

Ս. Ա. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ՓԼԱՏՏԵՐ ՓՐՈՎՈԴՅԱԾԵՐ ՍԼԱՅԻՆԻԿԻ Բ ՍՏՈՒՄԵ ԿՐԻՏԻԿԵՍԿԻ ՍԿՈՐՈՍՏԵՐԻ ՓԼԱՏՏԵՐԻ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՄԱՅԻՆԻՑԻ ՍԵՂՆՈՒՄԻ

В настоящей работе рассматривается задача устойчивости проводящей пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком слабопроводящего сжимаемого невязкого ионизированного газа в случае действия как продольного, так и поперечного магнитного поля.

На основе уравнений магнитоупругости [1, 2] и уравнений магнитогидродинамики [3] определяются аналитические выражения для критических скоростей флаттера.

Исследуется влияние интенсивности заданного магнитного поля, а также проводимости газа и материала пластинки на критическую скорость флаттера.

1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, отнесена к ортогональным координатам (x, y, z) . Пластинка соприкасается с одной стороны с вакуумом, а с другой стороны обтекается сверхзвуковым потоком слабопроводящего сжимаемого невязкого ионизированного газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси ox . На пластинку действует внешнее магнитное поле с заданным вектором магнитной напряженности $\vec{H}_0(H_{0x}, 0, H_{0z})$.

Принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости газа и материала пластинки равны единице.

Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются: модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью ρ , электропроводностью σ .

В отношении пластинки принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [1, 2], которая для данной системы координат аналитически запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, & u_y &= v - z \frac{\partial w}{\partial y}, & u_z &= w(x, y, t) \\ e_x &= \varphi(x, y, t), & e_y &= \psi(x, y, t), & h_z &= f(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ — искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности пластинки, (u_x, u_y, u_z) — перемещения произвольной точки пластинки, φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного электр-

ческого поля, f — искомая нормальная компонента индуцированного магнитного поля во внутренней области (в пластинке).

Принимается также, что упругие, газодинамические и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

Для рассматриваемой задачи linearизованные дифференциальные уравнения, описывающие движение ионизированного газа в случае изотермического состояния, записываются в виде [3]

$$\text{grad div } \vec{v} = \frac{1}{\alpha_0} \left[\frac{d}{dt} \vec{v} - \frac{\gamma_0}{\gamma_0 c^2} (\vec{v} \times \vec{H}_0) \times \vec{H}_0 \right] \\ \frac{dP}{dt} + \alpha_0^2 \gamma_0 \text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \vec{h}^{(1)} = \frac{4\pi\gamma_0}{c^2} (\vec{v} \times \vec{H}_0), \quad \text{div } \vec{h}^{(1)} = 0 \quad (z > h)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \text{grad}$, $\vec{h}^{(1)}$ и \vec{H}_0 — векторы напряженности магнитного поля в возмущенном и невозмущенном состояниях соответственно, \vec{v} — вектор скорости, γ_0 — плотность, γ_0 — проводимость, p — избыточное давление газа, α_0 — скорость звука для невозмущенного потока, c — электродинамическая постоянная.

Дифференциальные уравнения магнитоупругих колебаний пластинки, полученные на основе гипотез магнитоупругости тонких тел, имеют вид [1, 2]

$$D \Delta \Delta w + \frac{2zh^2 H_{0z}}{3c} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{2zh^2}{3c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(H_{0z} \Delta w - \right. \\ \left. - H_{0z}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{2zh H_{0z}}{c} \left(\psi + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + 2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z + \\ + \frac{2zh H_{0z} H_{0z}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[u + \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\nu^2)\gamma}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = \frac{(1-\nu^2)\gamma H_{0z}}{Ec} \left(\frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \psi \right) \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\nu^2)\gamma}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \\ = \frac{(1-\nu^2)\gamma H_{0z}}{Ec} \left(\psi + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{(1-\nu^2) H_{0z}}{4\pi E} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_z^+ + h_z^-}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{H_{0x}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{h_+^+ - h_-^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{h_+^+ - h_-^-}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Здесь h_+^+ , h_-^- и h_+^- , h_-^+ — значения компонент напряженностей тангенциального индуцированного магнитного поля на поверхностях пластинки $z = h$ и $z = -h$.

Выражение для нормальной составляющей внешней поверхностной нагрузки Z в рассматриваемой задаче имеет вид [4—5]

$$Z = -2\epsilon h \frac{\partial w}{\partial t} - p \quad (1.4)$$

где ϵ — коэффициент линейного затухания.

Системы (1.2) и (1.3) должны рассматриваться совместно с уравнениями электродинамики во внешней области для вакуума [2]

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(2)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{e}^{(2)} = 0 \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e}^{(2)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(2)} = 0 \quad (z < -h)$$

где $\vec{h}^{(2)}$ и $\vec{e}^{(2)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей в области $z < -h$.

