ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

ДВЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим тонкую пьезоэлектрическую пластинку, вырезанную из материала, структурная единица которого имеет одну плоскость симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки. Пусть пластинка испытывает деформацию изгиба под действием нагрузки, приложенной к ее краю. Нагрузка представляется в виде изгибающего M_n и крутящего $H_{\tau n}$ моментов, а также перерезывающей силы N_n. Общая постановка задачи изложена в работе [1], где получена система двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $w(x_1, x_2)$ — прогиба срединной плоскости и $V(x_1, x_2)$ — распределения потенциала срединной поверхности

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h} L_3 V = q, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h} L_3 w + \frac{1}{4\pi}\frac{4}{h^2} L_2 V = Q \tag{1}$$

Линейные операторы с частными производными имеют вид

$$L_4 = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 4B_{13}\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(B_{12} + 2B_{33})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + $$

$$+ 4B_{23}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + B_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

$$L_3 = B_{14}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{15} + 2B_{34})\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{24} + 2B_{35})\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + B_{25}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \tag{2}$$

$$L_2 = B_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{45}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{55}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Здесь B_{ij} — постоянные коэффициенты, связанные с толщиной h и материальными константами среды.

В условиях поставленной задачи положим, что интенсивность нормальной нагрузки $q = 0$, а также интенсивность свободного заряда на поверхностях пластинки $Q = 0$.

Система уравнений (1) относится к тому же типу, что и система уравнений для функций напряжений и индукции, полученная в работе (2). Общие выражения для функций w и V зависят от корней характеристического уравнения

$$l_2(\mu)\, l_4(\mu) + \frac{1}{4\pi} l_3^2(\mu) = 0 \tag{3}$$

где обозначены полиномы от μ

$$l_4(\mu) = B_{55}\mu^2 + 2B_{15}\mu + B_{44}$$

$$l_3(\mu) = B_{25}\mu^3 + (B_{24} + 2B_{35})\mu^2 + (B_{15} + 2B_{34})\mu + B_{14} \tag{4}$$

$$l_2(\mu) = B_{22}\mu^4 + 4B_{23}\mu^3 + 2(B_{12} + 2B_{33})\mu^2 + 4B_{13}\mu + B_{11}$$

Примем, что корни уравнения (3) не являются кратными, а также они не являются корнями уравнений

$$l_2(\mu) = 0 \qquad l_4(\mu) = 0$$

С помощью метода последовательного интегрирования действиями, аналогичными изложенным в работе [2], найдем общие выражения для искомых функций

$$w = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} w_k(y_k), \qquad V = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} V_k(y_k) \tag{5}$$

Здесь w_k и V_k — произвольные аналитические функции комплексных переменных $y_k = x_1 + \mu_k x_2$ $(k = 1, 2, 3)$, μ_k — три корня уравнения (3), три остальные корня будут им сопряженные.

Введем обозначения

$$w_1'(y_1) = \Phi_1(y_1), \qquad w_2'(y_2) = \Phi_2(y_2), \qquad V_3'(y_3) = \Phi_3(y_3) \tag{6}$$

Штрихами обозначены производные по своим аргументам. Представляется возможным выразить все искомые функции, а также краевые условия задачи через эти три функции.

Введем обозначения

$$m_1 = -\frac{h}{2}\frac{l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)}, \quad m_2 = -\frac{h}{2}\frac{l_4(\mu_2)}{l_3(\mu_2)}, \qquad m_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h}\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)} \tag{7}$$

Тогда изгибающие и крутящий моменты M_1, M_2, H_{12}, перерезывающие силы N_1, N_2, а также электрические моменты P_1, P_2, отнесенные к единице длины сечения срединной плоскости, выражаются через функции (6):

$$M_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{1k}\Phi_k', \qquad M_2 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{2k}\Phi_k'$$

$$H_{12} = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{3k}\Phi_k'$$

$$N_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{4k}\Phi_k'', \qquad N_2 = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{5k}\Phi_k'' \tag{8}$$

$$P_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{6k}\Phi_k', \qquad P_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{7k}\Phi_k'$$

