

М. А. БУРЫШКИН

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП К ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Учет симметрии механических систем и разнообразных расчетах связан с применением методов теории представлений групп [3—6]. С практической точки зрения весьма важен такой подход к исследованию симметричных инженерных конструкций, в котором бы эти методы — специфичные и зачастую громоздкие — непосредственно не участвовали. В работе [6] приведена методика статических расчетов пластин с циклической симметрией, отвечающая указанному условию. В данной работе эта методика распространяется на разнообразные линейные задачи механики консервативных систем, обладающих произвольной группой симметрии.

1. Группы симметрии реальных механических систем относятся к следующим двенадцати типам точечных групп: C_n , D_n , T , O , S_{2n} , C_{nh} , C_{nv} , D_{nh} , D_{nd} , T_d , T_h и O_h (описание этих групп приведено, например, в [1]), причем $C_{nh} = C_n \times C_2$, $D_{nh} = D_n \times C_{2h}$, $D_{nd} = D_n \times C_2$, $T_h = T \times C_2$ и $O_h = O \times C_2$ [1]. Последние равенства в общем виде записываются как $G' = G' \times E_2$, где G' — любая из групп C_{nh} , D_{nh} , D_{nd} , T_h и O_h ; G и E_2 — соответствующие G' группы с порядками, равными m' и двум. В дальнейшем через m обозначается порядок группы G ; l и m — число различных неприводимых представлений τ и их размерности; l' — число неприводимых представлений группы G' , а $q_j(G)$ и просто q_j — j -ый элемент группы G .

Каждая точечная группа характеризуется своей системой простых и зеркальных осей (здесь отражение рассматривается как зеркальный поворот на 360°). Оси нумеруются, начиная с осей высшего порядка. Обозначения отражений, а также нумерация осей в пределах одного порядка совпадают с принятыми в [1], причем ось $C_2^{(2)}$ группы O направляется вертикально вверх. Если множества простых поворотов вокруг осей некоторой группы первого рода расположить в соответствии с нумерацией осей, причем в каждом таком множестве повороты, отсчитываемые в направлении против часовой стрелки, располагать в порядке увеличения их углов, то элементы групп 1-го рода упорядочиваются и нумеруются, начиная с единичного. Неприводимые представления группы 1-го рода пронумерованы в [1].

Замечание 1. Если некоторое представление τ группы G — комплексно, то с теми же оговорками, что и в [6], вместо τ и τ^* рас-

считается уже приведенное представление, индуцируемое регулярным представлением группы G на объединение подпространств $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ преобразующихся соответственно по τ_1 и τ_2 . Указанному представлению приписывается наименьший из номеров представлений τ_1 и τ_2 . Таково, например, второе представление группы T .

Упорядочивание множества зеркальных поворотов групп C_{2n} , S_{2n} , D_{2nd} и T_d аналогично множеству простых поворотов и подчинение первого множества второму определяет способ нумерации элементов этих групп. Удобно считать, что номера одинаковых неприводимых представлений изоморфных групп совпадают.

Теперь естественно пронумеровать элементы и неприводимые представления групп C_{2n} , D_{2n} , D_{2n-1} , T_d и O_h по следующему принципу: $g_j(G) = g_j(G')$, $g_{1..m}(G') = g_j(E_2)g_i(G')$, ($j = 1, 2, \dots, m'$) и $\tau_i = \tau_i \otimes \tau_j$; $\tau_{i..l} = \tau_i \otimes \tau_j$, ($i = 1, 2, \dots, l'$), где τ_i и τ_j — i -е и j -е неприводимые представления группы G' и G'' , а τ_i и τ_j — неприводимые представления группы E_2 , причем τ_1 — единичное представление.

Пусть область Ω трехмерного пространства обладает точечной группой G симметрии, $x \in \Omega$ — произвольная точка этой области, а p и $p(x)$ — определенная в Ω вектор-функция и ее значение в точке x . Действуя элементом симметрии $g_j \in G$ ($j = 1, 2, \dots, m$) на точку x и вектор-функцию p , получим соответственно точку $g_j x$ и функцию p_j , которая точке x ставит в соответствие вектор $g_j p(g_j^{-1}x)$. Согласно [2] справедливы разложения

$$p = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m p_j^{(i)}; \quad p_j^{(i)} = \sum_{k=1}^m c_{kj}^{(i)} p_k; \quad (i = 1, 2, \dots, l; \quad j, k = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

Коэффициенты $c_{kj}^{(i)}$ и матрицы $\hat{\tau}_i(g_j)$ представлений τ_i для групп C_n и C_{2n} приведены в [6]. Для групп T и O_h эти коэффициенты и pk -е элементы $\hat{\tau}_i(g_j)$ ($i = 1, 2, \dots, l$; $j = 1, 2, \dots, m$; $k, j = 1, 2, \dots, m$) указанных матриц даны в табл. 1. В случае одномерных представлений матрицы $\hat{\tau}_i(g_j)$ вырождаются в скаляры, являющиеся значениями характеров этих представлений. Для групп D_n , S_{2n} , D_{2nd} и T_d соответственно имеющиеся изоморфизмам попросту переставляются коэффициенты и матрицы групп C_{2n} , C_{2n} , D_{2n} и O_h .

