ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 5, 1975 Механика

В. С. САРКИСЯН, В. Г. МХИТАРЯН, А. О. ОВСЕПЯН

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ СТЕПЕННО УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ НАКЛАДКИ К ДЕФОРМИРУЕМОМУ ОСНОВАНИЮ

Исследованию задач о передаче нагрузок от накладок малой толщины к деформируемым массивным телам в постановке линейной теории упругости посвящены многие работы. Они опираются на известные предположения, предложенные в [1, 2], и с достаточной полнотой отражены в [2, 3].

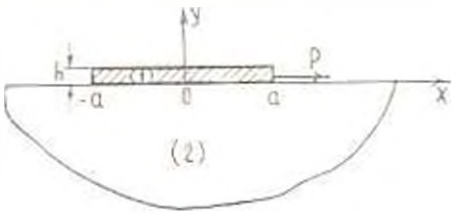
Эти же задачи в постановке какой-либо нелинейной теории механики деформируемых твердых тел, насколько нам известно, не ставились и не исследовались. В настоящей работе на основе [2, 4, 5, 6] рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от степенно упрочняющейся накладки малой толщины к деформируемому основанию в виде полуплоскости, изготовленной также из степенно упрочняющегося материала. Эта задача ставится здесь в постановке нелинейной теории установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, предложенной Н. Х. Арутюняном [4, 5]. Такую постановку задачи можно трактовать также в смысле нелинейной теории упругости.

Решение указанной задачи в общем случае сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях. В качестве первого необходимого этапа построения эффективного решения этого уравнения далее рассматривается тот частный случай, когда имеется линейно-упругая полуплоскость. В этом случае определяющее интегро-дифференциальное уравнение преобразуется в нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. На основании результатов теории таких уравнений [9], в разбираемом случае доказывается существование и единственность решений полученных при этом бесконечной системы и соответствующей урезанной конечной системы нелинейных уравнений. Одновременно доказывается, что решение урезанной конечной системы нелинейных уравнений стремится к решению исходной бесконечной системы. Кроме того, доказывается, что существование и единственность решения указанных систем следует также из принципа неподвижной точки Банаха, который позволяет искомое решение этих систем построить методом последовательных приближений.

В заключение приводятся числовые результаты и при их помощи строятся графики осевых и тангенциальных контактных напряжений.

1. Пусть деформируемая полуплоскость усилена на конечном отрезке $[-a, a]$ своей границы упругим креплением в виде приваренной или приклеенной к ней накладкой конечной длины и достаточно малой постоянной

толщины h. Пусть, далее, к одному из концов накладки приложена сосредоточенная горизонтальная сила P (фиг. 1).



Фиг. 1.

Будем считать, что материалы накладки и полуплоскости степенно упрочняющиеся, то есть для них имеет место нелинейное соотношение вида $\varepsilon_i = A\sigma_i^{\alpha}$ $(\alpha > 1)$, где ε_i — интенсивность деформаций, A — коэффициент ползучести, σ_i — интенсивность напряжений, α — показатель ползучести.

Это соотношение, как известно [4, 5], имеет довольно широкий диапазон приложения, где основанные на нем решения контактных задач вполне реально отражают механическую сущность процесса сжатия деформируемых твердых тел.

В такой постановке задачи требуется определить закон распределения тангенциальных контактных напряжений под накладкой.

Сначала выведем разрешающее функциональное уравнение.

Из уравнения равновесия отрезка $[-a, x]$ элемента накладки, для которой имеют место обычные предположения из [1, 2], можно записать

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{1}{h}\int_{-a}^{x} \tau^{(1)}(s)\,ds \tag{1.1}$$

Затем учитывая, что $\varepsilon_x^{(1)} = A_1 [\sigma_x^{(1)}]^{n_1}$, получим

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = A_1 \left| \frac{1}{h}\int_{-a}^{x} \tau^{(1)}(s)\,ds \right|^{n_1} \tag{1.2}$$

Здесь $u^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек накладки, A_1 — коэффициент ползучести, n_1 — показатель ползучести для материала накладки, $\tau^{(1)}(x)$ — тангенциальные контактные напряжения, действующие на накладку вдоль отрезка $[-a, a]$ соединения ее с полуплоскостью, $\sigma_x^{(1)}$ — осевое напряжение в сечении x накладки.

С другой стороны, согласно обобщенному принципу суперпозиции [4, 5, 6], перемещения $u^{(2)}(x)$ граничных точек степенно упрочняющейся полуплоскости, когда на конечном отрезке $[-a, a]$ ее границы действуют тангенциальные напряжения интенсивности $\tau^{(2)}(x)$, определяются формулой

$$u^{(2)}(x) = g \left| \int_{-a}^{a} \frac{\tau^{(2)}(s)\,ds}{|s-x|^{\gamma_2}} \right|^{n_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{n_2} \tag{1.3}$$

где g—известная постоянная величина, α_2 — показатель ползучести для материала полуплоскости, притом здесь считается, что $1<\alpha_2<2$.