Введем вспомогательные обозначения ($k = 1, 2, 3$)

$$\mu_{1k} = B_{11} + 2B_{13}\lambda_k + B_{33}\lambda_k^2, \qquad \nu_{1k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{14} + B_{15}\lambda_k)$$

$$\mu_{2k} = B_{12} + 2B_{23}\lambda_k + B_{22}\lambda_k^2, \quad \nu_{2k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{24} + B_{25}\lambda_k)$$

$$\mu_{3k} = B_{13} + 2B_{33}\lambda_k + B_{23}\lambda_k^2, \quad \nu_{3k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{34} + B_{35}\lambda_k)$$

$$\mu_{4k} = B_{11} + 3B_{13}\lambda_k + (B_{12} + 2B_{33})\lambda_k^2 + B_{23}\lambda_k^3$$

$$\nu_{4k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}[B_{14} + (B_{15} + B_{34})\lambda_k + B_{35}\lambda_k^2]$$

$$\mu_{5k} = B_{13} + (B_{12} + 2B_{33})\lambda_k + 3B_{23}\lambda_k^2 + B_{22}\lambda_k^3 \tag{9}$$

$$\nu_{5k} = -\frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}[B_{34} + (B_{24} + B_{35})\lambda_k + B_{25}\lambda_k^2]$$

$$\mu_{6k} = \frac{1}{4\pi}(B_{14} + 2B_{34}\lambda_k + B_{24}\lambda_k^2), \qquad \nu_{6k} = \frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{44} + B_{45}\lambda_k)$$

$$\mu_{7k} = \frac{1}{4\pi}(B_{15} + 2B_{35}\lambda_k + B_{25}\lambda_k^2), \qquad \nu_{7k} = \frac{2}{h}\frac{1}{4\pi}(B_{45} + B_{55}\lambda_k)$$

Тогда постоянные коэффициенты при функциях Φ_k' в выражениях (8) ($l = 1, 2, \ldots, 7$; $k = 1, 2$) будут

$$n_{lk} = \mu_{lk} + m_k \nu_{lk}, \qquad n_{l3} = \mu_{l3} m_3 + \nu_{l3} \tag{10}$$

Пусть на краю пластинки заданы изгибающий и крутящий моменты, перерезывающая сила, а также электрический момент как функции дуги контура s

$$M_n = m(s), \qquad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = r(s), \qquad P_n = p(s) \tag{11}$$

Имея в распоряжении ряд легко доказываемых тождеств ($k = 1, 2, 3$)

$$n_{4k} + \lambda_k n_{5k} = 0, \qquad n_{6k} + \lambda_k n_{7k} = 0$$

$$\frac{n_{4k}}{\lambda_k} - n_{3k} = \frac{n_{1k}}{\lambda_k}, \qquad -n_{3k} - \frac{n_{4k}}{\lambda_k} = n_{2k}\lambda_k \tag{12}$$

интегрированием получим краевые условия для функций Φ_k:

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\frac{n_{1k}}{\lambda_k}\Phi_k = -\int_0^s [m(s)\,dx_2 + f(s)\,dx_1] - Cx_1 + C_1$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{2k}\Phi_k = \int_0^s [-m(s)\,dx_1 + f(s)\,dx_2] + Cx_2 + C_2 \tag{13}$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{7k}\Phi_k = -4\pi\int_0^s p(s)\,ds + C_3$$

где $f(s) = \int_0^s r(s)\,ds$; C, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные интегрирования; интегралы берутся по дуге контура от некоторой начальной до переменной точки.