Замечание 2. Приведем необходимые соответствия между номерами элементов изоморфных групп: $g_j(S_{2n}) \rightarrow g_{2j-1}(C_{2n})$, $g_{2j-2}(S_{2n}) \rightarrow \dots \rightarrow g_{2j}(C_{2n})$, $j = 1, 2, \dots, n$; $g_j(D_{2nd}) \rightarrow g_{2j-1}(D_{2n})$, $g_{2j-1}(D_{2nd}) \rightarrow \dots \rightarrow g_{2j}(D_{2n})$, $j = 1, 2, \dots, 2n$; $g_j(D_{2n}) \rightarrow g_{2j-1}(D_{2n})$, $g_{2j-1}(D_{2n}) \rightarrow \dots \rightarrow g_{2j}(D_{2n})$, $j = 1, 2, \dots, 2n$; $g_j(D_n) \rightarrow g_j(C_{2n})$, $j = 1, 2, \dots, 2n$; $T_1 \rightarrow 0$; 1 — 1; 2 — 17; 3 — 18; 4 — 16; 5 — 15; 6 — 13; 7 — 14; 8 — 12; 9 — 11; 10 — 3; 11 — 6; 12 — 9; 13 — 2; 14 — 4; 15 — 5; 16 — 7; 17 — 10; 18 — 8; 19 — 21; 20 — 20; 21 — 22; 22 — 23; 23 — 19; 24 — 24.

Наконец, коэффициенты $c_{\nu, \mu}^{(k)}$ и матрицы $\hat{c}_j(g_j)$ для любой группы $G'' = G' \times E$ определяются из равенств: $c_{\nu, \mu}^{(k)}(C) = c_{\nu, \mu}^{(k), \nu} (G') = c_{\nu, \mu}^{(k), \nu} (G'') = -c_{\mu, \nu}^{(k), \nu} (G'') = \frac{1}{2} c_{\nu, \mu}^{(2)}(G)$; $\hat{c}_j(g_j) = \hat{c}_j(g_{\nu, \mu} (G'')) = \hat{c}_j(g_j(G')) = -\hat{c}_j(g_j(G'')) = -\hat{c}_j(g_j(G'))$; $\nu = 1, 2, \dots, l$; $j = 1, 2, \dots, m$; $k, \mu = 1, 2, \dots, m$.

Через Ω_j обозначается элементарная ячейка области Ω . Положим для конкретности, что в зависимости от типа группы G ячейка Ω_j ограничивается следующими плоскостями: $C_n = \Pi(e)$ и $\Pi(C_n)$; $D_n = \Pi(C_n, C_n^{(2)})$, $\Pi(C_n, C_n^{(3)})$, $\Pi(C_n^{(2)}, C_n^{(3)})$ и $\Pi(C_n^{(2)}, C_n^{(3)})$; $T = \Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$, $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(2)})$, $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(2)})$ и $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(2)})$; $\theta = \Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$, $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$, $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$ и $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$; $S_{2n} = \Pi(e)$ и $\Pi(S_{2n})$; $C_{nh} = \Pi(e)$, $\Pi(C_n)$ и $\Pi(\sigma)$; $C_{nv} = \Pi(\sigma_1)$ и $\Pi(\sigma_2)$; $D_{nh} = \Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_2)$ и $\Pi(\sigma)$; $D_{nd} = \Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_2)$, $\Pi(C_n^{(2)}, C_n^{(2)})$ и $\Pi(C_n^{(2)}, C_n^{(2)})$; $T_d = \Pi(\sigma_{22})$, $\Pi(\sigma_{13})$ и $\Pi(\sigma_{13})$; $T_h = \Pi(\sigma_{13})$, $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$ и $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(2)})$; $O_h = \Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_{12})$ и $\Pi(\sigma_{11})$. Здесь $\Pi(e)$ — произвольная полуплоскость, проходящая через ось C_n ; $\Pi(C_n)$ и $\Pi(S_{2n})$ — полуплоскости, полученные из $\Pi(e)$ воздействием элементов C_n и S_{2n} ; $\Pi(C_n^{(1)}, C_n^{(1)})$ — полуплоскость, проходящая через оси $C_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ и ограниченная последней. $\Pi(\sigma_j)$ — плоскость отражения σ_j .

