - \theta) \right\} + 0 \quad (1)$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\frac{r_0}{2G} \sigma_r(0, \theta_0) \sim \frac{4m}{\pi} x_0 \ln \frac{\pi}{4\theta_0} + 0 \quad (1)$$

то есть напряжение $\sigma_r(t, \theta)$ в угловой точке имеет конечное значение. Точно также на основе (2.11), (2.13) легко исследуется поведение других напряжений, а также смещений. Они принимают конечные значения во всей области сектора. Заметим, что напряжение $\tau_{\theta r}(t, \theta)$ на прямолинейных частях сектора удовлетворяется точно.

Случай антисимметричного поля рассматривается совершенно аналогично.

Урванкский научно-исследовательский институт гидротехники в Мелитополе

Получила 25 III 1971

Зав. И. ВАРСЕ

ԵՐԱՆԱԿՅԻՆ ՍԵՆՏՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌՈՂԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՏԵԽՆԻԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ

Խնդրեք բերել է թանկարժեք շահասարույններ և գծային ճանրատաշակահան շահասարույնների անվերջ սխառեմների պարունակող ֆառեր շահասարույնների լուծմանը:

Աղագրուղիում է ստացված հավասարումների կլարսը սեզույարութիւնը և տարածվում են սնհայտների համար արհմդարտական արտահայտութիւնները.

Անկտորի անկյունային կետերի համար որոշվում է շարումների և տեղափոխութիւնների վարրի բնոյթը.

A PLANE PROBLEM IN THE ELASTICITY THEORY FOR A ROUND SECTOR UNDER STRESS

Yu. A. BORSHCH

S u m m a r y

The problem is reduced to the solution of mixed type algebraic relations involving integral equations and infinite systems of linear algebraic equations. A quasi-regularity of the latter, and a law of asymptotic expressions are proved for unknowns, the mode of displacements and stresses at the corner points of the sector is found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Савицкий О. М. Применение метода дополнительных волнений к решению задачи об изгибе плит, плоской задаче и задачи о кручении призматических стержней. ПММ. 13 вып. 5, 1949.
2. Уфлянд Я. С. Билярные координаты в теории упругости. ГИИТЛ. М.—Л., 1950.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. Наука, А., 1967.
4. Шерман Д. И. Решение задачи Дирхле для кругового кольца и его некоторые применения в теории потенциала и теории упругости. Приложение теории функции в механике сплошной среды. Тр. между. симпози. в Тбилиси 17—23 сентября 1963 г. Наука, М., 1965.
5. Паладин А. П. Математические методы двумерной упругости. Наука, М., 1973.
6. Ramachandra Rao B. S., Kulkarni C. S., Shimpi K. P. The sector problem in plane elastostatics. Int. J. Eng. Sci., 11, No 5, 1973.
7. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Осесимметричная задача теории упругости (термоупругости) для усеченного конуса. Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Научова думка, Киев, вып. 10, 1970.
8. Котлович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений. Известия физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. III, 1931.
9. Lamé G. Leçons sur la Théorie Mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1852.
10. Поля Г., Сеге I. Задачи и теоремы из анализа, ч. I. ГИИТЛ, 1965.
11. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями. Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций, в. 8. Научова думка, Киев, 1969.
12. Гринштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, М., 1971.