Рассмотрим краевую задачу об изгибе пьезоэлектрической пластинки сосредоточенным моментом. Пусть пластинка имеет прямолинейный участок границы. Тогда можно рассматривать пластинку как бесконечную полуплоскость. Направим вдоль прямолинейной границы ось x_2, ось x_1 — внутрь пластинки. Пусть сосредоточенный изгибающий момент приложен в начале координат. Для решения задачи применим метод Н. И. Мусхелишвили [3], с помощью которого была решена аналогичная математическая проблема в работе [4]. Краевые условия (11) при $x_1 = 0$ имеют вид

$$M_1 = m(\xi), \quad N_1 + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} = 0, \qquad P_1 = 0 \tag{14}$$

где ξ — точка контура срединной поверхности пластинки. Условия для функций Φ_k, в соответствии с (8) и с учетом тождести (12), будут

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{1k}\Phi'_k(\xi) = m(\xi), \qquad 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{2k}\lambda_k\Phi'_k(\xi) = 0$$

$$2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} n_{6k}\Phi'_k(\xi) = 0 \tag{15}$$

Умножим каждое из равенств (15) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\xi}{\xi - y}$, где $y = x_1 + ix_2$ — произвольная точка внутри области S, и почленно проинтегрируем в пределах от $-\infty$ до ∞. На основании свойств интеграла типа Коши, взятого по прямой, получим

$$n_{11}\Phi'_1(y) + n_{12}\Phi'_2(y) + n_{13}\Phi'_3(y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}\,d\xi$$

$$\lambda_1 n_{21}\Phi'_1(y) + \lambda_2 n_{22}\Phi'_2(y) + \lambda_3 n_{23}\Phi'_3(y) = 0 \tag{16}$$

$$n_{61}\Phi_1(y) + n_{62}\Phi_2(y) + n_{63}\Phi_3(y) = 0$$

Разрешим систему (16) относительно $\Phi'_k(y)$ и припишем каждой функции значение своего аргумента в соответствии с (6).

$$\Phi'_1(y_1) = -\frac{l_2 n_{22} n_{63}}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi$$

$$\Phi'_2(y_2) = -\frac{l_2 n_{21} n_{63}}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi \tag{17}$$

$$\Phi'_3(y_3) = -\frac{l_1 n_{21} n_{62}}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi - y}d\xi$$

где Δ — определитель системы (16)

$$\Delta = l_2 n_{11} n_{22} n_{63} + l_3 n_{12} n_{23} n_{61} + l_1 n_{13} n_{21} n_{62} -$$
$$-(l_2 n_{13} n_{22} n_{61} + l_1 n_{11} n_{23} n_{62} + l_3 n_{12} n_{21} n_{63}) \tag{18}$$

Представим заданный сосредоточенный момент M в виде распределенного момента равномерной интенсивности $M/2\varepsilon$, действующего на контуре в пределах от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$. Подставив это выражение в (17), вычислив интегралы и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим производные от вспомогательных функций:

$$\Phi'_1(y_1) = \frac{l_2 n_{22} n_{63}}{2\pi i\Delta}\,\frac{M}{y_1}$$

$$\Phi'_2(y_2) = \frac{l_2 n_{21} n_{63}}{2\pi i\Delta}\,\frac{M}{y_2} \tag{19}$$

$$\Phi'_3(y_3) = \frac{l_1 n_{21} n_{62}}{2\pi i\Delta}\,\frac{M}{y_3}$$

Зная функции (19), можно определить остальные искомые величины, такие, как прогиб и распределение потенциала срединной поверхности пластинки, напряжения и деформации в любой ее точке, а также поляризацию и напряженность электрического поля.

Числовой пример рассмотрим на основе пластинки толщины $h = 0.1$ *см*, вырезанной из кристалла бифталата калия, свойства которого изучены в работе [5]. Основная система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$(0.1255\, w^{IV}_{,1111} + 0.377\, w^{IV}_{,1122} + 0.107\, w^{IV}_{,2222}) \cdot 10^{6} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}(0.0986\, V'''_{,111} + 0.283\, V'''_{,122}) \cdot 10^{3} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}(0.0986\, w_{111}^{'''} + 0.283\, w_{122}^{'''})\cdot 10^{3} + \frac{1}{\varepsilon}(0.034\, V_{11}^{''} + 0.0498\, V_{22}^{''}) = 0$$

