

А. Д. ХАНЖОВ

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ
 ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Получено решение плоской задачи термоупругости для полубесконечной ортотропной пластинки со смешанными температурными и механическими условиями на границе.

Используется метод интегральных преобразований Фурье, позволяющий свести задачу определения поля температур и напряжений к парным интегральным уравнениям, имеющим известное решение.

Рассмотрим теплоизолированную по боковым поверхностям тонкую пластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат x, y . На свободном от внешней нагрузки участке границы $|x| < a$ задан постоянный тепловой поток F , а на остальном закрепленном участке $|x| > a$ поддерживается нулевая температура. Касательные напряжения τ_{xy} на всей границе пластинки отсутствуют.

Полагаем, что материал пластинки однороден и ортотропен в отношении упругих и тепловых свойств; главные направления упругой и тепловой симметрии совпадают с осями координат; тепловые и механические характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости для ортотропной пластинки сводится к решению системы уравнений [1]

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (a_{11}\sigma_x + a_{12}\tau_{xy} - \alpha_1 T) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_{22}\sigma_y + a_{21}\tau_{xy} - \alpha_2 T) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a_{12}\tau_{xy}$$

со следующими граничными условиями:

$$-k_2 \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = F \quad (|x| < a), \quad T(x, 0) = 0 \quad (|x| > a) \tag{3}$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (|x| < a), \quad \sigma_x(x, 0) = 0 \quad (|x| > a)$$

Здесь T — температура, k_1, k_2 и α_1, α_2 — коэффициенты теплопроводности и температурные коэффициенты линейного расширения в направлении осей x, y . Другие обозначения являются общепринятыми [2].

Применяя к уравнениям (1), (2) интегральное преобразование Фурье [3] по переменной x и предполагая, что температура, напряжения и производные от этих величин на бесконечности равны нулю, находим выражения трансформант температуры и напряжений

$$\bar{T}(\xi, y) = A e^{-\alpha_1 y} \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(\xi, y) = B e^{-\alpha_2 y} + C e^{-\alpha_3 y} + G_1 s_1 \bar{T} \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(\xi, y) = \frac{1}{i} \frac{d\bar{\sigma}_{xx}(\xi, y)}{dy}, \quad \bar{\sigma}_{xz}(\xi, y) = -\frac{1}{i} \frac{d\bar{\sigma}_{xx}(\xi, y)}{dy} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad s_2, s_3 = \left[(2a_{11})^{-1} \left[(2a_{12} + a_{22}) \pm \sqrt{(2a_{12} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22}} \right] \right]^{1/2}$$

$$G_k = \frac{2s_1^2 - 1}{a_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)s_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad \begin{cases} j = 2, k = 3 \text{ при } n = 1 \\ j = 3, k = 1 \text{ при } n = 2 \\ j = 1, k = 2 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

причем

$$(2a_{12} + a_{22})^2 > 4a_{11}a_{22}$$

Постоянные интегрирования A , B и C определяются из граничных условий.

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражению (4) и дифференцируя результат по y , удовлетворим первым двум граничным условиям (3). Таким образом, учитывая четность функции T по переменной x , приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^a \frac{d\bar{T}(\xi, 0)}{dy} \cos \xi z dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{F}{k_2}, \quad 0 < x < a \quad (7)$$

$$\int_0^a \bar{T}(\xi, 0) \cos \xi z dz = 0, \quad x > a$$

Если ввести новые переменные $\tau = x/a$, $z = a\xi$, то уравнения (7) с учетом соотношения

$$\cos \xi z = \sqrt{\frac{\pi x^2}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x^2 z) \quad (8)$$

можно записать в виде

$$\int_0^1 z g(z) J_{-1/2}(iz) dz = h(i), \quad 0 < i < 1 \quad (9)$$

$$\int_0^1 g(z) J_{-1/2}(iz) dz = 0, \quad i > 1$$

где $g(z) = |z| A$, $h(i) = \frac{F a^2}{k_2 s_2 i^{1/2}}$ (10)

$J_{-1/2}(iz)$ — функция Бесселя первого рода.