Решения приведенных уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) должны удовлетворять общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях пластинки. Условие непроницаемости имеет вид

$$v_x = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } z = h \quad (1.6)$$

Отметим, что в системе (1.2) первое уравнение является независимым и если известно его решение φ , то можно построить решение остальных уравнений. Иначе говоря, гидродинамическая и электромагнитная задачи частично распались. В случае, когда заданное магнитное поле перпендикулярно срединной поверхности пластинки, из (1.3) следует, что индуцированное электромагнитное поле не входит в уравнение движения пластинки (первое уравнение системы (1.3)). Следовательно, при действии поперечного магнитного поля задача устойчивости пластинки приводится к решению первого уравнения (1.3) совместно с первым и вторым уравнениями системы (1.2) с граничным условием (1.6), так как остальные уравнения могут быть опущены.

Граничные условия для компонент электромагнитного поля в случае действия продольного магнитного поля принимаются в следующем виде:

$$h_z^{(1)} = f(x, y, t) \quad \text{при } z = h \quad (1.7)$$

$$h_z^{(2)} = f(x, y, t), \quad e_x^{(2)} = e(x, y, t), \quad e_y^{(2)} = \psi(x, y, t) \quad \text{при } z = -h$$

Таким образом, искомая задача устойчивости пластинки свелась к совместному интегрированию систем уравнений (1.2), (1.3), (1.5), решения которых должны удовлетворять граничным условиям (1.6), (1.7) и начальным условиям

$$w = w_0 \psi(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1 \Psi(x, y) \quad \text{при } t = 0 \quad (1.8)$$

2. Решения уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) представим в виде

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{kn}(z, t) \exp[i(\xi_k x + \gamma_n y)] \quad (2.1)$$

$$R(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{kn}(t) \exp[i(\xi_k x + \gamma_n y)]$$

Здесь $\xi_k = k\pi/l_x$, $\gamma_n = n\pi/l_y$ — волновые числа, l_x и l_y — длины полу-волн соответственно по направлениям осей ox и oy .

Подставляя (2.1) в (1.2), (1.3), (1.5) и применяя преобразование Лапласа по переменной t [6], с учетом (1.4), (1.8) для определения преобразованного электромагнитного, магнитогазодинамического поля и преобразованного прогиба пластинки получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$\begin{aligned} & [\Omega_{kn}^2 + s^2 + (\varepsilon + 2\beta_0 \Omega_{kn}) s] w_{kn}^* = a_{kn} (\varepsilon + s + 2\beta_0 \Omega_{kn}) + \\ & + b_{kn} - \frac{1}{2\gamma h} p_{kn}^*(h) \\ & i\xi_k \frac{dv_{knz}^*}{dz} - \xi_k \gamma_n v_{knz}^* - \left[\xi_k^2 + \frac{\theta_k^2(s)}{a_0^2} + m\theta_k(s) \right] v_{knx}^* = 0 \\ & i\gamma_n \frac{dv_{knz}^*}{dz} - \xi_k \gamma_n v_{knz}^* - \left[\gamma_n^2 + \frac{\theta_n^2(s)}{a_0^2} + m\theta_n(s) \right] v_{kny}^* = 0 \\ & \frac{d^2 v_{knz}^*}{dz^2} + i\xi_k \frac{dv_{knz}^*}{dz} + i\gamma_n \frac{dv_{kny}^*}{dz} - \frac{\theta_k^2(s)}{a_0^2} v_{knz}^* = 0 \\ & \theta_k(s) p_{kn}^*(z) + a_0^2 \left(\frac{dv_{knz}^*}{dz} + i\xi_k v_{knz}^* + i\gamma_n v_{kny}^* \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

