

К. А. АГАЯН

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Контактные задачи для бесконечной или полубесконечной пластины с упругими креплениями в виде накладок (стрингеров) малой толщины рассматривались в работах многих авторов. Эти задачи иначе называются задачами о передаче нагрузок от стрингеров к упругим телам. Достаточно полный перечень работ, посвященных этим задачам, содержится в [1].

В настоящей работе рассматривается периодическая контактная задача для упругого листа в виде бесконечной тонкой пластины, усиленной симметрично расположенными и равноотстоящими друг от друга парами упругих накладок конечной длины.

На основе известных [2, 3] предположений решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей. Решение этого уравнения, как и в работах [3, 4, 5], сводится к решению вполне регулярной или квазивполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений простой структуры. Приводятся числовые результаты.

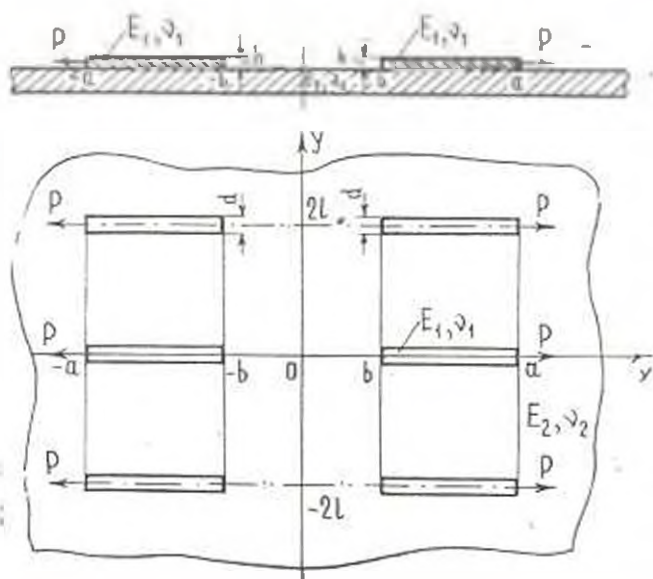
1. Пусть упругий лист в виде бесконечной пластины на конечных отрезках $[-a, -b]$ и $[b, a]$ ($b < a$) линий $y = 2nl$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) усилен упругими накладками прямоугольного поперечного сечения малой толщины h и малой ширины d . К концам накладок приложены равные по величине и противоположные по направлению силы P (фиг. 1). Целью работы является определение закона распределения контактных напряжений вдоль линий соединения накладок с пластиной.

Отметим, что указанная задача в случае произвольного конечного числа накладок была рассмотрена в работе [6], где ее решение было сведено к вполне или квазивполне регулярной системе из N бесконечных систем линейных уравнений ($2N$ — число пар накладок). При больших N эти системы приобретают довольно громоздкий вид и исключается возможность получения эффективного решения. Но при больших N естественно эту задачу интерпретировать как периодическую в одном направлении задачу. Одновременно с этим периодическая задача представляет собой самостоятельный интерес и, очевидно, эквивалентна некоторой смешанной граничной задаче для полуполосы. С другой стороны, решение периодической задачи в принципе можно получить из решения задачи в случае конечного числа накладок при помощи предельного перехода. Однако, фактическое осуществление предельного перехода в данном случае связано с определенными

трудностями и представляется нам невозможным. Таким образом, рассмотрение и настоящей работе периодической задачи аргументировано тем, что, во-первых, она представляет самостоятельный интерес и принципиально отличается от рассмотренной в [6] задачи, и, во-вторых, при больших N эффективное решение задачи из работы [6], фактически совпадающей с периодической задачей, несомненно затруднительно. В противном случае, как будет показано ниже, решение периодической задачи можно получить в довольно простом и удобном для вычислений виде.