На участке $|-a, a|$ контакта упругой накладки с полуплоскостью должно иметь место условие

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx}=\frac{du^{(2)}(x)}{dx} \quad (y=0,\ |x|<a) \tag{1.4}$$

При помощи (1.2), (1.3) и (1.4) для определения контактных напряжений получим искомое функциональное уравнение

$$\frac{d}{dx}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi'(s)\,ds}{|s-x|^{1-\alpha_2}}=\frac{A}{gh^{\alpha_2}}[\varphi(x)]^{\alpha_2} \tag{1.5}$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-a)=0,\quad \varphi(a)=P \tag{1.6}$$

эквивалентных условию равновесия накладки.

Здесь

$$\tau(x)=\tau^{(1)}(x)=\tau^{(2)}(x),\quad \varphi(x)=\int_{-a}^{x}\tau(s)\,ds$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6).

2. Рассмотрим один важный частный случай общего уравнения (1.5), указывающий на путь эффективного построения его решения. Предположим, что имеется линейно-упругая полуплоскость, что соответствует случаю $\alpha_2=1$. Считая, что эта полуплоскость находится в условиях плоской деформации, будем иметь

$$u^{(2)}(x)=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)\,ds+\text{const} \tag{2.1}$$

где E_2— модуль упругости полуплоскости, ν — коэффициент Пуассона. Формула (2.1) в сочетании с соотношениями (1.2) и (1.4) задачу определения тангенциальных контактных напряжений в данном случае сводит к решению следующего нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x}=k[\varphi(x)]^{\alpha_2} \tag{2.2}$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-1)=0, \quad \varphi(1)=1 \tag{2.3}$$

Здесь

$$\varphi(x)=\frac{\tau(ax)}{p}, \quad \tau(ax)=a\int_{-1}^{x}\tau(as)\,ds, \quad \lambda=\frac{a\pi A_1 E_* P^{\alpha_1-1}}{2(1-\nu^2)h^{\alpha_1}}$$

а интеграл в (2.2) понимается в смысле главного значения по Коши.

Уравнение (2.2) в случае несжимаемости материала полуплоскости можно было бы получить также из (1.5) при помощи предельного перехода $\mu_2\to 1$.

Таким образом, решение контактной задачи для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе степенно упрочняющейся накладкой конечной длины, сводится к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3).

Отметим, что при $\alpha_1=1$ имеем случай линейно-упругой накладки, и соответствующее уравнение (2.2) при условиях (2.3) исследовано во многих работах, в частности, в работах [2, 7].

Интегро-дифференциальное уравнение (2.2) при граничных условиях (2.3) преобразуем теперь к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению. С этой целью пользуемся известной формулой [8] обращения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши, которая применительно к обсуждаемому случаю даст

$$\varphi'(x)=-\frac{\lambda}{\pi^2\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-s^2}\,[\varphi(s)]^{\alpha_1}\frac{ds}{s-x}-\frac{C_0}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.4}$$

Интегрируя обе части уравнения (2.4), будем иметь

$$\varphi(x)=-\frac{\lambda}{\pi^2}\int_{-1}^{x}[\varphi(s)]^{\alpha_1}\ln\frac{1-sx+\sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}{1-sx-\sqrt{(1-s^2)(1-x^2)}}\,ds+$$

$$-C_0\arcsin x-C \tag{2.5}$$

Постоянные C_0 и C определяются из граничных условий (2.3), которые дают $C_0=1/\pi$, $C=1/2$.

Преобразуя дальше полученное нелинейное интегральное уравнение (2.5), перейдем в нем к новым переменным $x=\cos\pi t$, $s=\cos\pi u$ $0\leqslant t,\ u\leqslant 1$. После некоторых элементарных преобразований в результате будем иметь нелинейное уравнение требуемого вида:

$$f(t)-\int_0^1 K(t,u)f[u,f(u)]\,du=0 \tag{2.6}$$

где

$$y(t) = y_0(t) + t - 1, \quad y_0(t) = \psi(\cos \pi t)$$

$$f[t, y(t)] = \frac{\lambda}{\pi} \sin \pi t \, [y(t) - t + 1]^{\alpha}$$

$$K(t, u) = \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi (u + t)}{2}}{\sin \frac{\pi (u - t)}{2}} \right| \quad 0 < t, \ u < 1 \tag{2.7}$$

Таким образом, нелинейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (2.2) при граничных условиях (2.3) эквивалентно нелинейному интегральному уравнению (2.6).