в случае действия продольного магнитного поля

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\omega_{kn}^2}{\alpha_n^2} + s^2 + s \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon H_0^2}{\rho c^2} \left(1 + \frac{h^2 \gamma_k^2}{3} \right) \right] \right\} w_{kn}^* + \frac{\varepsilon H_0}{\rho c} \dot{v}_{kn}^* - \\
 & - \frac{\varepsilon h^2 \gamma_0 H_0}{2\rho c} (\gamma_k \varphi_{kn}^* + \gamma_m \psi_{kn}^*) = b_{kn} - \frac{1}{2\rho h} p_{kn}^*(h) + \\
 & + a_{kn} \left[\varepsilon + s + \frac{\varepsilon H_0^2}{\rho c^2} \left(1 + \frac{h^2 \gamma_k^2}{3} \right) \right] \\
 & \dot{v}_{kn}^* - \gamma_m \dot{v}_{kn}^* - \frac{is}{c} f_{kn}^* = 0 \\
 & \bar{v}_k f_{kn}^* + \frac{4\pi\varepsilon}{s} \left(\dot{v}_{kn}^* + \frac{s H_0}{c} w_{kn}^* \right) = \frac{h_{kn}^* - h_{kns}^*}{2h} + \frac{4\pi\varepsilon a_{kn} H_0}{c^2} \\
 & i\gamma_m f_{kn}^* - \frac{4\pi\varepsilon}{c} \dot{v}_{kn}^* = \frac{h_{kn\gamma}^* - h_{kns\gamma}^*}{2h} \\
 & i\gamma_m h_{knz}^{(1)*} - \frac{dh_{knz}^{(1)*}}{dz} = 0, \quad i\gamma_k h_{knz}^{(1)*} + i\gamma_m h_{knz}^{(1)*} + \frac{dh_{knz}^{(1)*}}{dz} = 0 \quad (2.3) \\
 & \bar{v}_k h_{knz}^{(1)*} - i\gamma_m h_{knz}^{(1)*} = -\frac{4\pi\varepsilon_0 H_0}{c^2} v_{knz}^* \quad \frac{dh_{knz}^{(1)*}}{dz} - \bar{v}_k h_{knz}^{(1)*} = \frac{4\pi\varepsilon_0 H_0}{c^2} v_{knz}^* \\
 & \bar{v}_k \frac{dv_{knz}^*}{dz} - i\gamma_m v_{knz}^* - \left[\bar{v}_k + \frac{\beta_k^2(s)}{\alpha_0^2} \right] v_{knz}^* = 0 \\
 & i\gamma_m \frac{dv_{knz}^*}{dz} - i\gamma_k v_{knz}^* - \left[\bar{v}_k + \frac{\beta_k^2(s)}{\alpha_0^2} + m\theta_k(s) \right] v_{knz}^* = 0 \\
 & \frac{d^2 v_{knz}^*}{dz^2} + i\gamma_k \frac{dv_{knz}^*}{dz} + i\gamma_m \frac{dv_{knz}^*}{dz} - \left[m\theta_k(s) + \frac{\beta_k^2(s)}{\alpha_0^2} \right] v_{knz}^* = 0 \\
 & \beta_k(s) p_{kn}^*(z) - \alpha_0^2 \left[\frac{dv_{knz}^*}{dz} + \bar{v}_k v_{knz}^* + i\gamma_m v_{knz}^* \right] = 0 \\
 & \frac{d^2 h_{knz}^{(2)*}}{dz^2} - \bar{v}_k(s) h_{knz}^{(2)*} = 0, \quad \frac{d^2 e_{knz}^{(2)*}}{dz^2} - \bar{v}_k(s) e_{knz}^{(2)*} = 0 \\
 & \frac{d^2 e_{knz}^{(2)*}}{dz^2} - \bar{v}_k(s) e_{knz}^{(2)*} = 0, \quad i\gamma_m h_{knz}^{(2)*} - \frac{dh_{knz}^{(2)*}}{dz} = \frac{s}{c} e_{knz}^{(2)*} \\
 & \frac{dh_{knz}^{(2)*}}{dz} - \bar{v}_k h_{knz}^{(2)*} = \frac{s}{c} e_{knz}^{(2)*}, \quad \bar{v}_k h_{knz}^{(2)*} - i\gamma_m h_{knz}^{(2)*} = \frac{s}{c} e_{knz}^{(2)*}
 \end{aligned}$$

В (2.2), (2.3) $\Omega_{kn} = (\bar{v}_k^2 + \gamma_0^2)^{1/2} D/2\rho h$ — частота собственных колебаний пластины в вакууме при отсутствии магнитного поля

$$a_{kn} = \frac{w_1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x, y) \exp[-i(\xi_k x + \eta_n y)] dx dy$$

$$b_{kn} = \frac{w_2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x, y) \exp[-i(\xi_k x + \eta_n y)] dx dy$$

$$f_{kn}^*(z, s) = \int_0^{\infty} f_{kn}(z, t) \exp(-st) dt$$

$$R_{kn}^*(s) = \int_0^{\infty} R_{kn}(t) \exp(-st) dt$$

$$\beta_0 = \frac{H^2 H_{0z}^2}{3c^2 \sqrt{2D_r h}}, \quad \gamma_k(s) = s - i\xi_k U, \quad m = \frac{\varepsilon_0 H_0^2}{\gamma_0 \mu_0 c^2}$$

$$\gamma_{ikn}^2(s) = \xi_k^2 + \eta_n^2 - \frac{s^2}{c^2}$$

Соответствующие граничные условия (1.6) и (1.7), с учетом (2.1), после преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} v_{knz}^* &= (s + i\xi_k U) w_{kn}^* - a_{kn}, & h_{knz}^* &= f_{kn}^* \quad \text{при } z = h \\ h_{knz}^{(2)*} &= f_{kn}^*, & e_{knz}^{(2)*} &= \varphi_{kn}^*, & e_{kny}^* &= \psi_{kn}^* \quad \text{при } z = -h \end{aligned} \quad (2.4)$$