Характеристический полином (3) имеет корни

$$\lambda_1 = i1.77,\quad \lambda_2 = i0.615,\quad \lambda_3 = i0.827$$

$$\lambda_4 = \bar{\lambda}_1,\quad \lambda_5 = \bar{\lambda}_2,\quad \lambda_6 = \bar{\lambda}_3 \tag{21}$$

а отношения m_k, согласно (7), имеют значения

$$m_1 = -1.015\cdot 10^{2},\qquad m_2 = 0.0865\cdot 10^{1} \tag{22}$$

$$m_3 = 1.85\cdot 10^{-5}$$

Вспомогательные функции задачи, согласно (19), получим в виде

$$\Phi_1'(y_1) = -0.4i\cdot 10^{-9}\frac{M}{y_1},\qquad \Phi_2'(y_2) = -0.591i\cdot 10^{-9}\frac{M}{y_2}$$

$$\Phi_3'(y_3) = -0.1875i\cdot 10^{-9}\frac{M}{y_3} \tag{23}$$

Подставляя (23) в выражения (8), найдем вызванное сосредоточенным изгибающим моментом распределение изгибающих и крутящего моментов, а также электрического момента в любой точке срединной поверхности пластинки, измеренных в единицах системы *CGSE*.

$$M_1 = 2M\left(-\frac{4.92}{\Delta_1} + \frac{3.71}{\Delta_2} + \frac{213}{\Delta_3}\right)x_2\cdot 10^{-3}$$

$$M_2 = 2M\left(-\frac{19.2}{\Delta_1} + \frac{0.762}{\Delta_2} - \frac{152}{\Delta_3}\right)x_2\cdot 10^{-3}$$

$$H_{12} = 2M\left(-\frac{8.93}{\Delta_1} - \frac{4.57}{\Delta_2} - \frac{336}{\Delta_3}\right)x_1\cdot 10^{-3} \tag{24}$$

$$P_1 = 2M\left(\frac{8.45}{\Delta_1} + \frac{0.232}{\Delta_2} - \frac{786}{\Delta_3}\right)x_2\cdot 10^{-9}$$

$$P_2 = 2M\left(-\frac{1.68}{\Delta_1} - \frac{0.566}{\Delta_2} - \frac{1183}{\Delta_3}\right)x_1\cdot 10^{-9}$$

где

$$\Delta_1 = x_1^2 + 3.14x_2^2,\qquad \Delta_2 = x_1^2 + 0.378x_2^2,\qquad \Delta_3 = x_1^2 - 0.685x_2^2$$

Можно далее найти и другие неизвестные фукции задачи, такие, как прогиб, распределение потенциала электрического поля в срединной поверхности, перерезывающие силы и другие.

Метод позволяет исследовать электроупругое состояние пластинки, когда на ограниченном участке прямолинейной границы ее действует крутящий момент или перерезывающая сила или любая их совокупность, распределенные по любому закону.

Большой практический интерес представляет рассмотрение работы пьезоэлектрической пластинки в условиях, когда ее поверхности находятся в непосредственном контакте с обкладками — хорошо проводящими электродами, не оказывающими влияния на ее упругие свойства. Технология нанесения таких обкладок подробно описана в монографии [6].

Рассматривая прямой пьезоэффект, поставим задачу отыскания потенциала электрического поля U на обкладках, появляющегося в результате действия на пластинку распределенной нагрузки интенсивности $q(x_1, x_2)$, нормальной к срединной плоскости пластинки в ее недеформированном состоянии. Для этого изучим краевую задачу об изгибе тонкой прямоугольной пьезоэлектрической пластинки с обкладками, защемленной по всему контуру.