Теперь, как и в работах [2, 3], будем предполагать, что вследствие малости толщины h жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, так что давлением накладок на пластину можно пренебречь. Тогда под накладками будут действовать только тангенциальные контактные напряжения. Предположим далее, что эти контактные напряжения сосредоточены вдоль средних линий накладок. Иначе говоря, примем модель одноосного напряженного состояния накладки в сочетании с моделью контакта по линии. Кроме этого, примем, что пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии.

Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к накладкам, обозначить индексом 1, а для плоскости индексом 2.



Фиг. 1.

Чтобы поставленную задачу сформулировать в виде определенного функционального уравнения, обратимся сначала к построению соответствующей функции влияния для пластины.

Функция влияния горизонтальные перемещения точек пластины от приложенной в точке (x_0, y_0) сосредоточенной горизонтальной силы P , имеет вид [6]

$$u^{(2)}(x, y) = P\eta_2 \left[\ln \frac{1}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right] + C \quad (1.1)$$

где $\eta_2 = \lambda_2/4\pi\mu_2(1-\nu_2)$, а C — произвольная постоянная.

Здесь $u^{(2)}(x, y)$ — горизонтальное перемещение точки (x, y) пластины, то есть перемещение вдоль оси Ox . Отметим, что в случае обобщенного плоского напряженного состояния $\lambda_2 = \lambda_1 = 3\mu_2/\lambda_1 + \mu_2 = -3 - \nu_2/(1 + \nu_2) > -1$, где λ_2 и μ_2 — коэффициенты Ляме, а ν_2 — коэффициент Пуассона.

Пусть теперь на пластинку действуют периодически повторяющиеся с периодом $2l$ в направлении оси Oy единичные горизонтальные сосредоточенные в точках $(x_0, 2nl)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) силы. Такая нагрузка, очевидно, выражается формулой

$$P(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0, y-2nl)$$

где $\delta(x, y)$ — известная дельта-функция Дирака.

На основании известного принципа наложения теории упругости и согласно (1.1) находим, что горизонтальные перемещения $U^{(2)}(x, y)$ точек пластины на оси Ox имеют вид

$$U^{(2)}(x) = -2\eta_2 \ln \left| \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x_0)}{2l} \right| - \frac{2\eta_2}{\lambda_2} \frac{\pi(x-x_0)}{2l} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-x_0)}{2l} + C \quad (1.2)$$

где C — произвольная постоянная, выражающая жесткое смещение пластины.

Здесь предполагается, что последняя функция в направлении оси Oy продолжена периодически с периодом $2l$.

Отметим, что при получении (1.2) были использованы известные соотношения [7]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{2x} \left(\operatorname{cth} \pi x - \frac{1}{\pi x} \right)$$

Вследствие периодического характера задачи закон распределения контактных напряжений под парами накладок одинаков. Поэтому можем ограничиться рассмотрением одной из них, например, той, для которой $n = 0$.

Обращаясь теперь к выводу разрешающего уравнения, заметим, что из равновесия частей $[a, -b]$ и $[b, a]$ накладок и на основании закона Гука будем иметь

$$z^{(1)}(x) = \frac{dU^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{E_1 h d} \begin{cases} \int_{-a}^x \tau(s) ds, & x \in [-a, -b] \\ \int_x^a \tau(s) ds, & x \in [b, a] \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь E_1 — модуль упругости материала накладки, $\tau(x)$ — подлежащее определению тангенциальное напряжение, действующее под накладкой вдоль линии соединения ее с пластиной и приложенное к накладке, $U^{(1)}(x)$ — горизонтальное перемещение точек накладки.