3. Приступим к решению уравнения (2.6). Легко видеть, что нелинейное интегральное уравнение (2.6) представляет собой уравнение типа Гаммерштейна [9]. А именно, очевидно, что:

1) ядро $K(t, u)$ квадратично суммируемо на квадрате $0 \leqslant t, \ u \leqslant 1$, а второе итерированное ядро $K_2(t, u)$ непрерывно*;

2) ядро $K(t, u)$ положительно определенное;

3) ядро $K(t, u)$ симметрично.

При этих предположениях, как известно [7], решение уравнения (2.6), если оно существует, можно представить рядом

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m \varphi_m(t) \tag{3.1}$$

Здесь $\{\varphi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(t, u)$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно, а $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, определяющиеся из следующей эквивалентной исходному нелинейному интегральному уравнению (2.6) нелинейной бесконечной системы уравнений:

$$X_m = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 f\left[u, \sum_{k=1}^{\infty} X_k \varphi_k(u)\right] \varphi_m(u) \, du \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

Отправляясь от (3.1), приближенное решение уравнения (2.6) представим в виде

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{n} X_{n,m} \varphi_m(t) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

---

* В связи с указанным условием для второго итерированного ядра $K_2(t, u)$ следует отметить, что в дальнейшем будет использовано свойство равномерной сходимости обсуждаемого в теореме Гильберта—Шмидта ряда, обеспечиваемое [9] непрерывностью только функции $K(t, u)$. Это свойство в разбираемом случае непосредственно вытекает из конкретного вида собственных функций и собственных чисел ядра $K(t, u)$.

Последняя формула, аналогично предыдущему, задачу определения неизвестных коэффициентов $X_{n,m}$ $(m=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ сводит к решению следующей конечной нелинейной системы:

$$X_{n,m} = -\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f\left|u,\ \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}\tau_k(u)\right|\tau_m(u)\,du \qquad (m=1, 2, \ldots, n) \quad (3.4)$$

Докажем, что решение системы (3.4) существует и единственно. Кроме того, докажем, что приближенное решение $\chi_n(t)$ при $n\to\infty$ стремится к решению $\chi(t)$ исходного нелинейного уравнения (2.6). Тем самым будет доказано, что решение нелинейного интегрального уравнения (2.6) существует, единственно и его со сколь угодно большой точностью можно аппроксимировать функцией $\chi_n(t)$ из формулы (3.3), которая, следовательно, действительно представляет приближенное решение.

С этой целью сначала заметим, что соотношения, связывающие собственные функции и соответствующие собственные числа ядра $K(t, u)$ имеют вид

$$n\int_0^1 \ln\left|\frac{\sin\frac{\pi(u+t)}{2}}{\sin\frac{\pi(u-t)}{2}}\right|\sin\pi nu\,du = \sin\pi nt \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

Следовательно, в данном случае

$$\lambda_n = n, \qquad \tau_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\pi nt \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

Далее очевидно, что функция $f(t, y)$ согласно (2.7), имеющая вид

$$f(t, y) = \frac{\lambda}{\pi}\sin\pi t\ (y-t+1)^{\alpha_1} \qquad (\alpha_1 > -1)$$

непрерывна. Кроме того, для нее имеет место неравенство*

$$|f(t, y)| \leqslant C_1|y| + C_2 \qquad (a)$$

где $C_1=C_2=\lambda/\pi$. Согласно результатам из [9], при $\lambda<\pi$ конечная система нелинейных уравнений (3.4) имеет, по крайней мере, одно непрерывное решение.

---

* Справедливость этого неравенства вытекает из следующих соображений. Поскольку контактные напряжения $\tau(x)$ на отрезке $[-a, a]$ неотрицательны, то функция $\psi(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ возрастает. При этом вследствие граничных условий (2.3) будем иметь $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$. Поэтому

$$0 \leqslant y+1-t \leqslant 1, \qquad y = \chi(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

и очевидно, что $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Приняв во внимание этот факт, можем записать

$$|f(t, y)| = \frac{\lambda}{\pi}|\sin\pi(y-t+1)^{\alpha_1}| \leqslant \frac{\lambda}{\pi}(y-t+1)^{\alpha_1} \leqslant \frac{\lambda}{\pi}(y-t+1) \leqslant \frac{\lambda}{\pi}(|y|+1)$$

Единственность решения этой системы непосредственно [9] следует из очевидного неравенства*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \frac{\lambda}{\pi} \alpha_1 |y_1 - y_2| \tag{6}$$

где должно быть $\lambda\alpha_1\pi^{-1} < 1$. Отсюда следует, что при $\lambda < \pi/\alpha_1$ эта система имеет самое большее одно решение.

Таким образом, при $\lambda = \min(\pi, \pi/\alpha_1) = \pi/\alpha_1$ решение конечной системы нелинейных уравнений (3.4) существует и единственно.

