А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, В. Н. ЛОЖКИН

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ
 АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ПЬЕЗО- И
 ПИГОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

1. Рассмотрим сплошное тело, упругие свойства которого неотделимы от электрических и тепловых (явление пьезо- и пьезоэлектричества). Пусть в недеформированном и ненапряженном состоянии, а также при отсутствии электромагнитного поля тело имеет температуру T_0 .

Предположим, что объемные силы, объемные электрические заряды и внутренние тепловые источники в теле отсутствуют. Вследствие действия поверхностных сил, нагрева или охлаждения поверхности тела, наличия поверхностных электрических зарядов, а также при задании на поверхности потенциала электрического поля в теле возникнут поля перемещений, характеризуемые вектором $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$, деформаций r_{ij} и напряжений t_{ij} . При этом приращение температуры составит $\Theta = T - T_0$, где T абсолютная температура тела.

Допустим, что намагничиванием тела можно пренебречь. Тогда возникающее в нем электромагнитное поле характеризуется векторами $\bar{E}(E_1, E_2, E_3)$ напряженности электрического поля, $\bar{D}(D_1, D_2, D_3)$ электрической индукции и $\bar{H}(H_1, H_2, H_3)$ напряженности магнитного поля.

Все введенные величины рассматриваются в некоторой прямолинейной ортогональной системе координат $x_i (i = 1, 2, 3)$.

При сделанных предположениях электрическое поле будет потенциальным, то есть

$$E_m = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Одна из форм термодинамических соотношений, связывающих линейной зависимостью механические, электрические и тепловые величины, такова [1]

$$t_{ij} = c_{ijkl}^E r_{kl} - e_{mij} E_m - \gamma_{ij}^E \Theta$$

$$D_m = 4\pi e_{mij} r_{ij} + \epsilon_{mij}^E E_j + 4\pi p_m^E \Theta \quad (i, j, m = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Здесь c_{ijkl}^E и γ_{ij}^E — соответственно модули упругости и температурные коэффициенты механических напряжений, измеренные при постоянной

напряженности электрического поля; ϵ'_{mn} и p'_m — постоянные диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрические коэффициенты, измеренные при постоянных деформациях; e_{mij} — пьезоэлектрические модули.

Для деформаций и перемещений имеют место равенства

$$r_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad r_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j) \quad (1.3)$$

Система уравнений движения рассматриваемого тела состоит из уравнений движения классической теории упругости

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

уравнений Максвелла для электромагнитного поля [2], которые с учетом равенств (1.1) принимают вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.5)$$

и уравнения теплопроводности. При этом ρ — удельная плотность материала тела, c — скорость света в пустоте.

Уравнение теплопроводности получим из закона сохранения энергии, являющегося локальной формулировкой второго закона термодинамики [3]. При отсутствии внутренних тепловых источников имеем

$$T \frac{dS}{dt} = - \operatorname{div} \vec{q} \quad (1.6)$$

Здесь S — энтропия рассматриваемого материала тела, $\vec{q}$ — вектор теплового потока. Исходя из феноменологического закона Фурье для анизотропного тела [3]

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

где k_{ij} — коэффициенты теплопроводности, уравнение (1.6) можно записать так

$$T \frac{dS}{dt} = k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.8)$$

Термодинамическое соотношение для энтропии S имеет вид [1]

$$S = \int_{i,j} \vec{r}_{ij} + p'_m E_m + c'^E T^{-1} \Theta \quad (1.9)$$

При этом c'^E — удельная теплоемкость тела, измеренная при постоянных деформациях и напряженности электрического поля. Подставив последнее равенство в выражение (1.8) и учитывая малость изменения температуры, получим линейное уравнение теплопроводности в виде

$$k_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_i \partial x_j} - c^{\prime E} \frac{\partial H}{\partial t} - T_0 \gamma_{ij}^E \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} - T_0 p'_m \frac{\partial E_m}{\partial x_m} = 0 \quad (1.10)$$

