

А. О. ВАТУЛЯН, Т. В. КОРЕНЕВА, М. Г. СЕЛЕЗНЕВ

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ШТАМПОМ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

В условиях плоской деформации рассматривается вибрация трансверсально-изотропного слоя толщиной  $2h$  под действием вибрирующих штампов. В слое плоскость  $y=0$  является изотропной.

Штампы ширины  $2a$  приложены к слою симметрично относительно срединной поверхности. Предполагается, что в области контакта трение отсутствует, а штампы совершают либо встречные колебания (сжатие), либо односторонние (изгиб). В работе на основании решений интегральных уравнений, к которым сводятся краевые задачи, построены приближенные формулы, описывающие контактные напряжения под штампами и поведение поверхности слоя вне штампов.

### § 1. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Свойства ядер интегральных уравнений

Уравнениями краевых задач являются известные уравнения движения Коши с определяющими уравнениями вида (1.1) [1].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y \\ \sigma_y &= c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= c_{33}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $c_{ij}$  — упругие постоянные.

Граничные условия смешанных задач представимы в случаях сжатия и изгиба соответственно в форме

$$\sigma_y|_{y=\pm h} = \begin{cases} T(x)e^{-i\omega t} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = 0$$

$$\sigma_y|_{y=\pm h} = \begin{cases} \pm T(x)e^{-i\omega t} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = 0$$

где  $\omega$  — частота колебаний штампа.

Так как изучается установившийся режим, то есть во всех точках деформация протекает одинаково во времени, перемещения представимы в виде

$$u = e^{-i\omega t} u_0(x, y), \quad v = e^{-i\omega t} v_0(x, y)$$

Применением обобщенного интегрального преобразования Фурье к уравнениям движения сплошной среды каждая краевая задача приводится к интегральному уравнению с разностным ядром относительно контактных давлений вида

$$\int_{-a}^a k(x-z) q(z) dz = 2f(x) \quad |x| \leq a \quad (1.4)$$

Функция  $f(x)$  характеризует форму штампа. Ядро интегрального уравнения представимо в форме

$$k(x) = \int_0^{\infty} K(u) e^{iux} du \quad (1.5)$$

Здесь в случае изгиба

$$K(u) = \frac{(l_1^2 - l_2^2)(a_1 u^2 - k)(a_1 + a_2)}{T_1 - T_2} \quad (1.6)$$

причем

$$T_1 = l_1 \operatorname{th} l_1 [l_1^2 a_1 - k - u^2(a_1^2 - a_1 a_2 - a_2)] (l_1 a_1 - k - a_3 u^2)$$

а  $T_2$  получается из  $T_1$  заменой  $l_1$  на  $l_2$

$$l_i = \nu_i h, \quad k = \frac{\rho \omega^2 h^2}{c_{22}}, \quad \alpha_1 = \frac{c_{33}}{c_{22}}, \quad \alpha_2 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad \alpha_3 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad \lambda = kc_{22} \cdot 10^{-6}$$

$l_i$  — положительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} l^2 s_1 + s_2 & -l \\ -l & l^2 s_2 + s_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

$$s_1 = \frac{c_{33}}{iu(c_{12} + c_{33})}, \quad s_2 = \frac{\rho \omega^2 - c_{11} u^2}{iu(c_{12} + c_{33})}, \quad s_3 = \frac{c_{22}}{iu(c_{12} + c_{33})}$$

$$s_4 = \frac{c_{11} u^2 - c_{33}}{iu(c_{12} + c_{33})}$$

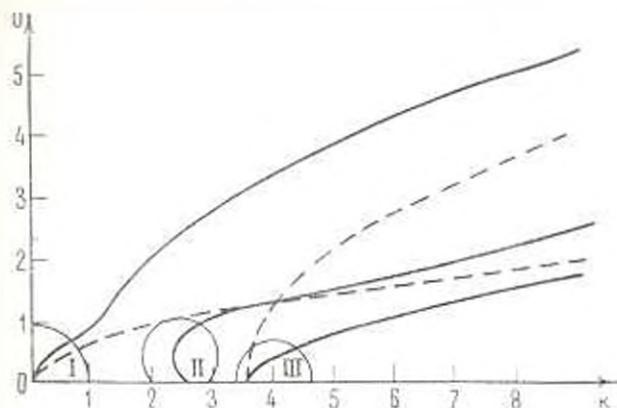
В случае сжатия  $K(u)$  получается из (1.6) заменой  $\operatorname{th} u$  на  $\operatorname{cth} u$ .