Далее, учитывая выражение функции $f(t, y)$ из (2.7), при помощи интегрирования по частям в формулах (3.2) и (3.4) легко показать, что, по крайней мере,

$$X_n = O\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right), \qquad X_{n,m} = O\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right) \quad m \to \infty \tag{3.5}$$

где ε — сколь угодно малое положительное фиксированное число.

Из (3.5) следует, что ряд (3.1) равномерно сходится. Отсюда одновременно следует, что этот ряд можно почленно дифференцировать. Следовательно, функция $\gamma_n(t)$ из (3.3), а также ее производная при $n \to \infty$ равномерно стремятся соответственно к функциям $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$.

С другой стороны, очевидно, что в интеграле

$$\int_0^1 K(t, u) f[u, \gamma_n(u)] du$$

на основе известной теоремы Лебега [10], можно осуществить предельный переход под знаком интеграла, поскольку подынтегральная функция при любом фиксированном $t (0 \leq t \leq 1)$ имеет суммируемую по переменной u мажоранту, а именно**

$$|K(t, u) f[u, \gamma_n(u)]| \leq M |K(t, u)|$$

---

* Применив к разности $f(t, u_1) - f(t, u_2)$ формулу Лагранжа и учитывая неравенство (4), получим неравенство (6).

** Вследствие (3.5) ряд (3.1) в интервале $0 < t < 1$ сходится равномерно. Следовательно, последовательность $\gamma_n(t)$ при $n \to \infty$ равномерно в интервале $0 < t < 1$ стремится к функции $\gamma(t)$. Поэтому и последовательность $f[u, \gamma_n(u)]$ при $n \to \infty$ равномерно в интервале $0 < u < 1$ стремится к функции $f[u, \gamma(u)]$. Последнее означает, что

$$|f[u, \gamma_n(u)] - f[u, \gamma(u)]| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon) \quad (0 < u < 1)$$

или, в частности,

$$|f[u, \gamma_n(u)]| < |f[u, \gamma(u)]| + \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon) \quad (0 < u < 1)$$

Поскольку $|f[u, \gamma(u)]| < \alpha_1$, то

$$|f[u, \gamma_n(u)]| < \frac{\lambda}{\pi} - \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon) \quad (0 < u < 1)$$

Исходя из последнего неравенства, можно утверждать существование некоторой постоянной $M > 0$, для которой

$$|f[u, \gamma_n(u)]| < M \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (0 < u < 1)$$

что эквивалентно приведенному неравенству.

Из этих рассуждений согласно [8] вытекает, что функция $\chi(t)$ — предел последовательности $\{\chi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ из (3.3) является решением интегрального уравнения (2.6) и функцией $\chi_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ действительно дается приближенное решение этого уравнения.

Таким образом, вопрос эффективного построения приближенного решения нелинейного уравнения (2.6) сводится к решению конечной системы нелинейных уравнений (3.4).

Преобразуем теперь системы нелинейных уравнений к другому виду, удобному нам в дальнейшем. С этой целью, исходя из (2.7), разложение (3.1) представим в виде

$$\chi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \varphi_m(t) - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_m(t)}{m} \tag{3.6}$$

где $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi_0(t)$, подлежащие определению, а

$$1 - t = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_m(t)}{m} \quad (0 < t \leqslant 1)$$

Итак, имеет место соотношение

$$X_m = Y_m - \frac{1}{\pi m}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

Приняв во внимание (3.5) и (3.7), системы уравнений (3.2) и (3.4) можно записать соответственно в виде

$$Y_m = -\frac{1}{\lambda_m}\int_0^1 f\left(u,\ \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \varphi_k(u) + u - 1\right)\varphi_m(u)\,du + \frac{1}{\pi m}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{3.8}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$Y_{n,m} = -\frac{1}{\lambda_m}\int_0^1 f\left(u,\ \sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}\varphi_k(u) + u - 1\right)\varphi_m(u)\,du + \frac{1}{\pi m}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{3.9}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$$

а формулу (3.3) в виде

$$\chi_{0n}(t) = \sum_{m=1}^{n} Y_{n,m}\varphi_m(t) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.10}$$

Здесь же отметим, что решение нелинейного уравнения (2.6) при довольно сильных ограничениях можно построить методом последовательных приближений. Однако, выбранный нами путь более общий, проще и быстрее приводит к цели.

4. Докажем теперь, что существование и единственность решения бесконечной системы нелинейных уравнений (3.8), а также соответствующей урезанной конечной системы (3.9) следует из принципа неподвижной точки Банаха. Этим одновременно будет доказано, что решения этих систем могут быть эффективно построены методом последовательных приближений.

