

А. Г. БАГДОВЕ, Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХКРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ОТКРЫТОМ ВОДОВОДЕ КОНФУЗОРНОЙ ФОРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНОМ УКЛОНОМ

Рассматривается сверхкритическое стационарное движение несжимаемой идеальной жидкости в открытом водоводе с плоским наклонным дном, слегка сужающимся вниз по течению, с целью выяснения возможности непрерывного (беспрыжкового) сужения бурного потока, а также расчета прыжков в случае их образования. Выводится уравнение нелинейных характеристик, определяются условия на прыжке и наклонном подтоке и доказывается, что наклон фронта прыжка относительно оси водовода есть среднее арифметическое наклонов характеристик впереди и позади него. Производится линеаризация уравнений относительно одномерного (переменного по длине) течения и находится лучевое решение в окрестности характеристики, отделяющей в плане области одномерного и двухмерного течений. Методом замены в линейном решении характеристической переменной через нелинейную переменную, предложенным в [6] для задачи газовой динамики определяется нелинейное решение в окрестности линейной характеристики. Исследуется образование прыжков в зависимости от формы стенок сужающего водовода. Приводится обоснование правильности полученного нелинейного решения. Для этого выводится уравнение Буссинеска для наклонных подтоков и затем получается уравнение коротких волн для установившегося движения с учетом дисперсии. При пренебрежении дисперсией получается нелинейное уравнение, которому удовлетворяет вышеуказанное нелинейное решение. Следует отметить, что можно тем же путем получить уравнение двухмерных коротких волн с учетом нестационарности и силы трения.

Из работ, посвященных исследованию бурных течений на участках сужения быстротоков, в основу которых положена теория двухмерных потоков, следует отметить [1—4]. При малых уклонах дна водотока уравнение одномерного нестационарного движения с учетом дисперсии получено в работе [5]. Впервые уравнения коротких волн в газовой динамике были получены в работе [7]. Ряд решений этих уравнений получены в работах [8—9]. Уравнения трехмерных стационарных и нестационарных коротких волн в газовой динамике получены в работах [10—11]. В магнитной газовой динамике, а также для произвольной среды подобные уравнения получены в работах [12—14].

1. Рассмотрим сверхкритическое, стационарное, безвихревое движение несжимаемой жидкости в открытом водотоке с плоским наклон-

вым дном и сходящимися боковыми стенками. Пусть уклон дна водотока произвольный, а боковые стенки в плане повернуты на относительно малые углы  $\theta$ . В этом случае на свободной поверхности бурного потока появляются возмущения, у которых есть тенденция накладывания (суммирования) друг на друга (пересечение нелинейных характеристик). Это приводит к образованию все более крутых фронтов волн, которые в конечном счете превращаются в стоячую волну или гидравлический прыжок.

При сужении сверхкритического потока усилия проектировщиков направлены на уменьшение высоты стоячих волн, возможного устранения гидравлических прыжков и обеспечении в пределах допустимости равномерного распределения скоростей потока в конце сужения с помощью подбора подходящих форм боковых стенок водосброса.

Отметим, что по причинам значительной высоты гребня водосброса и затопления берегов водохранилища требуется сооружать водосброс с довольно широким фронтом. В то же время экономические и топографические условия требуют сузить водосброс вниз по течению. Таким образом, возникает необходимость в устройстве непризматических водосливных сооружений, обеспечивающих на относительно короткой длине симметричное сужение бурного потока. Сооружение таких плотин дает возможность увеличить полезный объем водохранилища, что позволит получать большую экономическую выгоду.

Чтобы не усложнять выкладки, предположим, что скорость и глубина потока во входном сечении водосброса постоянны, причем скорости направлены параллельно его оси. Как значение этих величин, так и геометрические параметры водотока (ширина входного сечения  $-2b_0$ , длина  $-L$ , уклон  $-\gamma$ ) и очертание боковых стенок являются заданными величинами.

При бурном режиме движения силами трения по сравнению с силами инерции для коротких участков можно пренебречь [4, 15]. Дело в том, что если написать уравнения в форме Рейнольдса и перейти к безразмерным величинам, то уравнения сохраняют свой вид, но перед членами, учитывающими турбулентное трение, появляется число Рейнольдса в знаменателе и при сильной турбуликации, то есть при  $Re \rightarrow \infty$ , эти члены исчезают, и уравнение принимает вид для идеальной жидкости.

Расположим начало координат во входном сечении водотока, ось  $Ox$  совместим с осью его симметрии, ось  $Oz$  направим перпендикулярно к его дну, а ось  $Oy$  — перпендикулярно к плоскости  $xOz$  (фиг. 1).

Исходные уравнения двумерного движения и неразрывности бурных потоков в водотоках с плоским наклонным дном даны в [4]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \gamma + g \sin \gamma \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \cos \gamma \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем  $h$  — глубина воды, отсчитываемая по нормали ко дну,  $u$ ,  $v$  — компоненты скорости  $V$  соответственно по осям  $Ox$  и  $Oy$ , а  $g$  — ускорение силы тяжести.