Свойства ядра определяются функцией  $K(u)$ , которая является мероморфной и при  $u \rightarrow \infty$  убывает как  $|u|^{-1}$ . Ядро уравнения при  $x \rightarrow \infty$  представимо в виде

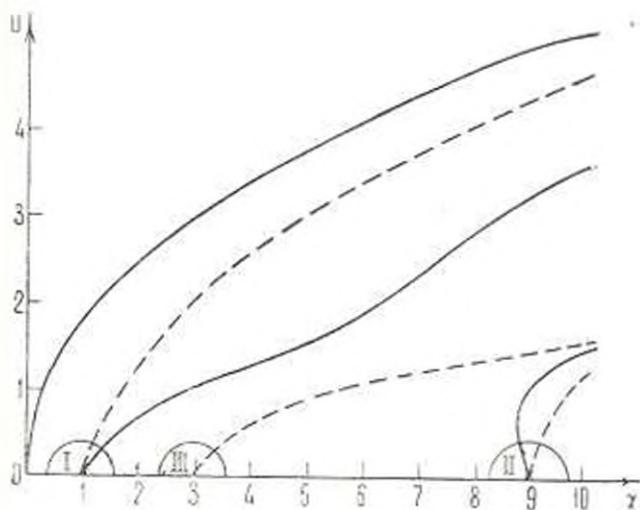
$$k(x) = \sum_{k=1}^p A_k e^{i z_k x} + O(e^{-x}) \quad (1.8)$$

где  $z_k > 0$  ( $k=1, \dots, p$ ,  $z > 0$ ) — полюса  $K(u)$ , а в нуле имеет логарифмическую особенность. Осцилляция ядра затрудняет применение известных методов, которые обычно используются для решения сингулярных инте-

гральных уравнений. Исследование настоящего интегрального уравнения невозможно без детального изучения кривых нулей и полюсов функции  $K(u)$ , зависящей от  $k$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$ ,  $v_{33}$ . В настоящей работе они изучаются по следующей схеме: фиксируются  $c_{ij}$  и изменяется  $k$ . Построение нулей и полюсов (нейтральных кривых) как функций  $k$  было осуществлено с помощью ЭВМ «Одра-1204» методом половинного деления. Для следующих значений параметров в случае сжатия  $c_{11} = 2.66 \cdot 10^6$ ;  $c_{22} = 1.1 \cdot 10^6$ ;  $c_{33} = 0.4 \cdot 10^6$ ;  $c_{12} = 0.92 \cdot 10^6$  и в случае изгиба  $c_{11} = 2.96 \cdot 10^6$ ;  $c_{22} = 1.2 \cdot 10^6$ ;  $c_{33} = 0.4 \cdot 10^6$ ;  $c_{12} = 0.92 \cdot 10^6$  они приводятся на фиг. 1, 2 соответственно, где сплошной линией обозначены линии полюсов, а прерывистой — нулей.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Несложный анализ функции  $K(u)$  позволяет установить, что она имеет счетное множество нулей и полюсов, сгущающихся лишь на бесконечности.

С увеличением частоты число нулей и полюсов, лежащих на вещественной оси, как правило, растет. Известно, что нейтральные кривые пересекают ось  $k$  под прямым углом, но ведут себя по-разному в окрестности точек пересечения. В зонах I и III кривые подходят к оси  $k$  с положительной производной и имеет место чередование нулей и полюсов. В зоне II кривая полюсов имеет отрицательную производную и нарушается чередование нулей и полюсов: более того, с ростом  $k$  в этой зоне число полюсов уменьшается на 1.

Представленные на графиках нейтральные кривые позволяют правильно распорядиться контуром  $\sigma$ , расположение которого обеспечивает выполнение условий изучения. Именно, контур  $\sigma$  должен огибать в зонах I, III положительные полюсы снизу, а отрицательные — сверху. В зоне II расположение таково: наименьший по модулю полюс огибается противоположным образом. Вышеперечисленные условия позволяют сделать вывод об однозначной разрешимости интегрального уравнения [2, 3].

## 2. Построение приближенного решения интегрального уравнения с помощью приближенной факторизации

Интегральное уравнение вида (1.4) с помощью интегрального преобразования Фурье приводится к системе двух интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно функций  $X^{\pm}$  (здесь и далее сохранены обозначения работы [4])

$$X^{\pm} = G^{\pm} X^{\mp} + A^{\pm} \quad (2.1)$$

где операторы  $G^{\pm}$  и  $A^{\pm}$  имеют вид

$$G^{\pm} f = \pm \frac{1}{2\pi i} \int \frac{K_{\pm}(\zeta) e^{-2u\zeta}}{K_{\pm}(\zeta)(\zeta - u)} f d\zeta \quad (2.2)$$

$$A^{\pm} = \int \left| \frac{e^{-u\zeta}}{K_{+}(\zeta)(\zeta + u)} \pm \frac{e^{2u\zeta}}{K_{-}(\zeta)(\zeta - u)} \right| F(\zeta) d\zeta \quad (2.3)$$