Найдя общее решение системы (2.2), (2.3), удовлетворяя граничным условиям (2.4) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определим постоянные интегрирования и, следовательно, преобразованное электромагнитное, магнитогидродинамическое поле и преобразованный поток пластинки:

при действии поперечного магнитного поля

$$\begin{aligned} w_{kn}^* &= \frac{\Delta_{kn}^0(s)}{\Delta_{kn}(s)}, & v_{knz}^* &= \overline{w_{kn}^*} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \\ v_{knr}^* &= \frac{\gamma_{kz}^* \overline{v_{knz}^*}(s) \overline{w_{kn}^*}}{\gamma_{kn}^2(s)} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \\ v_{kny}^* &= \frac{\gamma_{ny}^* \overline{v_{knz}^*}(s) \overline{w_{kn}^*}}{\gamma_{kn}^2(s)} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \\ p_{kn}^* &= \frac{a_{kn} \overline{v_{knz}^*}(s) \overline{w_{kn}^*}}{\gamma_{kn}^2(s)} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

при действии продольного магнитного поля

$$\begin{aligned}
 \alpha_{kn}^* &= \frac{\Delta_{kn}^*(s)}{\Delta_{1kn}(s)}, & f_{kn}^* &= \frac{i c}{s} (\gamma_{1n} \varphi_{kn}^* - \dot{\alpha}_{kn} \psi_{kn}^*) \\
 \varphi_{kn}^* &= - \frac{i \dot{\alpha}_{kn} C_{kn}(s)}{D_{kn}(s)} \{ A_{kn}(s) \gamma_{1kn}(s) D_{kn}(s) + i \gamma_{1kn}(s) B_{kn}(s) + \\
 &+ i [\gamma_{1kn}(s) - i \gamma_{0kn}] [\gamma_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)] \} \\
 \dot{\psi}_{kn}^* &= - \frac{C_{kn}(s)}{D_{kn}(s)} [\gamma_{1kn}(s) D_{kn}(s) [\gamma_{1kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)] - \\
 &- i \gamma_{1kn}^2 \gamma_{1kn}(s) B_{kn}(s) + i \gamma_{1kn}^2 [\gamma_{1kn}(s) - i \gamma_{0kn}] [\gamma_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)] \\
 h_{kkn}^{(1)*} &= - \frac{i \dot{\alpha}_{kn}}{\gamma_{0kn}} [f_{kn}^* - i \dot{\alpha}_{kn} G_{kn}(s)] \exp[-\gamma_{0kn}(z-h)] + \\
 &+ \frac{i G_{kn}(s)}{\gamma_{0kn}^2 \gamma_{1kn}(s)} \{ \dot{\alpha}_{kn}^2 \gamma_{1kn}^2(s) - \gamma_{1n}^2 [\gamma_{1kn}^2(s) + \gamma_{0kn}^2] \} \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 h_{knu}^{(1)*} &= - \frac{i \gamma_{1n}}{\gamma_{0kn}} [f_{kn}^* - i \dot{\alpha}_{kn} G_{kn}(s)] \exp[-\gamma_{0kn}(z-h)] + \\
 &+ \frac{i \dot{\alpha}_{kn} \gamma_{1n} G_{kn}(s)}{\gamma_{0kn}^2 \gamma_{1kn}(s)} [2 \gamma_{1kn}^2(s) - \gamma_{0kn}^2] \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \quad (2.6) \\
 h_{kns}^{(1)*} &= [f_{kn}^* - i \dot{\alpha}_{kn} G_{kn}(s)] \exp[\gamma_{0kn}(z-h)] + i \dot{\alpha}_{kn} G_{kn}(s) \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 v_{kny}^* &= \frac{i \dot{\alpha}_{kn} \overline{w_{kn}}}{\gamma_{1kn}(s)} \left(1 - \frac{i \overline{m}}{\beta_0} \right) \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 v_{kny}^* &= \frac{\gamma_{1n} \overline{w_{kn}}}{\gamma_{1kn}(s)} \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 p_{kn}^* &= \frac{\alpha_{kn} \beta_0 \overline{w_{kn}}}{\lambda \gamma_{1kn}(s)} \left(1 - \frac{i \overline{m}}{\beta_0} \right) \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 h_{kns}^{(2)*} &= f_{kn}^* \exp[\gamma_{1kn}(s)(z-h)], & e_{kns}^{(2)*} &= \varphi_{kn}^* \exp[\gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 e_{kny}^{(2)*} &= \psi_{kn}^* \exp[\gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 