После несложных преобразований, с использованием условия отсутствия вихрей, легко доказать, что система дифференциальных уравнений (1.1) — (1.3) эквивалентна системе уравнений

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2uv \frac{\partial u}{\partial y} - (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} = -qu \sin \nu \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{u^2 - v^2}{2g} - x \sin \nu + h \cos \nu = \frac{u_0^2}{2g} + h_0 \cos \nu \quad (1.6)$$

где  $u_0$ ,  $h_0$  — значение скорости и глубины в начальном сечении, а  $c^2 = |gh \cos \nu|$  — скорость распространения слабых возмущений в наклонных каналах.

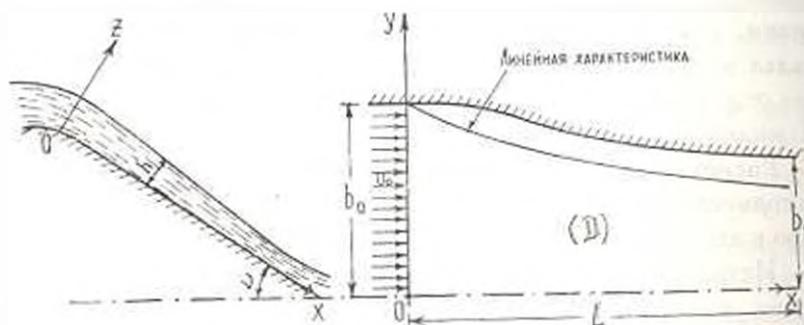
Во входном сечении водотока ( $x = 0$ ,  $-b_0 \leq y \leq b_0$ ) согласно постановке задачи имеем

$$u(0, y) = u_0 = \text{const}, \quad v(0, y) = 0 \quad (1.7)$$

так как очертания боковых стенок являются линиями тока, то вдоль них выполняются условия

$$v(x, y_{ct}) = u(x, y_{ct}) \tan \theta \quad (1.8)$$

где  $\theta$  — угол между касательной к стенке и осью  $Ox$ . Отметим, что по условию  $\theta$  — величина малая.



Фиг. 1.

К этим условиям еще надо добавить условие симметричности течения

$$v(x, 0) = 0 \quad (1.8^*)$$

как дополнительное граничное условие.

Таким образом, решение поставленной прямой задачи свелось к нахождению решения смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений (1.4) и (1.5) (считается, что  $h$  в этих уравнениях исключено с помощью уравнения (1.6)) при начальных условиях (1.7) и граничных — (1.8), (1.8\*), которая является корректной, так как система уравнений (1.4) и (1.5) при сверхкритическом режиме течения будет гиперболического типа.

2. Так как поток в области двухмерного течения по условию задачи слабо возмущен, то в этой области параметры течения  $u$ ,  $v$ ,  $h$  можно представить в виде асимптотических рядов

$$u(x, y, z) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots \quad (2.1)$$

$$v(x, y, z) = v_{(0)}(x, y) + \dots \quad (2.2)$$

$$h(x, y, z) = h_{(0)}(x) - \varepsilon h_{(1)}(x, y) - \dots \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, который в рассматриваемой задаче характеризует порядок наклона очертания стенки (характерный наклон стенки).

Подставляя ряды (2.1), (2.2) и (2.3) в уравнение (1.1) — (1.3) и приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения членов разложения. В частности, для определения величин  $u_{(1)}$ ,  $v_{(1)}$ ,  $h_{(1)}$  (первого приближения) получаем

$$\begin{aligned} (gh_{(0)} \cos^2 \nu - u_{(0)}^2) \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + gh_{(0)} \cos^2 \nu \frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} + gh_{(1)} \sin^2 \nu & \\ + (gh_{(1)} \cos^2 \nu - 2u_{(0)} u_{(1)}) \frac{du_{(0)}}{dx} = 0 & \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial u_{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{u_{(0)} u_{(1)}}{g \cos^2 \nu} + h_{(1)} = 0 \quad (2.6)$$

Уравнение нулевого приближения не выписали, так как получаются известные уравнения одномерного стационарного движения и их первый интеграл.

Подставляя в дифференциальное уравнение (2.4) вместо  $\frac{du_{(0)}}{dx}$  его выражения из нулевого приближения, исключая затем величину  $h_{(1)}$  с помощью (2.6), заменяя везде  $\frac{u_{(0)}^2}{gh_{(0)} \cos^2 \nu}$  числом Фруда  $Fr_{(0)}$ , а  $h_{(0)}$   $= h_{(0)} \left( \frac{Fr_{(0)}}{Fr_{(x)}} \right)^{1/3}$  ( $Fr_{(0)}$  значение  $Fr_{(0)}$  при  $x = 0$ ) и вводя потенциал по

(2.5) с учетом, что  $u_{(1)} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial x}$ ,  $v_{(1)} = \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial y}$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{Fr_{(0)} - 1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2Fr_{(0)} + 1}{(Fr_{(0)} - 1)^2} \frac{\text{tg} \alpha}{h_{(0)}} \left( \frac{Fr_{(0)}}{Fr_{(0)}} \right)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Начальные (1.7) и граничные (1.8), (1.8\*) условия для функции  $\varphi$  соответственно записываются в форме

$$\varphi(0, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(0, y)}{\partial x} = 0, \quad (0 \leq y \leq b_0) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = akx^{k-1} u_{(0)}(x) \text{ при } y = y_{cr} \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.9b)$$

Очертание стенки и плоскости течения задается в форме  $y_{cr} = b_0 + \alpha x^k$ , где  $\alpha = \text{const} < 0$  подлежит подбору,  $k$  — произвольное, действительное, положительное число и также подлежит подбору.