$$F(\zeta) = \int_{-u}^u e^{m\zeta} f(u) du \quad (2.4)$$

Контур  $\sigma$  делит комплексную плоскость на 2 части: верхнюю  $E_{+}$  и нижнюю  $E_{-}$ ;  $K_{+}(u)$  и  $K_{-}(u)$  — функции, регулярные и не имеющие корней в  $E_{+}$  и  $E_{-}$  соответственно

$$K_{+}(u) = K_{-}(u) K'_{-}(u); \quad K_{+}(-u) = K'_{-}(u)$$

Деформируя контур интегрирования  $\sigma$  в  $E_{-}$ , лежащий строго в нижней полуплоскости, сводим решение системы (2.1) к решению конечной линейной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X^{\pm}(-z_k)$  ( $k=1, \dots, n$ ;  $z_k$  — положительные нули  $K(u)$ ), разрешив которую, при-

ходим к системе вида (2.1), но с другим выражением для  $A$ . Последняя система может быть решена методом последовательных приближений.

Приведенные в [4] формулы предполагают умение факторизовать  $K(u)$  относительно  $u$ . Однако, достаточно [5] провести приближенную факторизацию для каждого фиксированного  $k$ .

Строится функция, которая в отличие от  $K(u)$  регулярна и не имеет нулей на вещественной оси

$$f(u) = K(u) \sqrt{u^2 + B^2} \prod_{i=1}^p (u^2 - \zeta_i^2) \prod_{k=1}^n (u^2 - z_k^2)^{-1} \begin{cases} 1 & p = n \\ \prod_{k=1}^n (u^2 + z_k^2) & p > n \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\zeta_i$  и  $z_k$  — соответственно положительные полюсы и нули  $K(u)$ .  $f(u)$  — непрерывная на  $[0, \infty)$  функция, не имеющая нулей на вещественной оси и ограниченная на бесконечности. Она с любой степенью точности может быть приближена полиномами Бернштейна [6], отображенными на всю вещественную полуось заменой  $x = u^2 (u^2 + c^2)^{-1}$ . После такой аппроксимации функция  $K(u)$  уже легко факторизуется и можно строить приближенное решение.

В качестве примера была рассмотрена простейшая аппроксимация  $K(u)$  функциями

$$K^*(u) = A (u^2 - z_1^2) (u^2 - \zeta_1^2)^{-1} (u^2 + B^2)^{-1/2} \quad (2.6)$$

$$K^*(u) = A (u^2 - z_1^2) (u^2 + z_2^2) (u^2 - \zeta_1^2)^{-1} (u^2 - \zeta_2^2)^{-1/2} (u^2 + B^2)^{-1/2} \quad (2.7)$$

в случае сжатия и изгиба соответственно.

Параметры  $A$ ,  $B$ ,  $z$ , находились из условий совпадения  $K^*(u)$  и  $K(u)$  в нуле и на  $\infty$ .

Для плоского штампа и аппроксимации вида (2.6), (2.7) были получены приближенные формулы для функций  $\varphi_{\pm}(x)$ , описывающих поперечную поверхность слоя вне области контакта

$$\frac{\varphi_+(x)}{h} = \frac{i}{2} [X^-(\zeta_1) + X^+(\zeta_1)] \frac{\sqrt{A(\zeta_1 - z_1)}}{\sqrt{B + i\zeta_1}} e^{-c_1 x} \quad (\text{сжатие}) \quad (2.8)$$

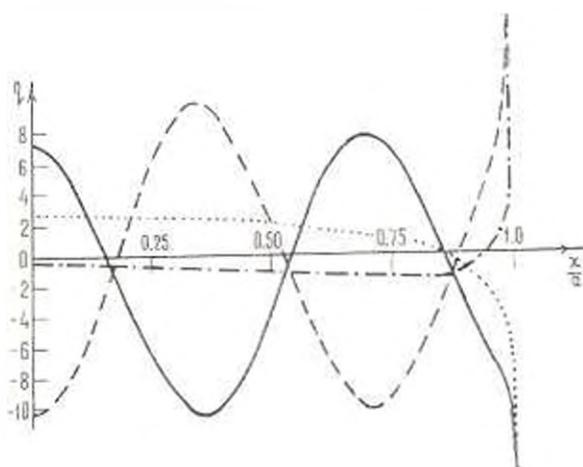
$$\frac{\varphi_{\pm}(x)}{h} = \frac{i \sqrt{A}}{2(\zeta_2 - \zeta_1)} \left\{ [X^-(\zeta_1) + X^+(\zeta_1)] \frac{(-\zeta_2 + z_1)(-\zeta_2 + iz_2)}{\sqrt{B + i\zeta_1}} e^{-c_1(x \pm h)} - [X^+(\zeta_2) + X^-(\zeta_2)] \frac{(-\zeta_2 + z_1)(-\zeta_2 + z_2)}{\sqrt{B + i\zeta_2}} e^{-c_2(x \pm h)} \right\} \quad (\text{изгиб}) \quad (2.9)$$