Обратимся сначала к конечной системе (3.9). Введем в рассмотрение обычное N-мерное вещественное эвклидово пространство $E_N = \{x\}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, в котором метрика порождается формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Рассмотрим в пространстве E_N оператор

$$y = Ax \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

определенный формулой

$$y_m = \frac{2}{\pi m} \int_0^{\pi} \sin mu \left| \sum_{n=1}^{N} x_n \tau_n(u) + u - 1 \right| d\tau_n(u) + \frac{a_0}{m} \qquad (4.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{2}{\pi} u - 1 \right| du \quad (m = 1, 2, \ldots, N)$$

Очевидно, что решение системы (3.9) совпадает с неподвижной точкой оператора A. Следовательно, вопрос решения системы (3.9) сводится к нахождению в E_N неподвижной точки оператора A.

С целью нахождения неподвижной точки оператора A заметим, что, исходя из (4.1), можем записать

$$\sum_{m=1}^{N} \left| y_m - \frac{a_0}{m} \right| = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} |h_m|$$

где

$$h_m = \int_0^{\pi} \sin mu \left| \sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \frac{a_0}{n} \right) \tau_n(u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_0}{n} \tau_n(u) + u - 1 \right| d\tau_n(u) \, du$$

Отсюда на основании неравенства Коши-Буняковского для сумм, а затем при помощи известного неравенства Бесселя из теории рядов Фурье, последовательно будем иметь

$$\sum_{m=1}^{N} \left| y_m - \frac{a_0}{m} \right| \leqslant \frac{2}{\pi} \sqrt{\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^2}} \sqrt{\sum_{m=1}^{N} h_m^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2} = \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^{\pi} \sin^2 mu \left[\sum_{n=1}^{N} \left(x_n - \frac{a_0}{n} \right) \tau_n(u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_0}{n} \tau_n(u) + u - 1 \right]^2 du \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sum_{n=1}^{N} \left| x_n - \frac{a_0}{n} \right| |\varphi_n(u)| + \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \varphi_n(u) \right| - u + 1 \right|^{2\nu_1} du}$$

Отметим, что здесь было использовано значение ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Положив теперь $a = \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{N}$, из последнего неравенства находим

$$\rho(y, a) < \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \varphi_n(u) \right| + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho(x, a) - u + 1 \right|^{2\nu_1} du}$$

из чего следует, что оператор A отображает замкнутый шар $\bar{S} = \{x; \rho(x, a) \leqslant R\}$ в E_N с центром в точке a и радиусом R в тот же самый замкнутый шар тогда и только тогда, когда

$$\lambda < \frac{\sqrt{6} R}{I_1} \tag{4.2}$$

где

$$I_1 = \left(\int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} R - \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} \varphi_n(u) - u + 1 \right| \right|^{2\nu_1} du \right)^{1/2}$$

Далее, положив

$$y_i = A x_i \quad (i = 1, 2)$$

где

$$x_i = \{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{N}, \quad y_i = \{y_n^{(i)}\}_{n=1}^{N}, \quad \text{притом} \quad \rho(x_i, a) \leqslant R$$

будем иметь

$$\rho(y_1, y_2) \leqslant \frac{\lambda}{\pi} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} |g_m|$$

где

$$g_m = \int_0^1 \sin \pi u \left| \left| \sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)} \varphi_n(u) - u - 1 \right|^{\nu_1} - \right.$$

$$\left. - \left| \sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{\nu_1} \right| \varphi_m(u) \, du$$

Затем, как и выше, при помощи неравенств Коши-Буняковского для сумм и Бесселя из теории рядов Фурье придем к неравенству

$$\rho(y_1, y_2) < \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \left| \sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)} \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{\alpha_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left| \sum_{n=1}^{N} x_n^{(2)} \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{\alpha_1} \right| \varphi_m(u)\, du \right.$$

Отсюда, приняв во внимание известную теорему Лагранжа из анализа, получим

$$\rho(y_1, y_2) < \frac{\lambda \alpha_1}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \left| \sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)} \varphi_n(u) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \theta \sum_{n=1}^{N} (x_n^{(2)} - x_n^{(1)}) \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{\alpha_1 - 1} \left| \sum_{n=1}^{N} (x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \varphi_n(u) \right| du \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{\lambda \alpha_1}{\sqrt{6}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| \left| \sum_{n=1}^{N} \left(x_n^{(1)} - \frac{a_0}{n} \right) \varphi_n(u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \theta \sum_{n=1}^{N} \left(x_n^{(2)} - \frac{a_0}{n} + \frac{a_0}{n} - x_n^{(1)} \right) \varphi_n(u) + u - 1 \right|^{\alpha_1 - 1} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{n=1}^{N} (x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \varphi_n(u) \right| du \right\}^{1/2} <$$

$$< \frac{\lambda \alpha_1}{\sqrt{3\pi}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left[2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho(x_1, a) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho(x_2, a) + 1 - u + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) \right| \right|^{2\alpha_1 - 2} du \right\}^{1/2} \rho(x_1, x_2) \quad (0 < \theta < 1)$$