Решение уравнения (2.7) вблизи характеристики

$$y = b_0 + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}}$$

ищем в виде лучевого решения

$$\varphi = A(x) f(\xi) \quad (2.10)$$

где  $\xi = y - b_0 + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}}$  — лучевая координата, а функция  $f(\xi)$  удовлетворяет условию  $f(\xi) \gg f(\xi)$ , то есть  $f(\xi)$  — быстро изменяющаяся функция.

Переходя в уравнении (2.7) от переменных  $x, y$  к переменным  $x, \xi$  и подставляя в полученное уравнение вместо  $\varphi$  свое выражение из (2.10) и интегрируя полученное уравнение с учетом условия  $f' \gg f$ , получаем

$$A = \sqrt{\frac{Fr_{(0)} - 1}{Fr_{(0)} - 1}} e^{-1/2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}}} \quad (2.11)$$

$$B^2 = \frac{2Fr_{(0)} + 1}{(Fr_{(0)} - 1)^2} \left( \frac{Fr_{(0)}}{Fr_{(0)}} \right)^{1/2} \frac{\text{tg} \alpha}{h_0}$$

Если провести из точки  $(x, y)$  и плоскости  $xOy$  характеристику  $\xi = 0$ , то в области  $(D)$  (фиг. 1) решение уравнения (2.7) при начальных условиях (2.8) и условии на оси  $x$  (2.9б) равно нулю [16], откуда следует

$$\varphi_{(D)}(x, y) = 0 \text{ при } \xi = 0 \quad (2.12)$$

Используя граничное условие (2.9а), условие на характеристике (2.12) и форму решения (2.10), получаем

$$f(\xi_{cr}) = ak \int_0^{\xi_{cr}} \frac{x_{cr}^{k-1} u_{cr}}{A} d\xi_{cr}$$

где

$$\xi_{cr} = \alpha x_{cr}^{k-1} + \int_0^x \frac{dt}{|Fr_{x,0} - 1|} \quad (2.13)$$

Так как мы рассматриваем ту часть течения, которая расположена вблизи характеристики  $\xi = 0$ , то функции  $u_{(0)}$ ,  $A$  и  $(Fr_{x,0} - 1)^{k-2}$ , входящие в подынтегральное выражение (2.13), можно разложить в ряды по степеням  $x_{cr}$ . Таким образом, получим ( $|\xi| \sqrt{Fr_{x,0} - 1} \ll 1$ )

$$f(\xi_{cr}) = ak \int_0^{\xi_{cr}} x_{cr}^{k-1} [u_0 - (\beta - du_0) x_{cr}] d\xi_{cr} \quad (2.14)$$

$$x_{cr} = \sqrt{Fr_{x,0} - 1} \xi_{cr} \left( 1 + \frac{\beta}{4} \frac{\xi_{cr}}{\sqrt{Fr_{x,0} - 1}} \right) \quad (2.15)$$

где

$$\beta = \frac{du_{(0)}}{dx} \Big|_{x=0}, \quad d = A'(0) = -\frac{1}{2} \left( \frac{b}{Fr_{x,0} - 1} + B_0^2 \right)$$

$$B_0 = B^2(0), \quad \alpha = \frac{dFr_{x,0}}{dx} \Big|_{x=0}$$

Подставляя выражение  $x_{cr}$  из (2.15) в (2.14) и выполняя некоторые простые вычисления, находим, что

$$f(\xi) = p k^2 (1 - n\xi^2 + m\xi^4), \quad p = au_0 (Fr_{x,0} - 1)^{\frac{k-1}{2}}, \quad p = au_0 (Fr_{x,0} - 1)^{\frac{k-1}{2}} \quad (2.16)$$

где

$$n = \frac{k}{k+1} \left[ \frac{(k-1)\alpha}{4(Fr_{x,0} - 1)^{1/2}} + \frac{\beta - du_0}{u_0} (Fr_{x,0} - 1)^{1/2} \right], \quad m = \frac{k^2 \alpha (c - du_0)}{4(k+2)}$$

(так как вдоль каждой характеристики  $\xi = \xi_{cr} = \text{const}$ , то замена в (2.16)  $\xi_{cr}$  на  $\xi$  справедлива).

Введем новую функцию

$$F(\xi) = f'(\xi) \text{ при } \xi > 0 \text{ и } f(\xi) = 0 \text{ при } \xi < 0 \quad (2.17)$$

Тогда для всех значений  $\xi$  можем написать, что

$$v_{(1)} = v_a = AF(\xi), \quad u_{(1)} = u_a = \frac{AF(\xi)}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}} \quad (2.18)$$

Заменив в полученном линейном решении (2.18) характеристическую переменную  $\xi$  через нелинейную переменную  $\zeta$ , предложенную Витемом [6], получим решение нелинейного дифференциального уравнения (уравнение коротких волн), которое имеет место вблизи характеристики  $\zeta = 0$ . Обоснование сказанного приведем в нижеизложенном материале.