Для вывода дифференциальных уравнений запишем вариационный принцип исследуемой задачи, утверждающий стационарность функционала на искомых функциях [7]

$$J[w, V] = \frac{1}{2} \iint\limits_{(S)} \{ B_{11} (w'_{11})^2 + B_{22} (w'_{22})^2 + 4B_{33} (w'_{12})^2 +$$

$$+ 2B_{12} w'_{11} w'_{22} - 4B_{13} w'_{11} w'_{12} - 4B_{23} w'_{22} w'_{12} -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{4}{h} (B_{14} w'_{11} V'_1 + B_{15} w'_{11} V'_2 + B_{24} w'_{22} V'_1 + B_{25} w'_{22} V'_2 + \tag{25}$$

$$+ 2B_{34} w'_{12} V'_1 + 2B_{35} w'_{12} V'_2) - \frac{1}{4\pi} \frac{4}{h^2} [B_{44} (V'_1)^2 + B_{55} (V'_2)^2 +$$

$$2B_{45} V'_1 V'_2] - 2QV - 2qw \} \, dS$$

Штрихи вместе с нижними индексами обозначают частные производные по координате x_1 или x_2.

При рассмотрении прямого пьезоэффекта $Q(x_1, x_2)$ — интенсивность свободного электрического заряда на обкладках — представляет собой интенсивность свободного заряда, индуцированного связанным зарядом, выделившимся на поверхности пластинки. Очевидно, что функция Q заранее неизвестна и зависит от электроупругого состояния пластинки.

Известно [8], что вблизи заряженной поверхности проводника нормальная компонента вектора электростатической индукции есть

$$D_n = 4\pi Q \tag{26}$$

Запишем выражение для единичного вектора нормали к поверхности $w = w(x_1, x_2)$ [9]

$$\vec{n} = \frac{-p\vec{i} - q\vec{j} + 1 \cdot \vec{k}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \tag{27}$$

где p и q суть тангенсы углов наклона касательных к кривой в сечениях соответственно $x_1 x_3$ и $x_2 x_3$.

$$p = \frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{28}$$

Необходимо выразить неизвестную функцию $Q(x_1, x_2)$ через искомые функции $w(x_1, x_2)$ и $V(x_1, x_2)$. Величины (28) и тем более их квадраты малы по сравнению с единицей вследствие основных предположений теории изгиба тонких пластин о малости толщины по сравнению с размерами пластинки в плане и малости прогиба по сравнению с толщиной. Подставляя (27) в (26), получим

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n} = D_3 \tag{29}$$

Согласно одному из уравнений состояния [10] имеем

$$D_3 = \varepsilon_{3j} E_j - e_{3ij} \xi_{ij} \tag{30}$$

Здесь предполагается суммирование по индексам i, $j = 1, 2, 3$.

Если структурная единица материала имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную оси x_3, то [11]

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0, \qquad e_{311} = e_{312} = e_{322} = 0 \tag{31}$$

Кроме того, согласно гипотезам прямых нормалей Кирхгофа, в теории изгиба тонких пластин предполагается, что

$$\xi_{13} = \xi_{23} = \xi_{33} = 0 \tag{32}$$

Подставим (31) и (32) в (30). Тогда получим

$$D_3 = \varepsilon_{33} E_3 \tag{33}$$

Теперь можно записать с учетом (26) и (29)

$$E_3 = \frac{4\pi Q}{\varepsilon_{33}} \tag{34}$$

С другой стороны, компонента напряженности электрического поля E_3 выражается через двумерный потенциал электрического поля — функцию V — следующим образом:

$$E_3 = -\frac{2}{h} V \tag{35}$$

Сравнивая (34) и (35), получим выражение функции Q через функцию V

$$Q = -\frac{\varepsilon_{33}}{2\pi h} V \tag{36}$$

Подставляя (36) в (25) и составляя уравнения Эйлера, получим основные уравнения теории изгиба тонких пьезоэлектрических пластин с обкладками под действием нормальных распределенных усилий

$$L_1 w - \frac{1}{2\pi h} L_3 V = q, \qquad L_3 w + \frac{2}{h} L_2 V - 2\varepsilon_{33} V = 0 \tag{37}$$

Краевая задача состоит в нахождении двух неизвестных функций w и V, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (37) и следующим граничным условиям при $x_1 = 0$, $x_1 = l$:

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \qquad V = 0 \tag{38}$$

при $x_2 = \pm b$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \qquad V = 0 \tag{39}$$