Итак

$$\rho(y_1, y_2) < \frac{\lambda \alpha_1}{\sqrt{3\pi}} \left\{ \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} K + 1 - u + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_0}{n} \varphi_n(u) \right| \right|^{2\alpha_1 - 2} du \right\}^{1/2} \rho(x_1, x_2)$$

Отсюда вытекает, что при

$$\lambda < \frac{\sqrt{3\pi}}{\alpha_1 \sqrt{\ldots}} \qquad (4.3)$$

где

$$I_2 = \left| \int_0^1 \sin^2 \pi u \left| 3 \right|^{\sqrt{\frac{2}{\pi}R - 1 - u}} \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{a_0}{n} z_n(u) \right| \right|^{2\alpha_1 - 2} du \Bigg|^{1/2}$$

оператор A, действующий в замкнутом шаре $\bar{S} = \{x: \rho(x, a) \leqslant R\}$, является сжимающим оператором.

Приняв во внимание (4.2) и (4.3), заключаем, что при

$$l < \min(A, B) = \alpha_1 \tag{4.4}$$

где

$$A = \frac{1 - \sqrt{R}}{I_1}, \qquad B = \frac{1 - \sqrt{\pi}}{\alpha_1 I_2}$$

оператор A, определенный в E_Λ формулой (4.1), отображает шар $\bar{S} = \{x: \rho(x, a) \leqslant R\}$ произвольного наперед заданного радиуса R в тот же самый замкнутый шар и там является сжимающим оператором. Следовательно, на основании принципа неподвижной точки Банаха [11] оператор A в замкнутом шаре $\bar{S}$ любого наперед заданного радиуса R имеет единственную неподвижную точку, которую можно найти при помощи последовательных приближений, отправляясь из произвольной точки замкнутого шара $\bar{S}$.

В случае бесконечной системы (3.8) имеют место те же самые рассуждения, но только вместо пространства E_Λ следует рассматривать метрические пространства l_1 вещественных числовых последовательностей, в которых метрика вводится формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m - y_m|$$

где $x = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $y = \{y_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда получим то же самое неравенство (4.4).

5. Перейдем теперь к обсуждению числовых результатов, полученных при помощи ЭВМ «Наири-2».

Сначала по формуле (4.4) были вычислены значения параметра λ_0 в зависимости от радиуса указанного выше шара R и показателя α_1. Результаты приведены в табл. 1.

Из этой таблицы следует, что при возрастании радиуса шара значения λ_0 в линейном случае накладки, когда $\alpha_1 = 1$, возрастают. А по мере уклонения накладки от линейного случая эти значения убывают. С другой стороны, при фиксированных радиусах значения λ_0 убывают с возрастанием показателя α_1.

Таблица 1

λ \ R	0.5	1	1.5	2	2.5
1	0.92372	1.12872	1.21792	1.26776	1.29956
1.25	0.78541	0.85116	0.84659	0.82866	0.80851
1.50	0.66652	0.64137	0.58825	0.54152	0.50293
1.75	0.56457	0.48293	0.40858	0.35379	0.31279

Затем методом последовательных приближений была решена система уравнений (3.10), состоящая из шести уравнений. Значения λ брались из табл. 1. Кроме того, брались также значения $\lambda=5$ и $\lambda=8$. При решении системы (3.10) за нулевое приближение принималось $(\pi m)^{-1}\sqrt{2\pi}$ $(m=1, 2, ..., 6)$, после чего были вычислены последующие приближения. Оказалось, что после третьих приближений решения фактически совпадают. Для проверки этих решений описанным способом была рассмотрена также система из четырех уравнений. В этих двух решениях совпали, по крайней мере, три первых цифровых знака.

После указанных вычислении по формуле (3.7) были получены значения коэффициентов $\{X_m\}_{m=1}^{6}$. Для иллюстрации в табл. 2 приведены значения этих коэффициентов при λ из табл. 1.

Таблица 2

λ \ X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1.29956	−0.082619	−0.014[illegible]	−0.000126	−0.000017	0.000911	−0.000246
0.80851	−0.044180	−0.009658	−0.000416	0.000090	0.000552	−0.000118
0.50293	0.023786	−0.006054	−0.000452	0.000162	0.000331	−0.000054
0.31279	0.012886	−0.003710	−0.000384	0.000081	0.000198	−0.000023

Далее при помощи (2.7) и (3.1) для осевых и тангенциальных контактных напряжений будем иметь формулы

$$\psi(x) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos x + \sum_{n=1}^{6} X_n \varphi_n\left(\frac{1}{\pi}\arccos x\right)$$