e_{kns}^{(3)*} &= - \frac{i}{\gamma_{1kn}(s)} (\dot{\alpha}_{kn} \dot{\alpha}_{kn}^* - \gamma_{1n} \dot{\alpha}_{kn}^*) \exp[\gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 h_{kns}^{(2)*} &= \frac{1}{\gamma_{1kn}(s)} \left(i \dot{\alpha}_{kn} f_{kn}^* - \frac{\beta}{c} \dot{\psi}_{kn}^* \right) \exp[\gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 h_{kny}^{(2)*} &= \frac{1}{\gamma_{1kn}(s)} \left(i \gamma_{1n} f_{kn}^* - \frac{\beta}{c} \varphi_{kn}^* \right) \exp[\gamma_{1kn}(s)(z-h)]
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{0kn}(s) &= \Omega_{kn}^2 + s^2 - s(\varepsilon + 2\gamma_0^2 \Omega_{kn}) - \frac{i\alpha_0^2 \omega_0^2 \beta_0^2}{2\gamma_0 h^2 \nu_{1kn}(s)} \\ \Delta_{kn}^0(s) &= b_{kn} + a_{kn} \left[1 + s - 2\gamma_0^2 \Omega_{kn} + \frac{\alpha_0^2 \beta_0^2}{2\gamma_0 h^2 \nu_{0kn}(s)} \right] \\ \Delta_{1kn}(s) &= \Omega_{kn}^2 - s^2 - s\delta_{0kn}(s) - \frac{i\alpha_0 \beta_0}{\lambda_x} \gamma_{1kn}(s) \\ \Delta_{kn}^1(s) &= b_{kn} + a_{kn} [\gamma_{0kn}(s) + \gamma_{1kn}(s)] \\ \delta_{0kn}(s) &= s + \frac{\pi H_{0x}^2}{\mu c^2} \left(1 - \frac{h^2 \nu_{0n}^2}{3} \right) - \frac{A_0 [v_{1kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]}{B_{kn}(s) [\nu_{1kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]} \\ \gamma_{1kn}(s) &= \frac{\alpha_0^2 \beta_0^2}{2\gamma_0 h^2 \nu_{1kn}(s)} \left(1 - \frac{i\bar{m}}{\beta_0} \right) + \frac{\pi A_0 h^2 \nu_{1kn}^2}{3} \left[1 + \frac{i\varepsilon_0}{2h\varepsilon \gamma_{1kn}(s)} \right] + \\ &+ \frac{i\varepsilon_0 A_0}{B_{kn}(s) D_{kn}(s) [\nu_{1kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]} - \frac{\pi B_{kn}(s) \gamma_{1kn}(s)}{\nu_{1kn}^2 [\nu_{1kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)] [\gamma_{1kn}(s) - i\nu_{0kn}]} \quad (2.7) \\ A_{kn}(s) &= 1 + \frac{\nu_{0kn} + \nu_{1kn}(s)}{2h\nu_{0kn}\nu_{1kn}(s)}, \quad B_{kn}(s) = \frac{4\pi s}{c^2} + \frac{s^2}{2h\nu_{1kn}(s)} \\ C_{kn}(s) &= \frac{4\pi s H_{0x} \bar{w}_{kn}}{c^3 B_{kn}(s) [\nu_{1kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]}, \quad \nu_{1kn}(s) = \frac{\pi \omega_{kn}^2}{\nu_0 \pi \omega_{kn}} \\ D_{kn}(s) &= 2h\nu_{0kn}^2 \nu_{1kn}(s) [\nu_{1kn}(s) - i\nu_{0kn}], \quad A_0 = \frac{4\pi s H_{0x}^2}{c^2} \\ G_{kn}(s) &= \frac{4\pi s H_{0x} \bar{w}_{kn}}{c^3 [\nu_{1kn}(s) + \nu_{0kn}^2]}, \quad \nu_{kn}^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2 \\ \bar{w}_{kn} &= i\beta_k(s) w_{kn} - a_{kn}, \quad w_{kn}^s = s w_{kn} - a_{kn} \\ \nu_{kn}(s) &= \left(\frac{k\pi}{\lambda_x} \right)^2 \left[1 - \nu_{xy}^2 - \frac{\beta_0^2 - i\bar{m}\beta_0}{(k\pi)^2} \right], \quad \nu_{xy} = \frac{n_{xy}}{k\lambda_y} \\ \nu_{0kn}^2(s) &= \frac{\beta_0^2}{\lambda_y^2} \left[1 - \frac{(k\pi)^2 (1 + \nu_{xy}^2)}{\beta_0^2 - \bar{m}^2} - i \frac{(k\pi)^2 (1 - \nu_{xy}^2) \beta_0 \bar{m}}{\beta_0^2 + \bar{m}^2 \beta_0^2} \right] \\ \nu_{1kn}^2(s) &= \frac{\beta_0^2}{\lambda_x^2} \left[\left(1 - \frac{k^2 \pi^2}{\beta_0^2} \right) \left(1 - \frac{i\bar{m}}{\beta_0} \right) - \frac{(k\pi)^2 \nu_{xy}^2}{\beta_0^2} \right] \\ \beta_0 &= M \left(k\pi - \frac{i s \lambda_x}{U} \right), \quad M = \frac{U}{a_*}, \quad \bar{m} = R_n \frac{v_A^2}{a_*^2} \end{aligned}$$