3. Уравнение характеристик двумерных сверхкритических потоков записываются в форме [4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u^2 \pm c \sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{u^2 - c^2} \quad (3.1)$$

Подставляя в это выражение вместо  $u$ ,  $v$ ,  $h$  соответственно асимптотические ряды (2.1), (2.2), (2.3) и производя некоторые несложные вычисления, находим

$$\frac{dy_{\text{хар}}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}} \left[ 1 - \frac{Fr_{(0)}}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}} \left( \frac{2 + Fr_{(0)}}{2\sqrt{Fr_{(0)} - 1}} \frac{u_{(1)}}{u_{(0)}} + \frac{v_{(0)}}{u_{(0)}} \right) + \dots \right] \quad (3.2)$$

(Рассматриваем только семейство характеристик, которое вытягивается вниз по течению).

Подставляя в уравнение (3.2) вместо  $u_{(1)}$  и  $v_{(1)}$  полученное решение (2.10) с учетом обозначения (2.14), получаем уравнение семейства характеристик, идущих вниз по течению и расположенных вблизи линейной характеристики:  $\xi = 0$

$$\frac{dy_{\text{хар}}}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{Fr_{(0)} - 1}} \left[ 1 - \frac{3Fr_{(0)}}{2(Fr_{(0)} - 1)^{3/2}} \frac{AF'}{u_{(0)}} + O(\xi^2) \right] \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) видно, что последующие характеристики, принадлежащие рассматриваемому семейству, идут вниз по течению более круто, чем предыдущие. Последнее явление обычно приводит к пересечению характеристик одного и того же семейства, то есть к суммированию (наложению) элементарных волн повышения, что приводит к образованию косога гидравлического прыжка: слабого или сильного в зависимости от степени сужения.

Выведем те соотношения, которые выполняются при переходе через прыжок для наклонных русел. Эти соотношения в [4] выведены для горизонтального русла при предположении, что поток перед прыжком направлен параллельно оси подвозда.

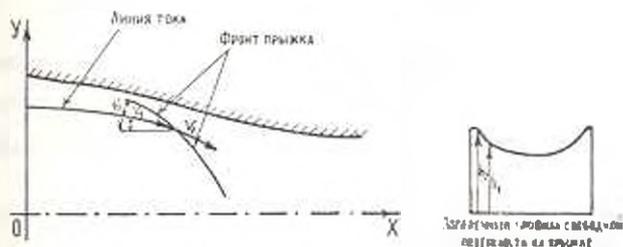
Записывая уравнения (1.1) — (1.3) в дивергентной форме, можно отсюда легко получить уравнения сохранения на прыжке (фиг. 2)

$$h_1 v_{n1} = h_2 v_{n2} \quad (3.4)$$

$$h_1 v_{t1}^2 + \frac{gh_1^2}{2} \cos^2 \psi = h_2 v_{t2}^2 + \frac{gh_2^2}{2} \cos^2 \psi \quad (3.5)$$

$$v_{t1} = v_{t2} \quad (3.6)$$

Здесь и в дальнейшем индексом 1 обозначаются значения рассматриваемых величин перед прыжком, а индексом 2 — значения тех же величин непосредственно за прыжком.



Фиг. 2.

Если обозначить через  $z$  угол между фронтом прыжка и вектором скорости  $\vec{v}_1$ , а через  $\psi$  угол между  $\vec{v}_1$  и осью  $Ox$ , то можно показать [4], что

$$\sin^2 z = \frac{\gamma}{2Fr_{v1}} (1 + \gamma), \quad \left( \gamma = \frac{h_2}{h_1} \right) \quad (3.7)$$

Так как в рассматриваемом случае прыжок слабый, то его амплитуда будет малой, то есть

$$\gamma = 1 - \delta \quad (\delta - \text{мало}) \quad (3.8)$$

Выражая в уравнении (3.7)  $\gamma$  через  $\delta$ , получаем

$$\sin^2 z = \frac{1}{1 - Fr_{v1}} \left( 1 + \frac{3}{4} \delta + O(\delta^2) \right) \quad (3.9)$$

Отсюда и из (3.8) находим, что

$$\operatorname{tg} z = - \frac{1}{\sqrt{Fr_{v1} - 1}} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{Fr_{v1}}{Fr_{v1} - 1} \frac{u_{(1)2} - u_{(1)1}}{u_{(0)}} Fr_{v(0)} + O(\delta^2) \right) \quad (3.10)$$

Из рисунка (2) видно, что

$$\frac{dy_{\text{вп}}}{dx} = \operatorname{tg}(z + \psi) = \operatorname{tg} z + \frac{\gamma}{\cos^2 z} + \dots, \quad \gamma = \frac{u_{(1)1}}{u_{(0)}} \quad (3.11)$$