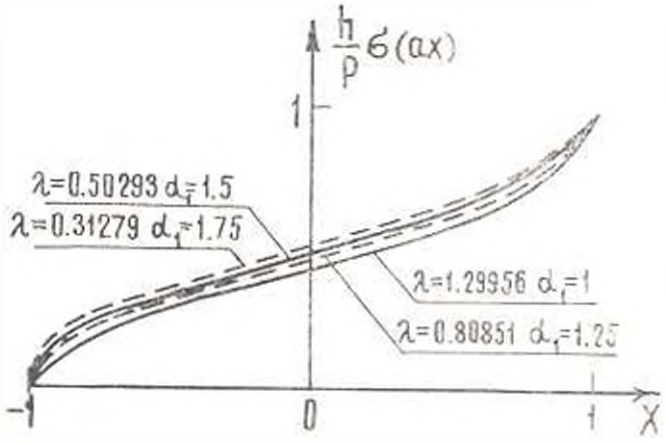
$$\frac{a}{P}\tau(ax) = \psi'(x) = \frac{1 - \sum_{n=1}^{6} X_n \varphi_n'\left(\frac{1}{\pi}\arccos x\right)}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

Исходя из последних формул, в отдельных точках можно вычислить значения функций $\psi(x)$ и $\psi'(x)$. Для иллюстрации эти значения при $\lambda=5$ приведены в табл. 3.

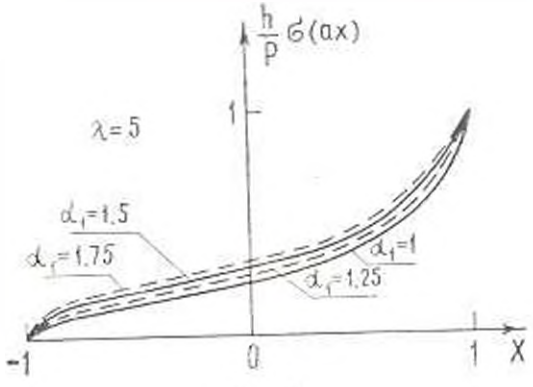
Аналогичные числовые результаты получаются также при остальных, указанных выше, значениях λ.

Таблица 3

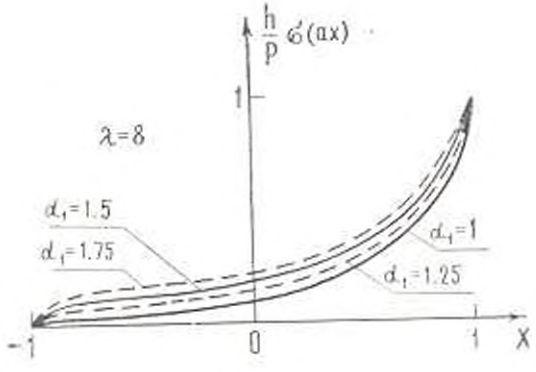
x	$\alpha_1=1$		$\alpha_1=1.25$		$\alpha_1=1.5$		$\alpha_1=1.75$	
	$\sigma(x)$	$\sigma'(x)$	$\sigma(x)$	$\sigma'(x)$	$\sigma(x)$	$\sigma'(x)$	$\sigma(x)$	$\sigma'(x)$
−1	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞
−0.9	0.071086	0.306348	0.085855	0.386519	0.096972	0.449132	0.105339	0.498229
−0.8	0.095551	0.206491	0.117028	0.263385	0.133425	0.309495	0.146104	0.346716
−0.7	0.114719	0.182671	0.141150	0.225035	0.161618	0.261455	0.177621	0.291064
−0.6	0.132750	0.179703	0.162930	0.212352	0.186260	0.239975	0.205220	0.263608
−0.5	0.150853	0.182810	0.183837	0.206740	0.209922	0.228076	0.230687	0.246812
−0.4	0.169352	0.187245	0.204365	0.204360	0.232394	0.219973	0.254731	0.234596
−0.3	0.188315	0.192136	0.224781	0.202880	0.253967	0.214010	0.277694	0.225073
−0.2	0.207824	0.198398	0.245907	0.203578	0.275192	0.210559	0.299836	0.218291
−0.1	0.228099	0.207742	0.265553	0.207974	0.296222	0.210784	0.321478	0.215300
0	0.248558	0.223140	0.286783	0.217695	0.317531	0.216466	0.343075	0.217695
0.1	0.272837	0.241575	0.309341	0.234963	0.339754	0.229620	0.365260	0.227389
0.2	0.298798	0.276455	0.331101	0.262002	0.363777	0.253434	0.388768	0.246536
0.3	0.328531	0.320427	0.362114	0.301109	0.394855	0.287317	0.411963	0.277557
0.4	0.363377	0.379250	0.394830	0.355375	0.421734	0.337150	0.444872	0.323377
0.5	0.405003	0.456838	0.433853	0.428484	0.458712	0.405923	0.480263	0.388010
0.6	0.455592	0.560085	0.481366	0.527208	0.503776	0.500322	0.523317	0.478045
0.7	0.518347	0.703812	0.540623	0.666093	0.560069	0.631123	0.577157	0.606989
0.8	0.598948	0.927986	0.617114	0.882820	0.633041	0.843735	0.647090	0.809713
0.9	0.711389	1.295138	0.724314	1.332409	0.735669	1.277109	0.745711	1.229249
1	1	∞	1	∞	1	∞	1	∞