Решением уравнений (9) является функция [3]

$$g(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \int_0^1 \eta^{-1/2} J_0(z\eta) d\eta \int_0^1 h(i, \eta) \eta^{-1/2} (1-\eta^2)^{-1/2} d\eta \quad (11)$$

Возвращаясь к старым переменным, из формул (10), (11) после вычисления интегралов получим

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{F a}{k_2 s_2} J_1(\alpha i)$$

Из интегрально преобразованного граничного условия $\bar{z}_{y=0} = 0$ и формул (5), (6) находим

$$C = -\frac{k_2}{s_2} B - \zeta_1 \frac{s_1}{s_2} A \quad (12)$$

Для определения постоянной B воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11} \bar{z}_1 + a_{12} \bar{z}_2 + z_1 T, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = a_{21} \bar{z}_1 + z_2 T$$

из которых после применения интегральных преобразований к ним найдем

$$\bar{u} = \frac{a_{11} - a_{22}}{\zeta^2} \frac{d \bar{z}_1}{dy} + \frac{a_{12}}{\zeta^2} \frac{d \bar{z}_2}{dy} + \frac{z_1}{\zeta^2} \frac{d T}{dy} \quad (13)$$

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражениям (5), (13) и удовлетворяя последним двум граничным условиям (3), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^a \bar{v}_p(\xi, 0) \cos x^2 d\xi = 0 \quad 0 < x < a$$

$$\int_a^\infty \bar{v}(\xi, 0) \cos x^2 d\xi = 0 \quad x > a \quad (14)$$

которые в новых переменных с учетом (8), (12) сводятся к уравнениям типа (9)

$$\int_0^1 z f(z) f_{-1}(iz) dz = H(i), \quad 0 < i < 1$$

$$\int_1^\infty f(z) f_{-1}(iz) dz = 0, \quad i > 1 \quad (15)$$

где

$$\bar{v}_p(\xi, 0) = \frac{s_2 - s_1}{s_2} \left(B + G_1 s_1 \frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_1} A \right)$$

$$\bar{v}(\xi, 0) = \frac{\alpha_{11}}{2} s_1 (s_2^2 - s_1^2) \left(B - G_2 s_1 A \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} (B - G_2 s_1 A), \quad G_2 = \frac{s_2 \alpha_{11} + G_1 s_1 (s_2^2 - s_1^2)}{s_2 (s_2^2 - s_1^2)} \quad (16)$$

$$H(i) = \int_0^1 \frac{2}{\pi i} \left(G_1 s_1 \frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_1} + G_2 s_1 \right) \int_0^1 A \cos^2 z dz$$

Последнее выражение после вычисления интеграла при $0 < i < 1$ и с учетом тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n s_n = 0$$

принимает вид

$$H(i) = \frac{F \alpha^2 s_1}{k_2 (s_2 - s_1)} \left[\frac{1-i^2}{i} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \right] \quad (17)$$

Используя решение уравнений (15) в форме (11), из формул (16), (17) находим

$$B = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F a^2 s_2}{k_2 (s_2 - s_1)} \sum_{n=1}^3 G_n \int_0^1 \eta J_0(a \sqrt{\eta}) d\eta \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \gamma_n^2 \eta^2}{1 - \eta^2}} d\eta - G_n s_1 A$$

Подставляя значения A , B и C в выражения (4), (5), (6) и пользуясь теоремой обращения для преобразования Фурье, находим распределение температур и напряжений в пластинке

$$T(x, y) = \frac{F}{k_2 s_1} (\sqrt{r_1 \rho_1} \cos \omega_1 - y s_1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & - \frac{2F s_2 s_3}{\pi k_2 (s_2 - s_3)} \sum_{n=1}^3 G_n \left[- \frac{\alpha s_2 R_2}{\sqrt{r_2 \rho_2}} \cos \Omega_2 + \right. \\ & + s_2 \sqrt{r_2 \rho_2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \beta_2 \right) \cos \omega_2 + \frac{s_2 \sqrt{r_2 \rho_2}}{2} \ln \frac{\rho_2}{r_2} \sin \omega_2 + \frac{\alpha s_2 R_2}{\sqrt{r_2 \rho_2}} \cos \Omega_2 - \\ & - s_3 \sqrt{r_3 \rho_3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \beta_3 \right) \cos \omega_3 - \frac{s_3 \sqrt{r_3 \rho_3}}{2} \ln \frac{\rho_3}{r_3} \sin \omega_3 \left. \right] - \\ & - \frac{F}{k_1} \sum_{n=1}^3 G_n s_n (\sqrt{r_n \rho_n} \cos \omega_n - y s_n) \\ \sigma_y(x, y) = & \frac{2F}{\pi k_2 (s_2 - s_3)} \sum_{n=1}^3 G_n \left[- \frac{\alpha s_2 R_2}{\sqrt{r_2 \rho_2}} \cos \Omega_2 - \right. \\ & + s_3 \sqrt{r_3 \rho_3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \beta_3 \right) \cos \omega_3 + \frac{s_3 \sqrt{r_3 \rho_3}}{2} \ln \frac{\rho_3}{r_3} \sin \omega_3 + \frac{\alpha s_2 R_2}{\sqrt{r_2 \rho_2}} \cos \Omega_2 - \\ & - s_2 \sqrt{r_2 \rho_2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \beta_2 \right) \cos \omega_2 - \frac{s_2 \sqrt{r_2 \rho_2}}{2} \ln \frac{\rho_2}{r_2} \sin \omega_2 \left. \right] + \\ & + \frac{F}{k_1} \sum_{n=1}^3 G_n \sqrt{r_n \rho_n} \cos \omega_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y) = & \frac{2F s_2 s_1}{\pi k_2 (s_2 - s_3)} \sum_{n=1}^3 G_n \left[\frac{\alpha R_1}{\sqrt{r_1 \rho_1}} \sin \Omega_1 - \right. \\ & - \sqrt{r_2 \rho_2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \beta_2 \right) \sin \omega_2 + \frac{\sqrt{r_2 \rho_2}}{2} \ln \frac{\rho_2}{r_2} \cos \omega_2 - \frac{\alpha R_1}{\sqrt{r_1 \rho_1}} \sin \Omega_1 - \\ & + \sqrt{r_3 \rho_3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \beta_3 \right) \sin \omega_3 - \frac{\sqrt{r_3 \rho_3}}{2} \ln \frac{\rho_3}{r_3} \cos \omega_3 \left. \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{F}{k_2} \sum_{n=1}^3 G_n s_n \sqrt{r_n \varphi_n} \sin \omega_n$$