$$R_m = \frac{4\pi\sigma_0 a_0}{c^2}, \quad v_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\sigma_0}$$

Здесь M — число Маха, R_m — магнитное число Рейнольдса, v_A — скорость распространения электромагнитных волн Альфвена.

Применяя обратное преобразование Лапласа по переменной s и используя основную теорему вычетов, из (2.5) и (2.6) найдем выражения, определяющие прогиб пластинки. В результате получим:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^p \frac{\Delta_{kn}^{\mu}(s)}{\Delta_{0kn}(s_{\mu})} \exp[s_{\mu}t + i(\xi_k x + \gamma_n y)] \quad (2.8)$$

в случае действия продольного магнитного поля

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^p \frac{\Delta_{kn}^{\mu}(s)}{\Delta_{1kn}(s_{\mu})} \exp[s_{\mu}t + i(\xi_k x + \gamma_n y)] \quad (2.9)$$

где s_n и s_{μ} — соответственно корни следующих алгебраических уравнений:

$$\Delta_{0kn}(s) = 0 \quad (2.10)$$

$$\Delta_{1kn}(s) = 0 \quad (2.11)$$

p_n и p_{μ} — числа корней уравнений (2.10), (2.11), штрих означает производную по переменной s .

Для любых заданных значений параметров, входящих в уравнения (2.10) и (2.11), можно определить s . Если ее действительная часть отрицательна, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие же корней с положительной действительной частью означает неустойчивость.

1. Исследование уравнений (2.10) и (2.11) приводится в частном случае, когда форма колебания пластинки — цилиндрическая поверхность ($\gamma_n = 0$).

Принимается также, что

$$\left| \frac{s}{\alpha \xi_k} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{1}{M \left(1 - \frac{i s \xi_k}{U} \right)} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\bar{m}}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad (3.1)$$

После этих предположений уравнения (2.10) и (2.11) существенным образом упрощаются и принимают следующий вид:

при действии поперечного магнитного поля

$$\begin{aligned} s_0^4 + 2U_0 s_0^3 - (1 - U_0^2) s_0^2 - U_0^2 + \frac{\gamma_0 \bar{m} a_0^2}{i_0 \Omega_k V^2} = \\ = -i[(s_0 + \gamma_0 + 2\beta_0) s_0^3 + U_0(2\gamma_0 + 4\beta_0 + 3\gamma_0) s_0^2 + \\ + U_0^2(s_0 + 2\beta_0 + 3\gamma_0) s_0 + \gamma_0 U_0^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

при действии продольного магнитного поля

$$(1 + i\varepsilon_0) s_0^2 - \gamma_0 U \lambda_0 - m_0 + i \{i s_0^2 - s_0 \} \varepsilon_0 + i \beta^2 (1 - i_0) + i m_0 - \gamma_0 U_0 = 0 \quad (3.3)$$

где

$$\lambda = \frac{4\pi\sigma\Omega_k h}{\varepsilon_k (1 + i\varepsilon_k h) c^2}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi\sigma_0 a_0}{\varepsilon_k (1 + i\varepsilon_k h) c^2}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_k (1 + i\varepsilon_k h) H_0^2}{4\pi\sigma_0 \Omega_k^2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon + i\gamma}{\Omega_k}, \quad \gamma = \frac{u_0 \delta_0}{2\gamma h}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{\Omega_k}, \quad U_0 = \frac{U}{V} \quad (3.4)$$

$$V = \frac{\Omega_k}{\varepsilon_k}, \quad m_0 = 1 + \frac{\gamma_0 m_0^2}{2i_r \Omega_k}, \quad s_0 = -\frac{i\sigma}{\Omega_k}$$

Здесь безразмерные параметры λ_0 , λ и β характеризуют электропроводность газа, материал пластинки, напряженность внешнего поперечного или продольного магнитного поля, соответственно, V — фазовая скорость распространения упругой волны в пластинке.