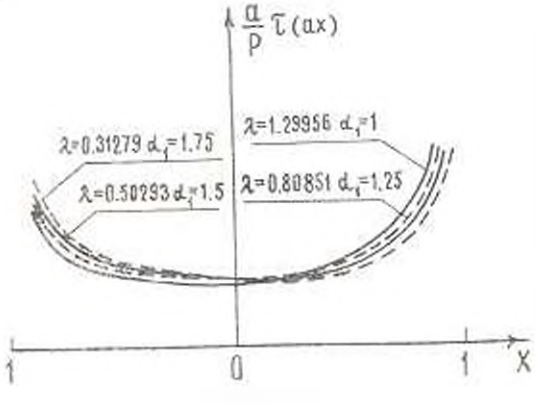
Фиг. 2.



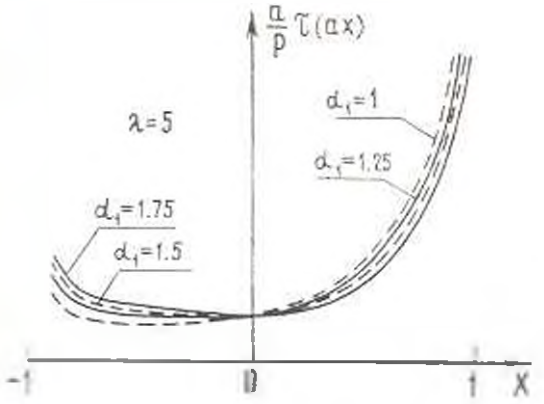
Фиг. 3.



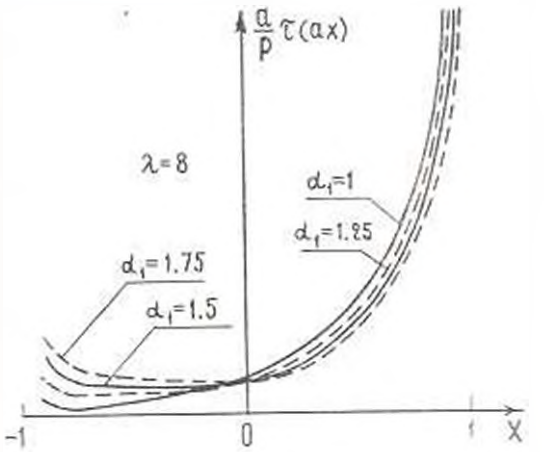
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

На основании последних результатов построены графики осевых и тангенциальных контактных напряжений, которые приведены на фиг. 2—7. На этих фигурах наглядно иллюстрируются закономерности изменения указанных напряжений.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за постоянное внимание к работе и ценное обсуждение полученных результатов.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7 IV 1975

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԱՄՐԱՊՆԴՎՈՂ ՎԵՐԱԴԻՐԻՑ ԲԵՌԻ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկված է աստիճանային ամրապնդումով վերադիրից դեֆորմացվող կիսահարթությանը բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիրը:

Խնդիրը բերված է Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լուծմանը: Ստացված ոչ գծային հավասարումների անվերջ համակարգի համար ցույց է տրված լուծման գոյությունը և միակությունը: Դիտարկված է թվային օրինակ:

LOAD TRANSMISSION FROM A GRADUALLY HARDENING STIFFENER TO A DEFORMED BASE

V. S. SARKISIAN, V. G. MKHITARIAN, L. O. OVSEPIAN

S u m m a r y

A contact problem for a semi-plane reinforced with a gradually hardening stiffener of finite length on the finite segment of its free boundary is considered.

The problem is reduced to a solution of non-linear integral equations of Hammerstein type.

The existence and uniqueness of the solution of infinite sets of non-linear equations thus obtained are proved.

A numerical analysis of the problem is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ing.-Archiv, Bd. 3, № 2, 1932.
2. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
3. *Муки Р.* и *Стернберг Э.* Прикладная механика (русский перевод трудов американского общества инженеров-механиков), сер. Е, 35, № 4, 1968.
4. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
5. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XII, вып. 2, 1959.
6. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, т. 25, вып. 5, 1963.
7. *Arutunyan N. Kh.* and *Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelastisity, Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
9. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. ИЛ, М., 1960.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, М., 1957.
11. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. Изд. «Наука», М., 1965.