2. Пусть упругая механическая система S занимает область Ω . Тогда в подобласти Ω_j располагается элементарная ячейка S_j системы S [4]. Введем в Ω_j координатную систему u, v, z . Действуя на Ω_j элементом симметрии $g_j \in G$, получим новую подобласть Ω_j' с координатной системой u, v, z . Вектор-функция p , заданная на Ω , определена и в Ω_j' ($j = 1, 2, \dots, m$), где может быть выражена как вектор-функция $p(u, v, z)$ соответствующих координат. Если r, q и f — перемещения, внешние и инерционные силы в точках системы S , то из принципа виртуальных перемещений следует такое уравнение движения:

$$\delta W = \int (q - f) \delta r \tag{2}$$

где V — потенциальная энергия системы S .

Следствием симметрии является тот факт, что перемещения точек системы S под нагрузкой p определяются вектор-функцией r . Тогда в силу разложения (1) и линейности задачи нагрузке $q^{(k)}$ отвечает вектор-функция $r^{(k)}$ перемещений системы S . В связи с этим при нагрузке типа $q^{(k)}$, используя выражение

$$\int p_{\nu a}^{(k)} f_{\nu a}^{(k')} d\Omega = \delta_{\nu \nu'} \delta_{a a'} \frac{m}{m'} \sum_{\nu=1}^m \int p_{\nu a}^{(k)}(u_1, v_1, z_1) f_{\nu a}^{(k')} (u_1, v_1, z_1) d\Omega_1 \tag{3}$$

в котором под f , как и под p , понимается произвольная вектор-функция, заданная на Ω , а δ_{ij} и δ_{ijk} — символы Кронекера, и которое является естественным обобщением аналогичного равенства из [6], можно показать тем же путем, что и в [6], справедливость записи уравнения (2) в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{m_1} z V_1^{(i,k)} = \sum_{i=1}^{m_1} \int_{\Omega_1} (q_{ij}^{(k)} + J_{ij}^{(k)}) (\delta r)_{ij}^k d\Omega_1 \quad (4)$$

где $V_1^{(i,k)}$ — потенциальная энергия ячейки S_1 в случае, когда перемещения системы S имеют вид $r^{(k)}$. Соответственно [6] выражение (4) трактуется как уравнение движения (в частном случае — равновесия) системы S_1 , состоящей из m_1 элементарных ячеек S_{i1} , соприкасающихся с S_1 и нагруженных внешними силами по схеме $q^{(k)}$, при которой на ячейку S_{i1} действует нагрузка $q_{ij}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$.

Нетрудно получить такие соотношения

$$p_{ij}^{(k)}(u_1, v_1, z_1) = q_{ij} \sum_{i=1}^m \delta_{i1} (q_i^{-1}) p_{ij}^{(k)}(u_i, v_i, z_i) \quad (5)$$

Из (5) видно, что деформативное, а следовательно, и напряженное состояние S_1 , нагруженной по схеме $q^{(k)}$, полностью характеризуют соответствующие состояния всей системы S . Поэтому в случае линейной механической задачи оказывается возможным вместо непосредственного нахождения составляющих $w_{ij}^{(k)}$ искомой функции w определять порождающие их функции $w_{ij}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$, которые для ячеек S_{i1} ($i = 1, 2, \dots, m_1$) системы S_1 имеют тот же физический смысл, что и функция w для системы S .

Плоскости, ограничивающие Ω_1 , разбиваются на три категории: а) плоскости типа $\Pi(\tau_i)$, б) пары плоскостей $\Pi(C_n^{(i)}, C_i^{(i)})$ и $\Pi(C_n^{(i)}, C_i^{(i)})$, для которых элемент $C_n^{(i)}$ переводит первую плоскость пары во вторую (частным случаем является пара $\Pi(e)$ и $\Pi(C_n)$), в) пары плоскостей $\Pi(e)$ и $\Pi(S_{2n})$.