Таким образом, с учетом соотношений (1.2)–(1.5) и (1.10) система уравнений движения тела получается такой

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^E \frac{\partial r_{kl}}{\partial x_j} - e_{mi} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_m} - \gamma_{ij}^E \frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3) \\ T_0 \gamma_{ij}^E \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} + T_0 p'_m \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x_m} - k_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} + c^{\prime E} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ 4\pi e_{mi} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_m} - \epsilon_{mn}^{\prime} \frac{\partial^2 v}{\partial x_m \partial x_n} + 4\pi p'_m \frac{\partial H}{\partial x_m} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Пять первых уравнений системы (1.11) можно рассматривать независимо, а последнее — векторное уравнение использовать для определения магнитной напряженности $\vec{H}$.

Будем считать, что на поверхности тела заданы механические (поверхностные силы или перемещения) [4], тепловые (температура, тепловой поток или конвективный теплообмен) [5], а также распределение поверхностного электрического заряда или потенциал электрического поля [2] и соответствующие начальные условия.

2. Рассмотрим квазистатическую задачу термоупругости для кристаллического слоя постоянной толщины $2h$ ($-h \leq x_1 \leq h$). Будем считать, что физические условия позволяют рассматривать задачу одномерной, то есть

$$u_1 = u(x, t), \quad u_2 = u_3 = 0, \quad v = v(x, t), \quad \Theta = \Theta(x, t) \quad (2.1)$$

Переходя от тензорной записи к матричной [6], соотношения (1.2) можно записать так

$$\begin{aligned} t_i = c_{ij}^E \frac{\partial u}{\partial x} - e_{ij} \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{ij}^E \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (i = \overline{1,6}) \\ D_m = 4\pi e_{m1} \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon_{m1}^{\prime} \frac{\partial v}{\partial x} + 4\pi p'_m \frac{\partial H}{\partial x} \quad (m = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения движения (1.11) (первое, четвертое и пятое) примут вид

$$c_{11}^E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma_{11}^E \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

$$T_0 \gamma_1^E \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + T_0 \rho_1^E \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - k_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + c^E \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$4\pi e_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma_{11}^E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\pi \rho_1^E \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

Для оставшихся уравнения механического движения используем для вывода условий одномерности рассматриваемой задачи. В данном случае получим

$$e_{12}^E = c_{16}^E = e_{13} = e_{18} = \gamma_{15}^E = \gamma_{16}^E = 0 \quad (2.4)$$

Таковыми свойствами обладают, например, X - и Y -срезы кварца [6].

Будем считать, что в начальный момент времени слой не подвержен внешним воздействиям, а именно

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{t=0} = 0 \quad (2.5)$$

а при $t > 0$ на его плоских гранях заданы потенциал электрического поля при отсутствии механических воздействий и изменения температуры, то есть

$$t_1|_{x=\pm h} = 0, \quad v|_{x=\pm h} = \pm v_0(t), \quad \theta|_{x=\pm h} = 0 \quad (2.6)$$

где $v_0(t)$ — известная функция, медленно изменяющаяся во времени.

Применяя к системе уравнений (2.3) преобразование Лапласа и разрешая полученную систему относительно функций-изображений, будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) &= (b_1 b_2 \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} h + T_0 b_3 b_1 \operatorname{sh} \sqrt{p} x) \bar{v}_0(p) w^{-1}(p) \\ \bar{v}(x, p) &= (b_1 b_2 \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} h - 4\pi T_0 b_3^2 \operatorname{sh} \sqrt{p} x) \bar{v}_0(p) w^{-1}(p) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\bar{\theta}(x, p) = T_0 b_3 b_2 (\operatorname{ch} \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} h - \operatorname{ch} \sqrt{p} x) \bar{v}_0(p) w^{-1}(p)$$

Здесь

$$w(p) = b_1 b_2 \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} h - 4\pi T_0 b_3^2 \operatorname{sh} \sqrt{p} h \quad (2.8)$$