и для напряжений в области контакта

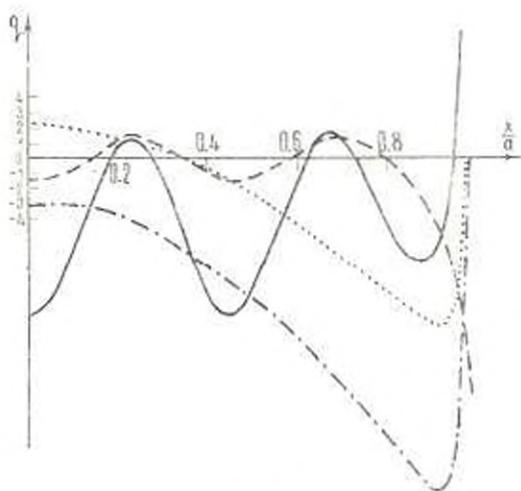
$$\frac{q(x)}{c_{22} h^2} = K^*{}^{-1}(0) + \left[ \frac{z_1^2 - \zeta_1^2}{A z_1^2} \sqrt{B^2 + z_1^2} + \frac{X^+(-z_2) - X^-(-z_1)}{\sqrt{A}} (z_1 - \zeta_1) \sqrt{B + i\zeta_1} \right] \cos z_1 x \quad (\text{сжатие}) \quad (2.10)$$



туда и сдвиг фазы каждой волны могут быть легко определены из приведенных формул.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Таблица

$N$	$a$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$b_1$	$b_2$
1	1	-1.316	1.313 + 1.259i	0	-1.176 + 0.142i	0
2	2	-1.316	1.256 + 3.009i	0	-1.672 + 0.981i	0
3	1	-1.493	-2.937 - 0.26i	-2.536 - 0.702i	-2.614 + 0.035i	-2.813 - 0.559i
4	2	-4.493	4.178 + 3.846i	-2.793 - 1.615i	-3.0 + 0.701i	-2.00 - 1.02i
5	10	-1.316	8.855 - 10.047i	0		
6	10	-4.493	-5.896 - 1.448i	(10.115 - 0.066i) × 10 <sup>-3</sup>		

Замечание 1. Приведенные формулы справедливы для достаточно больших  $a$  (в случае малых  $a$  можно применить метод «больших  $\lambda$ » [7]).

Замечание 2. В настоящей работе изучены лишь динамические составляющие механической задачи о вибрации штампа. Полное решение механической задачи представляет сумму статической и динамической задач. Решение статической задачи можно получить известными методами, изложенными в различных обзорах (напр., [8]).

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Бабешко за руководство работой

НИИ механики и прикладной математики  
Ростовского государственного университета

Поступила 11 XI 1974

Ա. Օ. ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ, Տ. Վ. ԿՈՐԵՆԵՎԱ, Մ. Գ. ՍԵԼԵԶՆԵՎ

ՏՆՏՏԱՆՎԱԿ ԳՐԱՇՐՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԻՐՏՈՒՐ ԱՎԲԵՆԻՐ ԱՌԱՋԱՅՈՒՄԻ

Ա մ փ ո փ ո ս յ

Անոտմնասիրվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ շերտի եզրի վրա կշռադրվածի թրթուման հարթ խնդիրը: Քննարկվել է սիմետրիկ և շեղ սիմետրիկ դեպքերը:

Անոտմնասիրվել է այն ինտեգրալ հավասարումը, որին հանդեպում են ճիտարկված եզրային խնդիրները: Գիտարկված դեպքերի համար կառուցվել է ինտեգրալ հավասարման մոտավոր լուծումները: Քննարկվում է ստացված արդյունքների վերլուծությունը:

## WAVES EXCITATION BY A VIBRATING PUNCH IN AN ANISOTROPIC LAYER

A. O. VATULIAN, T. V. KORENEVA, M. T. SELEZNEV

### S u m m a r y

A plane problem of vibration of rigid punches on the surface of a transversal isotropic layer is studied; a symmetric and an asymmetric cases are examined.

An integral equation to which boundary value problems are reduce is considered; the approximate solutions are obtained and a numerical analysis of the results obtained is given.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лавровский С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. ГИИТА. М., 1950.
2. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, т. 210, № 6, 1973.

3. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, т. 213, № 3, 1973.
4. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, т. 211, № 1, 1971.
5. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, т. 217, № 4, 1974.
6. Берсвин Н. С., Бидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. — Наука, М., 1966.
7. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, т. 32 вып. 4, 1968.
8. Абрамян Б. А. Обзор результатов, полученных по контактным задачам в АН АрмССР. Контактные задачи и их инженерные приложения. ИИИМАШ, М., 1974 (доклады конференции).