Введем безразмерные координаты

$$y_1 = \frac{x_1}{b}, \qquad 0 \leq y_1 \leq 2a, \qquad y_2 = \frac{x_2}{b}, \qquad -1 \leq y_2 \leq 1 \tag{40}$$

Согласно методу Л. В. Канторовича, приближенное решение задачи ищем в виде

$$\begin{gathered} w(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_1)\, h_k(y_2) \\ V(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y_1)\, H_k(y_2) \end{gathered} \tag{41}$$

Здесь $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$ — две системы линейно-независимых функций, удовлетворяющих, в соответствии с (39), условиям

$$h_k(\pm 1) = h_k'(\pm 1) = 0, \qquad H_k(\pm 1) = 0 \tag{42}$$

$g_k(y_1)$ и $G_k(y_1)$ — функции, подлежащие определению из вариационного принципа.

В качестве функций $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$ возьмем системы ортонормированных полиномов, построенных Г. Хорви [12]. Для первого приближения они имеют вид

$$h_1(y_2) = \frac{3\sqrt{5\cdot 7}}{16}(1 - y_2^2)^2, \qquad H_1(y_2) = \frac{\sqrt{3\cdot 5}}{4}(1 - y_2^2) \tag{43}$$

Подставляя (43) в функционал (25) с учетом (40) и (41), а также производя интегрирование по y_2, получим

$$J = \frac{1}{2b^2}\int_0^{2a}\Big\{B_{11}(g'')^2 + \frac{9\cdot 7}{2}B_{22}g^2 + 12B_{33}(g')^2 - 6B_{12}g''g -$$

$$-\frac{1}{4}\frac{4b}{h}\Big(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{14}Gg'' - \sqrt{\frac{3\cdot 7}{2}}B_{24}Gg + \sqrt{3\cdot 7}B_{35}Gg'\Big) -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{4b^2}{h^2}\left[B_{11}(G')^2+\frac{5}{2}B_{55}G^2\right]+\frac{\varepsilon_{33}b^4}{\pi h}G^2-2qb^4g\sqrt{\frac{7}{5}}\Bigg]dy_1 \qquad (44)$$

Из условия стационарности функционала (44) вытекает система двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $g(y_1)$ и $G(y_1)$

$$B_{11}g^{IV}-6(B_{12}+2B_{33})g''+31.5B_{22}g-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{b}{h}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{11}G'''-\frac{\sqrt{3\cdot 7}}{2}(B_{21}+2B_{33})G'\right]=qb^4\sqrt{\frac{7}{5}}$$
$$(45)$$
$$\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{11}g'''-\frac{\sqrt{3\cdot 7}}{2}(B_{21}+2B_{33})g'\right]+$$
$$+\frac{2b}{h}\left[B_{11}G''+\left(\varepsilon_{33}b^2h-\frac{5}{2}B_{55}\right)G\right]=0$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$g(0)=g'(0)=0, \qquad g=(2a)=g'(2a)=0, \qquad G(0)=G(2a)=0 \qquad (46)$$

Числовой пример рассмотрим на основе пластинки, вырезанной из кристалла бифталата калия [5], имеющей размеры $2a=1$ *см*, $b=1$ *см*, $h=0.1$ *см*.

Уравнения (45) будут иметь вид

$$(g^{IV}-9g''+26.8g)\cdot 10^5-(1.22G'''-8.24G')=0.094q$$
$$(47)$$
$$(g'''-6.71g')\cdot 10^3+(0.704G''+40G)=0$$

Корни характеристического определителя имеют значения

$$\lambda_{1,2,3,4}=\pm 2.18\pm i0.48; \qquad \lambda_{5,6}=\pm i7.52 \qquad (48)$$

Записывая общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (47) и удовлетворяя граничным условиям (46), получим

$$g=-[e^{2.18y_1}(0.772\cos 0.48y_1-0.818\sin 0.48y_1)+$$
$$+e^{-2.18y_1}(2.73\cos 0.48y_1+9.69\sin 0.48y_1)+0.00209\cos 7.52y_1+$$
$$+0.00151\sin 7.52y_1-3.51]\cdot 10^{-7}q$$
$$(49)$$
$$G=[e^{2.18y_1}(-1.734\cos 0.48y_1-0.435\sin 0.48y_1)+$$
$$+e^{-2.18y_1}(11.94\cos 0.48y_1+10.67\sin 0.48y_1)-$$
$$-10.2\cos 7.52y_1-14.15\sin 7.52y_1]\cdot 10^{-7}q$$

Подставляя (49) в (41), найдем искомые функции w и V в первом приближении.