С другой стороны, перемещения точек отрезков $[-a, -b]$ и $[b, a]$ пластины от действующих на нее по тем же отрезкам контактных напряжений интенсивности $\tau(x)$, согласно (1.2), будут

$$U^{(2)}(x) = 2\nu_2 \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \left[-\ln \left| \operatorname{sh} \frac{\tau(x-s)}{2l} \right| + \frac{\tau(x-s)}{2\nu_2} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-s)}{2l} \right] \tau(s) ds + C \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в условие контакта

$$\frac{dU^{(1)}(x)}{dx} = \frac{dU^{(2)}(x)}{dx}, \quad x \in \{[-a, -b], [b, a]\}$$

после некоторых элементарных выкладок для определения контактных напряжений получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\left(\int_{-a_1}^{-b_1} + \int_{b_1}^{a_1} \right) \left[\operatorname{cth} \frac{s-x}{2} + K(s-x) \right] \tau'(s) ds = \varphi(x) \quad (1.5)$$

где

$$K(x) = \frac{1}{\nu_2} \left[\frac{x}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} - \operatorname{cth} \frac{x}{2} \right]$$

$$\tau(x) = \begin{cases} \int_{-b_1}^{-a_1} \tau^*(s) ds, & x \in [-a_1, -b_1] \\ \int_{b_1}^{a_1} \tau^*(s) ds, & x \in [b_1, a_1] \end{cases}$$

$$a_1 = \pi a' l, \quad b_1 = \pi b' l, \quad \lambda = \frac{4\nu_2(1 + \nu_2)l}{E_1 \nu_2 h d}$$

Следует отметить, что первый интеграл в (1.5) понимается в смысле главного значения по Коши.

Следует еще отметить, что истинное контактное напряжение под накладками теперь дается соотношениями

$$\tau(x) = \frac{\pi P}{l} \varphi\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Далее, из условия равновесия накладки вытекает, что функция должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(-a_1) &= 1, & \varphi(-b_1) &= 0 \\ \varphi(b_1) &= 0, & \varphi(a_1) &= 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом, решение поставленной выше контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6).

2. Приступив к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6), произведем в (1.5) следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} s &= zu - \beta, & z &= \frac{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}{2} \\ \operatorname{ch} x &= xv + \beta, & \beta &= \frac{\operatorname{ch} a_1 + \operatorname{ch} b_1}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

После некоторых элементарных операций (1.5) примет вид

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\varphi(u)}{u-v} + K_1(u, v) \right] \varphi(u) du = 1, \quad \varphi(v) \quad (2.2)$$

где

$$\varphi(u) = \frac{2}{z} \sqrt{(zu - \beta)^2 - 1}, \quad K_1(u, v) = K(s-x) - K(s+x)$$

причем s и x следует заменить на u и v по формулам (2.1). При этом граничные условия (1.6) преобразуются к виду

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \quad (2.3)$$

Для контактных напряжений будем иметь формулу

$$\tau(x) = \frac{\pi P}{2l} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{l} \varphi(v), \quad v = \frac{1}{z} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi x}{l} - \beta \right) \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3) ищем в виде [4]

$$\varphi(u) = \frac{1}{\rho(u)\sqrt{1-u^2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(u) \quad (2.5)$$

где $T_n(u)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя (2.5) в (2.2), после некоторых элементарных операций относительно неизвестных коэффициентов $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} X_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} X_n + a_m X_0, & (m = 1, 2, \dots) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n X_n = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$A_{m,n} = R_{m,n} + M_{m,n}, \quad a_m = R_{m,0} + M_{m,0} \quad (2.7)$$

$$R_{m,n} = \frac{2i}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2} U_{m-1}(v) dv \int_{-1}^1 \frac{T_n(u) du}{\rho(u)\sqrt{1-u^2}}$$

$$M_{m,n} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2} U_{m-1}(v) dv \int_{-1}^1 K_2(u, v) \frac{T_n(u) du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 \frac{T_n(u) du}{\rho(u)\sqrt{1-u^2}}, \quad K_2(u, v) = \frac{K_1(u, v)}{\rho(u)}$$

Здесь $U_{m-1}(v)$ ($m = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода.