Пусть $x(C_n^{(i)}, C_i^{(i)}) \in \Pi(C_n^{(i)}, C_i^{(i)})$, $x(e) \in \Pi(e)$, $x(S_{2n}) \in \Pi(S_{2n})$, $x(C_n) \in \Pi(C_n)$, $x(\tau_i) \in \Pi(\tau_i)$, причем $C_n^{(i)} x(C_n^{(i)}, C_i^{(i)}) = x(C_n^{(i)}, C_i^{(i)})$; $S_{2n} x(e) = x(S_{2n})$; $C_n x(e) = x(C_n)$. Тогда из (5) следует

$$p_{ij}^{(k)} [x(C_n^{(i)}, C_i^{(i)})] = C_n^{(i)} \sum_{i=1}^{m_1} \delta_{i1} [(C_n^{(i)})^{-1}] p_{ij}^{(k)} [x(C_n^{(i)}, C_i^{(i)})] \quad (6)$$

$$p_{ij}^{(k)} [x(C_n)] = C_n \sum_{i=1}^{m_1} \delta_{i1} (C_n^{-1}) p_{ij}^{(k)} [x(e)] \quad (7)$$

$$p_{\alpha}^{(k)}[x(S_{\alpha})] = S_{\alpha} \sum_{\sigma=1}^m \xi_{\sigma}^{(k)}(S_{\alpha}^{-1}) p_{\sigma}^{(k)}[x(\sigma)] \quad (8)$$

$$p_{\alpha}^{(k)}[x(z_{\alpha})] = z_{\alpha} \sum_{\sigma=1}^m \xi_{\sigma}^{(k)}(z_{\alpha}) p_{\sigma}^{(k)}[x(z_{\sigma})] \quad (9)$$

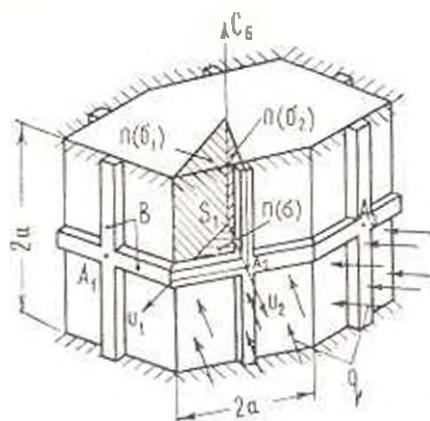
Весь порядок методики из [6] переносится таким образом на рассматриваемые в данной работе задачи. Функции нагрузки $q_{\alpha}^{(k)}(u_{\alpha}, v_{\alpha}, z_{\alpha})$ ячеек S_{α} имеют вид (при $q_{\sigma} = q_{\sigma}^{(k)}$):

$$q_{\alpha}^{(k)}(u_{\alpha}, v_{\alpha}, z_{\alpha}) = \sum_{j=1}^m c_{\alpha j}^{(k)} q_j(u_j, v_j, z_j) \quad (10)$$

а их граничные условия определяются выражениями (6), (7), (8) и (10).

Изложенный подход может быть применен в статических и динамических расчетах симметричных пластинчатых систем (с упругим основанием и без него) и оболочек при наличии ребер жесткости, сосредоточенных масс и нагрузок, в симметричных задачах теории упругости и т. д.

Пример. Система из шести пластин, подкреплённых ребрами жесткости, вместе с внешней нагрузкой изображена на фиг. 1. Элементы симметрии образуют группу $D_{6h} = D_6 \times C_2$. Искомыми являются прогибы пластин в точках A_2 и A_1 . Перемещениями пластин в своей плоскости будем пренебрегать. Предположим также, что силовые факторы в плоскостях пластин малы по сравнению с критическими.

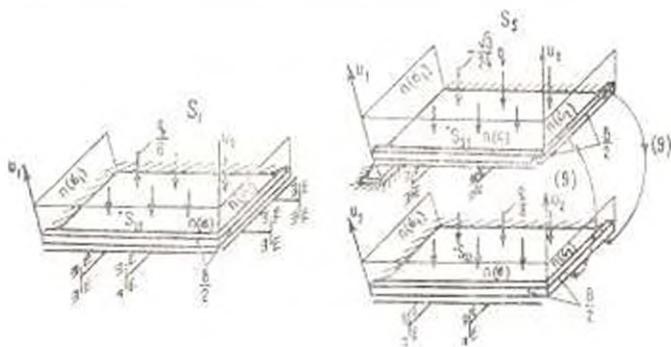


Фиг. 1.