$\gamma$  — величина мала, так как канал сужается слегка (линии тока слабо искривлены). Из равенств (3.10), (3.11) следует, что

$$\frac{dy_{\text{нр}}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{Fr_{v(0)} - 1}} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{Fr_{v(0)}}{Fr_{v(0)} - 1} \frac{u_{(1)0} - u_{(1)1}}{u_{(0)}} Fr_{v(0)} \right) + \frac{v_{\text{нр}}}{u_{(0)} \cos^2 \alpha} + O(\varepsilon^2) \quad (3.12)$$

Используя выражения  $Fr_v$  и разложения (2.1)–(2.3), легко получить, что

$$Fr_v = Fr_{v(0)} \left[ 1 + \varepsilon \frac{u_{(1)}}{u_{(0)}} \left( 2 + Fr_{v(0)} \right) + \dots \right]$$

Заменив в уравнении (3.12)  $\cos^2 \alpha$ ,  $Fr_{v(0)}$  своими асимптотическими разложениями и подставляя вместо  $u_{(1)0}$ ,  $u_{(1)1}$  и  $v_{\text{нр}}$  выражения (2.18), получим дифференциальное уравнение слабого прыжка (стационарной волны конечной амплитуды)

$$\frac{dy_{\text{нр}}}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{Fr_{v(0)} - 1}} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{Fr_{v(0)}^2}{(Fr_{v(0)} - 1)^2} \frac{A}{u_{(0)}} (F_2 + F_1) + O(\varepsilon^2) \right] \quad (3.13)$$

Из уравнений (3.3) и (3.16) видно, что  $\frac{dy_{\text{нр}}}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{dy_{\text{нр}1}}{dx} + \frac{dy_{\text{нр}2}}{dx} \right)$ , то есть наклон слабого прыжка в открытых водотоках с любым продольным уклоном дна равен среднему арифметическому значений наклона характеристики перед и за прыжком, что в газовой динамике показано в [17].

4. Интегрируя уравнение (3.3) семейства нелинейных характеристик, рассматривая  $\xi$  как параметр (вдоль каждой характеристики  $\xi = \text{const}$ ) и используя уравнение стенки и соотношение (2.16), получаем

$$y_{\text{нр}} = b_0 - \varepsilon \alpha (Fr_{v(0)} - 1)^{\frac{k}{2}} \xi^k \left( 1 - \frac{\alpha k}{4 \sqrt{Fr_{v(0)} - 1}} \xi \right) - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{Fr_{v(0)} - 1}} + \varepsilon \left( 1 + \frac{\alpha}{4 \sqrt{Fr_{v(0)} - 1}} \xi \right) + \left[ \psi(x) + \lambda^2 \frac{Fr_{v(0)}^2}{(Fr_{v(0)} - 1)^2} \xi \left( 1 + \frac{\alpha}{4 \sqrt{Fr_{v(0)} - 1}} \xi \right) \right] \times \xi^{k-1} \left( 1 - \frac{k+1}{k} n \xi + \frac{k+2}{k} m \xi^2 \right) \quad (4.1)$$

где

$$\psi(x) = -\lambda^2 \int_0^x \frac{Fr_{v(0)}^2}{(Fr_{v(0)} - 1)^2} \frac{A}{u_{(0)}} dt, \quad \lambda^2 = -\varepsilon \frac{3}{2} kp$$

Определим место образования огибающей семейства характеристик (4.1), то есть где возникает неоднозначность решения (начало образования прыжка или разрыва параметров течения) в зависимости от форм стенок водотока.

Отметим, что задача определения формы плановых очертаний блочных стенок сужающегося водотока (переходный участок на быстротоке, водослив и т. д.), которая обеспечивала бы гидравлически рациональный режим течения, то есть минимально возможную высоту стационарных волн и косых прыжков, более или менее равномерного распределения удельного расхода в конечном сечении сводится к решению обратной задачи.

Для значений  $k < 2$ , в уравнении (4.1) оставляя члены порядка не выше  $\xi^2$  и записывая условия для огибающей, находим, что

$$\xi = \left| \frac{1}{1-k} \cdot (x) \right|^{1/(2-k)} \quad (4.2)$$

Отсюда видно, что  $\xi = 0$  ( $x = 0$ ). Следовательно, для значений  $1 < k < 2$  огибающая образуется в точке  $(0, b_0)$  (фиг. 3). Подставляя значение  $\xi$  из (4.2) в упрощенное уравнение характеристик, найдем уравнение огибающей

$$y = b_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{dx}{Fr_{\infty} - 1} \cdot \frac{k-1}{k-1} \left| \frac{1}{1-k} \cdot (x) \right|^{1/(2-k)} \right\} \quad (4.3)$$



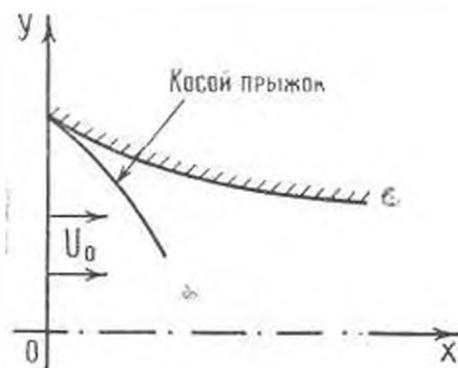
Фиг. 3.