Отметим, что при получении бесконечной системы линейных уравнений было использовано известное соотношение для многочленов Чебышева [7]

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(u) du}{(u-v)\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \pi U_{n-1}(v), & (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (-1 \leq v \leq 1)$$

3. Перейдя к исследованию бесконечной системы линейных уравнений (2.6), не останавливаясь здесь на подробностях, отметим лишь, что при помощи известных методов [5, 6] можно показать, что при условии

$$\lambda < 2\sqrt{3} \frac{1-A}{B}$$

где

$$A = \frac{2}{3\sqrt{\pi x_2}} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} \left(\frac{\partial K_z(u, v)}{\partial u} \right)^2 du dv \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{cth} b_1 \left| 1 + \frac{\lambda(2\pi + 1)}{4 \operatorname{sh} b_1} \operatorname{cth} b_1 \right|$$

бесконечная система (2.6) будет вполне регулярной.

Заметим, что ядро бесконечной системы (2.6) представляет собой коэффициенты Фурье некоторой функции по полной ортогональной в квадрате $-1 < u, v \leq 1$ системе функций $\{U_{n-1}(u) U_{n-1}(v)\}_{n=1}^{\infty}$, которая имеет квадратично интегрируемую производную. Из известных теорем о двойных рядах, как это показано в [5, 6], следует, что при остальных значениях параметра λ бесконечная система (2.6) квазиполна регулярна. При этом суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left[|R_{m,n}| + |M_{m,n}| \right]$$

при $m \rightarrow \infty$ стремятся к нулю как $m^{-\frac{1}{2}}$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

4. Численные результаты по разбираемой задаче были получены на ЭВМ „Наири — 2“ при следующих значениях параметров:

- 1) $\lambda = 1$, $\pi a/l = 1$, $\pi b/l = 0.2$
- 2) $\lambda = 1$, $\pi a/l = 3$, $\pi b/l = 1.2$
- 3) $\lambda = 1$, $\pi a/l = 3$, $\pi b/l = 0.6$
- 4) $\lambda = 2$, $\pi a/l = 3$, $\pi b/l = 0.6$
- 5) $\lambda = 2$, $\pi a/l = 3$, $\pi b/l = 0.6$

В случаях 1) — 4) в качестве материалов контактирующих тел для накладки взяты углеродистая сталь, а для пластины — свинец.

Следует заметить, что случай 4) получается из случая 3) заменой a , b и l соответственно на $2a$, $2b$ и $2l$. Этим фактически учтено влияние величины полу периода l .

Случай 5) представляет собой тот же самый случай 3), но при другом значении параметра λ , которым учитываются различные варианты сочетания материалов накладки и пластины. Во всех этих случаях принималось $l/hd = 5$.

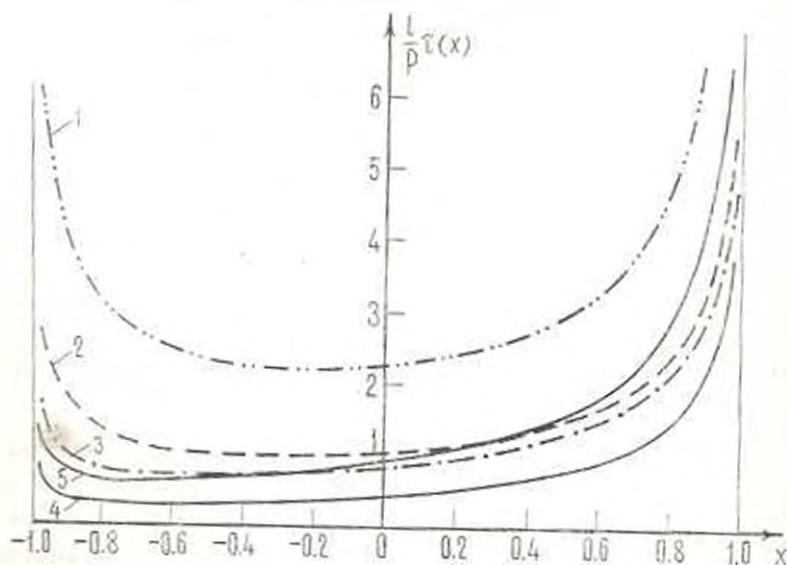
При указанных значениях параметров бесконечная система (2.6) была решена на ЭВМ „Наири-2“ методом редукции. Сначала бралась система из восьми уравнений, а затем система из десяти уравнений. При этом оказалось, что соответствующие решения этих систем совпали с большой точностью, а именно: после занятой оказались идентичными пять цифр.