Для определения разности потенциалов на обкладках воспользуемся формулой для плоского конденсатора

$$U_2 - U_1 = \frac{4\pi h}{\varepsilon_{33} S} \iint_{(S)} Q\,dS \tag{50}$$

Вместо функции Q подставим ее значение (36) через функцию V

$$U_2 - U_1 = -\frac{2}{S} \iint_{(S)} V\,dS \tag{51}$$

Вычисляя интеграл (51) по всей площади пластинки, получим

$$U_2 - U_1 = -5.79 \cdot 10^{-6} q \tag{52}$$

Так, при действии равномерной нагрузки интенсивности $10\ г/см^2$ на обкладках возникает разность потенциалов в $17\ в$, причем, обкладка, расположенная в области $x_3 > 0$, будет иметь отрицательный потенциал.

Изложенный метод решения задачи о нахождении разности потенциалов на обкладках при изгибе пьезоэлектрической пластинки позволяет решать широкий круг задач при различных закреплениях сторон $x_1 = 0$, $x_1 = l$, а также различных функциях распределения внешней нагрузки.

Ленинградский политехнический
институт им. М. Н. Калинина

Поступила 12 V 1974

Ի. Ա. ՎԱՍԻԼԵՎԱ

ԲԱՐԱԿ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԵՐԿՈՒ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում են բարակ պյեզոէլեկտրական սալի ծռման վերաբերյալ երկու եզրային խնդիրներ։ Ուսումնասիրվում է պյեզոէլեկտրական սալի էլեկտրաստատիկ վիճակը, երբ ազդող բեռը բաշխված է սալի եզրի վրա։ Լուծվում է առաջին եզրային խնդիրը, երբ եզրի վրա կիրառված է կենտրոնական ծռող մոմենտ։ Երկրորդ եզրային խնդրի լուծման ժամանակ ստացվել է դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ երեսպատումներով պյեզոէլեկտրական սալի ծռման դեպքի համար և գտնվել է հավասարաչափ բաշխված նորմալ ճիգերի ազդեցության ժամանակ երեսպատումների վրա պոտենցիալների տարբերությունը։

TWO BOUNDARY PROBLEMS ON BENDING A THIN PIEZOELECTRIC PLATE

I. A. VEKOVISCHEVA

Summary

Two boundary problems on bending a thin piezoelectric plate are dealt with. An dielectroelasticity state of the plate under load, distributed along its boundaries, is examined. Accordingly, a solution to the first problem with a concentrated bending moment is presented. On solving the second problem a system of differential equations for bending the piezoelectric plate with electrodes is derived and the potential difference oz electrods under regularly distributed normal stresses is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вековищева И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, №4, 1972.
2. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. ПМТФ, №2, 1970.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука", 1966.
4. *Вековищева И. А.* Распределение деформаций и электрического поля в электроупругом полупространстве при прямом пьезоэффекте. Прикл. мех-ка, т. IX, вып. 12, 1973.
5. *Беляев А. М.* и др. Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства. Кристаллография, т. 14, вып. 4, 1969.
6. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практические применения. ИЛ., 1949.
7. *Вековищева И. А.* Вариационные принципы в теории электроупругости. Прикл. мех-ка, т. 8, вып. 9, 1971.
8. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. Физматгиз, 1954.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. II. Изд-во „Наука", 1967.
10. *Вековищева И. А.* Общие уравнения теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. Изв. ВУЗов, Физика, №10, 1970.
11. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во „Наука", 1968.
12. *Horvay G.* The End Problem of Rectangular Strips. J. Appl. Mech., 20, 1953.