Для значений  $k \leq 1$ , как видно из (4.2), огибающая характеристик не существует, но эти характеристики пересекаются с линейной характеристикой  $\xi = 0$ , что обуславливает возникновение прыжка в точке  $(0, b_0)$  (фиг. 4).

В случае  $k = 2$ , оставляя в уравнении характеристик члены порядка не выше  $\xi^2$  и дифференцируя упрощенное уравнение (4.1) по  $\xi$ , получаем

$$\xi = - \frac{2}{3} (1 + \xi) \left| \frac{1}{Fr_{\infty} - 1} \right| \quad (4.4)$$

В этом случае огнивающая возникает в точке  $x$ , для которой  $\psi = -1$ , и описывается уравнением (фиг. 5)



Фиг. 4.

$$u = b_0 - \int \frac{dt}{|Fr_0 - 1|} = \frac{1}{2} |Fr_0 - 1| (1 + \psi)^2 \quad (4.5)$$

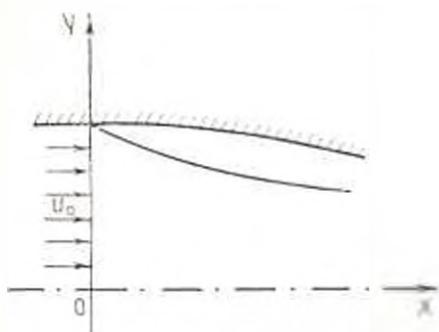
Для значений  $k > 2$ , оставляя в уравнении (4.1) члены того же порядка малости, что и при  $k < 2$ , приходим к уравнению (4.2). Следовательно, при  $k > 2$  на первой характеристике прыжок не возникает (фиг. 6). Из сделанного анализа следует, что гидравлически рациональное очертание стенки при задании его начального участка уравнением (2.8) получается для значений  $k > 2$ . Таким образом, можно утверждать, что невозможно создать такую форму сходящихся плановых очертаний для короткого участка водотока, при которой исключались бы образования стационарных волн конечной амплитуды (слабые прыжки) и обеспечивался равномерный режим в выходном сечении.



Фиг. 5.

Отметим, что исследование течения в водотоке для различных форм стенок является одним из приближенных методов решения обратной задачи. Нахождение оптимальных форм плановых очертаний открытого сужающегося водотока в строгой постановке сводится к решению вариационной задачи [18].

Получим уравнение слабого прыжка в общем случае, то есть когда поток перед и за прыжком возмущен.



Фиг. 6.

Перепишем уравнение (4.1) семейства характеристик, идущих вниз по течению в форме

$$y_{1,p} = b_0 \int_0^x \frac{dt}{1 - \bar{F}_{r, (0)} - 1} + J(x) F'(\xi) = \xi, \quad J(x) = \frac{1}{k\rho} \bar{r}(x) \quad (4.6)$$

(В уравнении (4.6) оставлены члены не выше порядка  $\xi$ ).

Обозначим через  $\xi_1$  значение  $\xi$  непосредственно перед прыжком, а через  $\xi_2$  — значение  $\xi$  непосредственно после прыжка. Тогда приравняв значение  $y$  на характеристиках в точках их пересечения с прыжковой волной, получаем

$$J(x) [F(\xi_2) - F(\xi_1)] = \xi_2 - \xi_1 \quad (4.7)$$

Как и в газовой динамике [20] можно показать, что имеет место закон площадей, то есть

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi) d\xi = \frac{1}{2} (\xi_2 - \xi_1) [F(\xi_2) + F(\xi_1)] \quad (4.8)$$

Подставляя в уравнения (4.7) и (4.8) вместо  $J(x)$  и  $F(x)$  свои выражения, получаем систему трансцендентных алгебраических уравнений для определения значений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

$$\begin{aligned} \psi(x) \xi_1^{k-1} \left[ \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{k-1} - 1 \right] &= 1 - \frac{U_0}{\xi_2} \\ \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^k - 1 &= \frac{k}{2} \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} - 1 \right) \left[ \left( \frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{k-1} + 1 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подставляя найденные значения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в уравнение характеристик (4.6), получим уравнение прыжка.

В частном случае, когда  $k < 2$  и впереди ударной волны нет возмущений ( $\xi_1 < 0$ ), формулы (4.7), (4.8) с использованием (2.17) дают

$$2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi) d\xi = -f(x) F^{-1}(\xi_2) \quad (F(\xi) < 0) \quad (4.10)$$

Подставляя в (4.10)  $F(\xi)$  из (2.16), получаем

$$\xi_2 = \left[ -\frac{k}{2} \psi(x) \right]^{1/2-k} \quad (4.11)$$

Отсюда, как и из закона площадей, видно, что косой гидравлический прыжок образуется на первой характеристике при  $k < 2$ , причем для  $k = 2$  надо взять в (2.21) полное выражение.

Из (4.11) и (4.6) получаем уравнение прыжка для  $k < 2$  (фиг. 3)

$$y_{np} = b_0 - \int_0^x \frac{dt}{V \text{Fr}_{(0)} - 1} - \left( \frac{2}{k} - 1 \right) \left[ -\frac{k}{2} \psi(x) \right]^{1/2-k} \quad (4.12)$$

При  $1 < k < 2$  кривая (4.12) вогнута в сторону оси  $Ox$ , что согласуется с данными эксперимента, приведенными в [4].