где

$$R_n = |y^2 s_n^2 - x^2|, \quad r_n = |y^2 s_n^2 - (x-a)|, \quad \varphi_n = |y^2 s_n^2 - (x+a)|$$

$$\Omega_n = \theta_n - \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \quad \omega_n = \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \quad \beta_n = \frac{2a y s_n}{a^2 - y^2 s_n^2 - x^2}$$

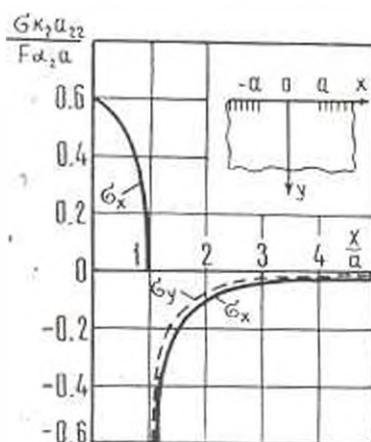
$$\cos \theta_n = \frac{y s_n}{R_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{y s_n}{r_n}, \quad \cos \psi_n = \frac{y s_n}{\varphi_n}$$

$$\sin \theta_n = \frac{x}{R_n}, \quad \sin \varphi_n = \frac{x-a}{r_n}, \quad \sin \psi_n = \frac{x+a}{\varphi_n}$$

На фиг. 1 приведены графики распределения безразмерных напряжений вдоль прямолинейной границы пластинки. Численный расчет проводился для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В, для которого постоянные равны [4]

$$a_{11} = 4.69 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{н}, \quad a_{22} = 8.26 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{н}, \quad \alpha_1 = -0.898 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{н}$$

$$a_{33} = 49 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{н}, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{8}, \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{3}{4}$$



Фиг. 1.

В точках $|x| = l$ границы пластинки наблюдается бесконечный разрыв напряжений.

Ա. Գ. ԽԱՆՉՈՎ

ԿԻՍԱԿԱՆՎԵՐՋ ՍԻՔՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՉԵՐՄԱԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՄԵ ԽՈՒԹԵ ԵՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ս մ փ ո փ ու մ

Լուծվում է կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալի համար ջերմատառձգականու-
թյան հարթ խնդիրը խառը եզրային պայմանների դեպքում:

Գիտարկվում է այն դեպքը, երբ սալի բևեռավորումից ապառ եզրի մի
մասի վրա տրված է հաստատուն ջերմային հոսք, իսկ մնացած ամբողջված
մասի վրա՝ պրոյտիան ջերմաստիճան:

Ֆուրյեյի ձևափոխության սղնությամբ խնդիրը բերվում է հայտնի լուծում
ունեցող զույգ ինտեգրալ հավասարումների:

ON A MIXED PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A
SEMI-INFINITE ORTHOTROPIC PLATE

A. G. KHANZHOV

S u m m a r y

A plane problem of thermoelasticity for a semi-infinite orthotropic plate is solved with mixed boundary conditions. The case is considered where a constant heat flow is given in some part free from loading on the boundary of the plate while in the rest fixed part the temperature is zero.

By means of the Fourier transformation the problem is reduced to a dual integral equation, having a known solution.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. АН СССР, М., 1962.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины. Гостехиздат, М., 1957.
3. Снеддон И. Преобразование Фурье. ИЛ., М., 1955.
4. Удалов А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд. Саратовского университета, 1967.