Уравнения (3.2) и (3.3) представляют собой алгебраические уравнения относительно s_0 с комплексными коэффициентами. Условия отсутствия у этих уравнений корней с отрицательными мнимыми частями могут быть представлены в форме, аналогичной общеизвестным критериям Рауса-Гурвица [5]. Из этих условий получим следующие оценки для критической скорости флаттера:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$\frac{U_{кр}}{U_{кр}^0} = \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{g_0 i \beta}{\varepsilon_0}\right) \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4i_0 \beta^2 \gamma}{(g + g_0 i \beta)^2}}} \quad (3.5)$$

в случае действия продольного магнитного поля

$$\frac{U_{кр}}{U_{кр}^0} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) \left|1 + \frac{2\varepsilon_0 i \beta (1 - i_0)}{\varepsilon_0^2}\right|} \quad (3.6)$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha_1 = (1 + i\varepsilon_0)^2 [2\varepsilon_0 + i\varepsilon_0^2 + i\beta^2 (1 - i_0)] - i^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) (2 + i\varepsilon_0)$$

$$\alpha = \sqrt{\left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) i^2 \varepsilon_0^2\right]^2 + 4i^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) + i^2 \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) - \alpha_1}$$

$$\alpha_2 = \beta^2 (1 - i_0) \left[(1 + i\varepsilon_0)^2 - i^2 \left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta\right) \right] -$$

$$- \left| 1 + \lambda \varepsilon_0 + \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0^2 \right) \right|^2$$

$$a_2 = \left\{ (1 + \lambda \varepsilon_0) [\varepsilon_0 + \lambda_0^2 (1 - \lambda_0)] + \lambda^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0^2 \right) \right\}^2$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\alpha_0 \rho / h^2 \varepsilon_k^2 \gamma_0^3}{Q \rho_0}, \quad U_{кр}^0 = V \left(1 + \frac{\varepsilon}{\bar{\gamma}} \right), \quad g = \frac{\varepsilon}{Q_k}, \quad g_0 = \frac{\varepsilon^2 h^2}{3}$$

где $U_{кр}^0$ — критическая скорость флаттера при отсутствии магнитного поля.

Отметим, что в (3.5) последнее подкоренное выражение, в силу предположений (3.1), всегда неотрицательно.

На основании проведенного анализа формулы (3.5) сделаны следующие выводы.

Влияние проводимости газа приводит к уменьшению критической скорости флаттера.

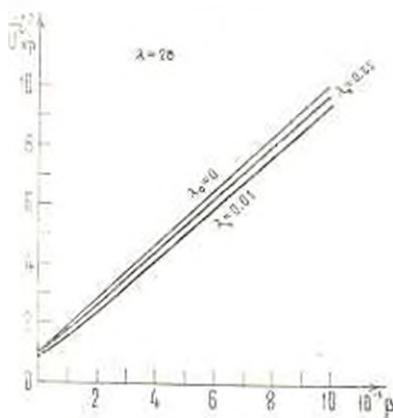
С возрастанием напряженности поперечного магнитного поля критическая скорость флаттера увеличивается.

С увеличением проводимости материала пластинки увеличивается критическая скорость флаттера.

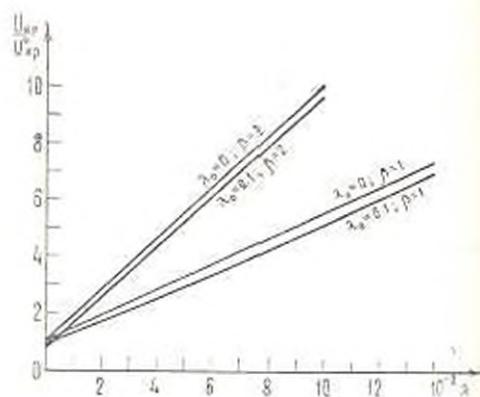
Графики изменения критической скорости в зависимости от параметров ρ и λ показаны на фиг. 1 и 2. Для вычисления были взяты значения:

$$E \cdot 1 - \nu^2 = 0.732 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2, \quad \rho = 2.822 \cdot 10^{-6} \text{ кг/сек}^2/\text{см}^4,$$

$$\nu_0 = 1.324 \cdot 10^{-8} \text{ кг/сек}^2/\text{см}^4, \quad \alpha_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ см/сек}, \quad g = 0.05, \quad h/\rho_0 = 0.01.$$



Фиг. 1.