Примем $\frac{B}{Da} = 0.25$ (B — изгибная жесткость ребер). Для группы D_{6h} :

$m = 24$, $l = 12$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1$,
 $m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = 2$. Строя системы S_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) и загружая их

по схемам $q^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$), убеждаемся, что ненулевые прогибы в точке A_1 имеют место только для S_1 , S_2 и S_3 . Системы S_1 и S_2 , нагруженные соответственно по схемам $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Используя формулу (10), находим $q_{11}^{(1)} = \frac{1}{6}q$; $q_{51}^{(1)} = \frac{1}{8}q$; $q_{52}^{(1)} = -\frac{1}{8}q$; $q_{51}^{(2)} = -\frac{1}{24}q$; $q_{52}^{(2)} = \frac{1}{24}q$; $q_{61}^{(1)} = \frac{1}{8}q$; $q_{62}^{(1)} = -\frac{1}{24}q$; $q_{61}^{(2)} = \frac{1}{24}q$; $q_{62}^{(2)} = -\frac{1}{24}q$. Определив прогибы w систем S_1 , S_2 и S_3 , например, методом сеток, получаем

$$w_{11}^{(1)}(A_1) = 0.00305 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{51}^{(1)}(A_1) = 0.0025 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{52}^{(1)}(A_1) = -0.0044 \frac{qa^4}{D};$$

$$w_{51}^{(2)}(A_1) = 0.0015 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{52}^{(2)}(A_1) = 0.0025 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{61}^{(1)}(A_1) = 0.0032 \frac{qa^4}{D};$$

$$w_{62}^{(1)}(A_1) = 0.0018 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{61}^{(2)}(A_1) = 0.0018 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{62}^{(2)}(A_1) = -0.0011 \frac{qa^4}{D}.$$

Используя соотношение (5), находим

$$w_{11}^{(1)}(A_2) = 0.00305 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{51}^{(1)}(A_2) = -0.0025 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{52}^{(1)}(A_2) = 0.0025 \frac{qa^4}{D};$$

$$w_{61}^{(1)}(A_2) = -0.0032 \frac{qa^4}{D}; \quad w_{62}^{(1)}(A_2) = -0.0011 \frac{qa^4}{D}$$

Тогда из разложения (1) окончательно следует, что

$$w(A_1) = -0.00125 \frac{qa^4}{D}; \quad w(A_2) = 0.0103 \frac{qa^4}{D}.$$

С помощью соотношения (5) нетрудно, между прочим, проверить, что имеет место равенство $w(A_1) = w(A_2)$, обусловленное симметрией нагрузки.

В заключение заметим, что точность проведенного расчета связана исключительно с решением систем S_1 , S_2 и S_3 .

Одесский

инженерно-строительный институт

Поступила 10 III 1972

Մ. Լ. ԲՈՐԻՇԿԻՆ

ԿՈՆՍԵՐՎԱՏԻՎ ԻՄՍԵՄՈՆԻՐԻ ՄԵԿԱՆԻԿԱՅԻ ԳՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԽՐԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅՈՅՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Հնդրնալի նախարդ Տոզվածները մեկում [6] ջրկրիկ սիմետրիայով սալերի ստատիկական հաշվարկների համար առաջարկվել է եղանակ: Ներկա աշխատանքում այդ եղանակը կիրառվել է կոնսերվատիվ սխեմաների մեխանիկայի տարրերը դճային խնդիրների լուծման համար:

Գիտարկվում է սիմետրիայի կետային խումբ տիրապետող դճային կոնսերվատիվ սխեման: Ձույց է արվում, որ կիև արտաքին բեռ ձևափոխվում է ըստ սիմետրիայի խմբի ջրերովը ներկայացման, այդ դեպքում սկզբնական սխեմանի փոխարեն կարելի է ասումնասիրել ավելի պարզ սխեման, ընդհանրապես ասած, մի բանի պարզ բջիշներից բաղկացած: Որանց վրա կիրառված են որոշակի կապեր:

THE APPLICATION OF GROUP REPRESENTATION THEORY TO LINEAR PROBLEMS OF THE CONSERVATIVE SYSTEM MECHANICS

M. L. BURYSHKIN

S u m m a r y

The simplification of linear conservative system calculations is investigated for the systems possessing a point group of symmetry. The technique of control for similar simplifications has been suggested, which is based on the mechanical treatment of „elementary cell“ method and is independent on that of conservative system calculation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике, ГИФМА, М., 1958.
2. Каплан Н. Г. Симметрия в ортогональных системах, Наука, М., 1969.
3. Удилья В. В., Кривача Г. Т. Исследование собственных колебания стержневых систем с групповой симметрией С6 „Кибернетика и вычислительная техника“, в. 1, „Наукова думка“, Киев, 1969.
4. Фомин В. М. О методах уменьшения размерности при расчете колебаний симметричных стержневых систем. Сб. „Техническая кибернетика“, в. 1, „Наукова думка“, Киев, 1970.
5. Бурыйшкин М. А. О свободных колебаниях регулярных упругих систем ПМ, Киев, 1971.
6. Бурыйшкин М. А., Савинен В. А. О равновесии симметричных пластин. Докл. АН Арм. ССР, т. XV, №3, 1972.