Постоянные, входящие в соотношения (2.7) и (2.8), принимают такие значения

$$\begin{aligned} b_1 &= c^E c_{11}^E - T_0 \rho_1^E \gamma_{11}^E, & b_2 &= c_{11}^E \gamma_{11}^E + 4\pi e_{11}^2 \\ b_3 &= c_{11}^E \rho_1^E + e_{11} \gamma_{11}^E, & b_4 &= \gamma_{11}^E c_{11}^E - 4\pi e_{11} \rho_1^E \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$b_5 = c^E c_{11}^E + T_0 \gamma_{11}^E$$

$$i = [k_{11}^{-1} (c^E + T_0 \gamma_{11}^E b_2^{-1})]^2$$

Нули p_m функции $w(p^2)$ лежат на мнимой оси: $p_m = i\delta_m^{-1}h^{-1}\delta_m$.

Используя обобщенную теорему умножения и вторую теорему разложения [7], для функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $\mathcal{H}(x, t)$ получим следующие выражения:

$$u(x, t) = \frac{c_{11}}{c_{11}^*} v_0(t) \frac{x}{h} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m (b_1 b_2 \delta_m \frac{x}{h} \cos \delta_m + T_0 b_3 b_4 \sin \delta_m \frac{x}{h}) v_m(t)$$

$$v(x, t) = v_0(t) \frac{x}{h} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(b_2 b_3 \delta_m \frac{x}{h} \cos \delta_m - 4\pi T_0 b_3^2 \sin \delta_m \frac{x}{h} \right) v_m(t) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{H}(x, t) = 2h^{-1} T_0 b_2 b_3 \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m a_m \left(\cos \delta_m - \cos \delta_m \frac{x}{h} \right) v_m(t)$$

Здесь

$$v_m(t) = \exp\left(-\frac{\delta_m^2}{\lambda^2 h^2} t\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\delta_m^2}{\lambda^2 h^2} \tau\right) v_0'(\tau) d\tau$$

$$a_m = \delta_m^{-1} [b_2 b_3 \delta_m \sin \delta_m - (b_2 b_3 - 4\pi T_0 b_3^2) \cos \delta_m]^{-1} \quad (2.11)$$

Характеристики термоэлектроупругого состояния рассматриваемого слоя можно получить, подставив функцию (2.10) в соотношения (2.2).

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 20 V 1974

В. У. ГОДИНОВА-УСЕНКО, д. т. н. (1965)

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ՉԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՋԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ
ԽՆԳԻՐ ՊՅՅԵՂՈՒ ԵՎ ՊԻՐՈԷԼԵԿՏՐՈՎԱԿԱՆ ԷՅԿՆՆԵՐԻ ԱՆՆԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Վ. Գ. Գ. Գ. Գ.

Բյուրեղային շերտի համար, որի առաձգական հատկությունները անբաժանելի են շերտային և էլեկտրական հատկություններից (սյեզո և պիրոէլեկտրական երևույթ) արվում է թվադիտաարկ խնդրի լուծումը:

A QUASI-STATIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR ANISOTROPIC LAYER WITH PIEZO- AND PYROELECTRIC EFFECTS

A. S. KOSMODAMJANSKY, V. N. LOZHKIN

S u m m a r y

The solution to a quasi-static problem of thermoelasticity is given for a crystal layer whose elastic properties are inseparable from electric and thermal ones (piezo- and pyroelectric effects).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Митов У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. ИЛ, М., 1952.
2. Ландау А. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошной среды. Физматгиз, М., 1959.
3. Седов А. И. Механика сплошной среды, т. 1. Изд-во «Наука», М., 1970.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины. Гостехиздат, М., 1957.
5. Ноллицкий В. Динамические задачи термоупругости. Изд-во «Наука», М., 1970.
6. Желудев Н. С. Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во «Наука», М., 1968.
7. Лаврентьев М. А., Шабит Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.