5. Выведем уравнение коротких волн и покажем, что лучевое решение (2.14), в котором характеристическая переменная заменена через нелинейную переменную  $\xi$ , является решением полученного уравнения и тем самым обоснуем метод Витема [6] в нашем случае.

Для общности получим уравнение коротких волн при наличии малой дисперсии. Уравнение движения для наклонных русел выводится методом, примененным в [19] для случая горизонтального русла. Опуская промежуточные выкладки из-за недостатка места, приведем окончательное уравнение Буссинеска для наклонных русел при нестационарном режиме

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \gamma h \cdot \vec{V} - h \gamma \cdot \vec{V} - \frac{h^3}{3} \Delta(\gamma \cdot \vec{V}) = 0 \quad (5.1)$$

при этом уравнения движения соответственно отличаются от (1.1) и (1.2) только нестационарными членами  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$ . В дальнейшем ограничимся случаем стационарного движения и в силу малости дисперсии линеаризуем дисперсионный член.

Вводя лучевую переменную  $\xi$  и переходя в уравнении (1.1), (1.2) и (5.1) от координат  $(x, y)$  к координатам  $(x, \xi)$ , получаем

$$u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + v \frac{\partial u}{\partial \xi} = g \sin \gamma - g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \cos \gamma \quad (5.2)$$

$$u \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} \cos \gamma \quad (5.3)$$

$$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (v + \gamma' u) \frac{\partial h}{\partial z} + u \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \quad (5.4)$$

где

$$\gamma(x) = \int_0^x \frac{dl}{V \overline{F_{r, \text{от}} - 1}}$$

Решение этих уравнений ищем в форме

$$u(x, z) = u_{(0)}(x) + \bar{u}(x, z), \quad v(x, z) = \bar{v}(x, z), \quad h(x, z) = h_{(0)}(x) + \bar{h}(x, z) \quad (5.5)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{h}$  малы и необязательно, чтобы все они имели одинаковый порядок малости.

Подставляя выражения  $u$ ,  $v$ ,  $h$  в уравнение (5.2)–(5.4), отбрасывая в первых двух из них члены  $u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ ,  $u_{(1)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$ , а в третьем — члены  $h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ ,  $u \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$ , имеющие более высокий порядок малости, чем остальные члены и учитывая уравнения нулевого приближения, получаем

$$u_{(0)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \gamma' u_{(0)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u \frac{du_{(0)}}{dx} + \gamma' u_{(0)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -g \left( \frac{dh_{(0)}}{dx} + \gamma' \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right) \cos \gamma \quad (5.6)$$

$$u_{(0)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \gamma' u_{(0)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + u \gamma' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \cos \gamma \quad (5.7)$$

$$h_{(0)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \gamma' h_{(0)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + h_{(0)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \bar{h} \frac{du_{(0)}}{dx} + \gamma' \bar{h} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{h} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + v \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} + \gamma' u_{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} + \gamma' u \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} + u_{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = u \frac{dh_{(0)}}{dx} = \frac{h_{(0)}^3}{6} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial z^3} \quad (5.8)$$

Приравнявая в этих уравнениях члены наименьшего порядка малости (члены, содержащие производные  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial z}$  линейно) и интегрируя выписанные уравнения, получим алгебраические уравнения, из которых находим, что

$$\bar{h} = -\frac{u_{(0)} \bar{u}}{g \cos \gamma}, \quad \bar{v} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \quad (5.9)$$

Заменяя в уравнениях (5.6)–(5.8) и членах, содержащих производные по  $x$ , и в нелинейных членах  $\bar{h}$ ,  $\bar{v}$  своими выражениями из (5.9), подставляя из полученных первых двух уравнений  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$  в третье и используя уравнение нулевого приближения, получаем уравнение коротких волн

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{3Fr_{(0)}}{2(Fr_{(0)} - 1)} \frac{\bar{u}}{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{7Fr_{(0)}}{4(Fr_{(0)} - 1)^2} \frac{2 \lg \gamma}{h_{(0)}} \frac{\bar{u}}{u} = \frac{h_{(0)}^2 \partial^2 \bar{u}}{6 \partial z^2} \quad (5.10)$$

Учитывая формулу (2.18) для лучевого решения, можно (5.10), после отбрасывания дисперсионного члена, записать в форме

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{3Fr_{(0)}}{2(Fr_{(0)} - 1)^2} \frac{\bar{u}}{u_{(0)}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\sigma \ln u}{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (5.11)$$

Из уравнения (5.11) сразу следует правило Витема, использованное в п. 2.