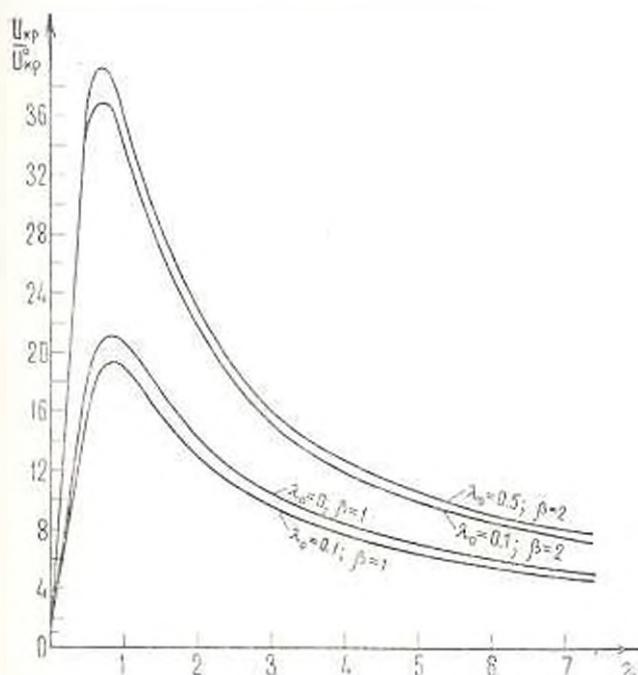


Фиг. 2.

В отличие от случая действия поперечного магнитного поля, при действии продольного магнитного поля из (3.6) вытекает, что влияние проводимости газа приводит к увеличению критической скорости флаттера, когда материал пластинки представляет собой диэлектрик, и к уменьшению критической скорости, когда пластинка является проводником.

На основании (3.6) проведен численный анализ зависимости критической скорости от напряженности продольного магнитного поля и проводимости материала пластинки. При расчетах влияние демпфирования не учитывается ($\nu=0$) и принято $\gamma_0=0.025$.

На фиг. 3 приведены графики зависимости критической скорости флаттера от проводимости материала пластинки при некоторых фиксированных значениях напряженности внешнего магнитного поля и проводимости газа. Все кривые, каждая из которых соответствует фиксированным значениям параметров λ_0 , β , имеют одинаковый характер, а именно: с увеличением λ критическая скорость флаттера сначала увеличивается, достигая максимума для определенного λ , а затем убывает.



Фиг. 3.

Таким образом, обнаруживается экстремальный характер влияния проводимости материала пластинки.

На фиг. 4 приведены графики, показывающие зависимость критической скорости от напряженности магнитного поля для различных фиксированных значений параметров λ и λ_0 .

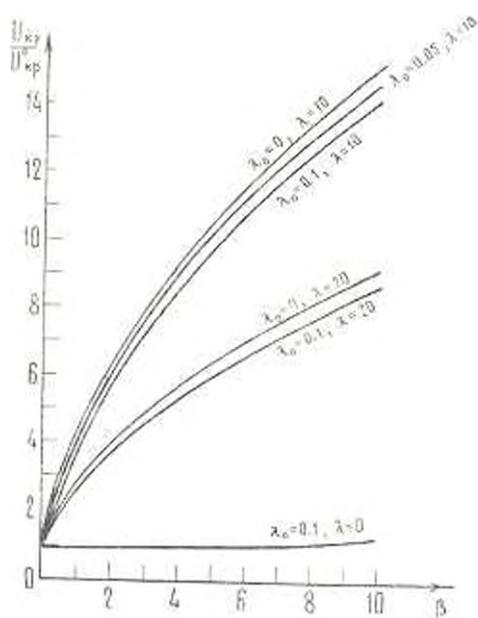
Из фиг. 4 видно, что во всех случаях критическая скорость флаттера увеличивается с возрастанием напряженности внешнего магнитного поля.

Отметим, что в случае действия поперечного магнитного поля из (3.5) видно, что критическая скорость флаттера — монотонная функция относительно λ . По этой причине исследование проводилось при $k=1$, что соответствует минимальной критической скорости флаттера.

В случае действия продольного магнитного поля, исследование формулы (3.6) показывает, что определение минимума критической скорости по β_k в общем случае весьма затруднительно. Минимум критической скорости определен в случае, когда материал пластинки является диэлектриком ($\lambda=0$). При этом получим окончательную формулу

$$U_{кр} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) \sqrt{2\kappa_0 \sigma_1 \frac{v_A}{c}}$$

где $\kappa_0^2 = D/2\rho h$, $\sigma_1^2 = \pi\varepsilon_0\alpha_0\alpha_0'\rho_0'gh$.



Фиг. 4.

Автор благодарит участников семинара «Электродинамика деформируемых сплошных сред» Института механики АН Армянской ССР за обсуждение работы.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 20 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Обтекание колеблющейся границы конизированным газом при действии магнитного поля. Магнитная гидродинамика, № 1, 1967.
4. Волемтар А. С., Селезова Л. В. Поведение упругой цилиндрической панели в потоке проводящего газа при действии магнитного поля. ПМ, т. 7, вып. 5, 1971.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
6. Дин Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Изд. Наука, М., 1965.