Решения системы (2.6) из десяти уравнений соответственно указанным выше случаям приведены в таблице, в которой входящие числа имеют после запятой шесть верных цифровых знаков.

Таблица

	1	2	3	4
X_0	1.492876	0.707074	0.574065	0.658546
X_1	0.318021	0.237275	0.332463	0.504501
X_2	0.044359	0.030477	0.026451	0.73110
X_3	0.009980	-0.003773	-0.001242	0.001305
X_4	0.005484	0.005753	0.005087	0.009783
X_5	0.004075	0.001954	-0.001661	0.018772
X_6	0.001059	0.001918	0.002045	0.003614
X_7	0.002175	-0.000718	-0.000873	-0.001747
X_8	0.000000	0.000803	0.000983	0.001814
X_9	-0.001412	-0.000330	-0.000474	-0.000777
X_{10}	-0.000316	0.000402	0.000529	0.000242

На основе этой таблицы по формулам (2.3) и (2.4) получены числовые значения тангенциальных контактных напряжений $\tau(x)$ в различных точках. При помощи этих значений построены графики изменения хода функции $\frac{l}{p} \tau(x)$ (фиг. 2). Сопоставление этих графиков показывает, что при увеличении размеров участка контакта и величины полупериода l контактные напряжения резко падают. При этом коэф-



Фиг. 2.

коэффициент концентрации напряжения вблизи концов накладки также уменьшается. С другой стороны, при нарывировании упругих констант накладки и пластины в достаточно коротком интервале их изменения незначительно сказываются на распределении контактных напряжений.

В заключение приношу благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5 VII 1974

Կ. Լ. ԱԳԱՅԱՆ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԳԻՐՆԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԽԻ ՀԱՄԱՐ ԳԱՐՐԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԿՆԴԻՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում դիտարկվում է փոքր հաստությույն ունեցող երկուական առաձգական մերադիրներով սիմետրիկ դասավորությամբ ուժեղացված անվերջ սալի համար պարբերական կոնտակտային խնդիրը:

Խնդրի լուծումը բերվում է շոշափող կոնտակտային լարումն արտահայտող ֆունկցիայի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրո դիֆերենցիալ հավասարման:

Այդ հավասարման լուծումը փնտրվում է ըստ Զերիշեի առաջին սերի բազմանդամների շարքի տեսքով: Շարքի անհայտ գործակիցների նկատմամբ ստացվում է լիովին կամ թվադի-լիովին ուղղույնով գծային հավասարումների անվերջ սիստեմ:

Բերվում է իվային օրինակ:

A PERIODIC CONTACT PROBLEM FOR AN INFINITE PLATE WITH ELASTIC STIFFENERS

K. L. AGAYAN

The present paper deals with a periodic contact problem for an infinite plate reinforced by symmetrically placed dual elastic stiffeners of a small thickness.

The solution of the problem is reduced to a singular integro-differential equation with respect to a function expressing a contact stress.

The solution of this equation is found as a series over Chebishev polynomials of the first kind. For the unknown coefficients of the series a quite regular or a quasi-quite infinite system of linear algebraic equations is obtained.

A numerical example is presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухи Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех., Тр. Америк. об-ва инж.-механ., серия Е, т. 35, №4, 1968, 124—135.
2. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
3. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, в. 5, 1969.
4. Arutunyan N. K., Mchitryan S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold Nawaeki Anniversary Volume, Wolters-Nordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
5. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
6. Агаян К. Л. Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. МТТ, 1972, №5.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4. Физматгиз, М., 1962.