Упрощенные нелинейные уравнения для установившегося движения произвольной недиссипативной среды, описывающие окрестность слабых разрывов, можно получить методом [12], причем выбирая ось  $\tau = x_1 = x$  по нормали к волне линейной задачи, ось  $x_2 = y$  по лучу, проходящему через фиксированную точку, например, точку касания волн, ось  $x_3 = z$  по нормали к  $(x, x_1)$ , можно получить указанные уравнения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = u \frac{d \ln \Phi}{dx_3} - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Delta_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{(u - 1)u}{\Delta_3} \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\sigma z_3}{\sigma z} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} = u$$

где  $u$  есть возмущенное значение нормальной к волне скорости среды,  $\Phi$  — лучевое решение,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta = \tau V_3 + \frac{1}{2} V_2 - \frac{1}{4} V_1 - c_0 \sqrt{x^2 - z^2 - \tau^2}$  есть характеристическое уравнение в линейной задаче,  $(\tau, z, \tau) = \text{grad}$  — есть вектор нормали к линейной волне,  $c_0$  — ее нормальная скорость ( $V_3, V_2, V_1$ ) — скорость среды перед волной, причем в нелинейной задаче нормальная скорость волны в первом порядке  $C_3 = c_0 - \tau u$ , смысл  $u$  легко выясняется из проекций уравнений движения на направление  $x_3$ .

Институт механики АН Армянской ССР  
НИИ Водных проблем и гидротехники

Получено 15 VII 1974

Ա. Գ. ԲՈԴՆԵՎ, Գ. Ս. ՎԵՅԻՐՕԳԼՅԱՆ

ՎԵՐԻՐԵՏԻԿԱԿԱՆ ԶՈՐԲ ԻՍՈՒՐԵԱԿՈՒՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՆՏՐՉՈՐԻ ՏՆՈՐ  
ԵՎ ԿՈՒՐՍՅԱԿԱՆ ԵՐԱՆՆԱԿԱՆ ԹԵՐՈՒԹՅՈՒՆ ԻՏԵՑՑՈՂ ԲԱՅ ԶՐԱՏԱԿՈՒՄ

Ո. Գ. Բ. Ո. Վ.

Պրոտիվում էր գնալսական անսկզմկի ճնդուկի կայունացած վերլրիտի-  
կական շարժումը րաց ջրատարում. Գուրս է բեքթում ոչ զծային, րնութադրիչ-  
նկրի ճախատարումը, և որոշվում են այն պայմանները, որոնք տեղի ունեն թեջ  
ջրատարում առաջագած թնիչի շրջակայրում: Արոշվում է ոչ զծային լուծումը  
զծային րնութադրիչ շրջակայրում. զծային լուծումում րնութադրիչ փոխոխա-

կանր ոչ դժարին փոփոխականով փոխարինելու մեթոդով: Աստիճանաբարվում են թորչրի առաջացման պայմանները՝ կախված նեղացող չրաուարի պատերի տեսրից, և թրիվում է ոչ դժարին լուծման իմնագորումը:

## ON INVESTIGATION OF SUPERCRITICAL FLOW IN A CONFUSOR SHAPE OPEN CHANNEL OF ARBITRARY SLOPE

A. G. HADJOEV, G. S. BESIRGANIAN

### S u m m a r y

The supercritical steady flow of incompressible ideal fluid in an open channel is considered. The equation of non-linear characteristics is derived and the conditions on the hydraulic jump in an inclined channel are determined. The method of substitution in the linear solution of the characteristic variable by the non-linear one is used to find a non-linear solution in the proximity of linear characteristic. The jump formation, depending upon the wall shape of a narrowing channel, is examined. The validity of the correctness of the non-linear solution obtained is presented.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гирцдов А. Д. Движение жидкости по криволинейным поверхностям с постоянной глубиной. Изв. КНИИТ, т. 78, 1965.
2. Гирцдов А. Д. Расчет криволинейной поверхности тла в близанорном водопротуских сооружениях. Автореферат, АПИ им. Калинина, 1966.
3. Irpen A. T., Dazson J. H. Design of channel constrictions. Transactions of ASCE, vol. 116, 1951.
4. Емца Б. Т. Двухмерные бурные потоки. Изд. «Диргия», М., 1967.
5. Островский А. А., Пеликовский Е. Н. Динамика нелинейных волн в биртовой зоне океана. VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Цехвадор, 1973.
6. Лайтхилл М. Дж. Высшие приближения. Сб. «Общая теория гидродинамики больших скоростей», М., 1962.
7. Рыков О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22 № 5, 1958, стр. 586—590.
8. Берелия О. А., Губ А. П. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, № 2, 1960, стр. 31—39.
9. Шидлянский С. П. О регулярном отражении слабых ударных волн. Сб. «Трехмерные течения газа» под ред. В. Фальковича. Изд. СГУ, 1961.
10. Рыков О. С. Затухание стационарного вала в неоднородном средии. ПМТФ, № 1, 1962.
11. Шефнер Г. М. Угол отражения вала и его проводимости при распространении импульсов в неоднородном средии для жидкости. ПММ, т. 31, № 1, 1967, стр. 162—168.
12. Бадоев А. Г., Давоян Э. П. Исследование течения в среде с преломлением точки впадения ударных волн в движущейся и неподвижной постановке. Журнал Вычислит. математики и математич. физики, т. 12, № 6, 1972.
13. Минаев М. М. О распространении слабых возмущений в вязкой жидкости

- мике. Докл. АН Арм. ССР, т. LV, №5, 1972.
14. Байдюк А. Г. Определение нелинейных уравнений движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Докл. АН Арм. ССР, т. 52, №4, 1971.
  15. Орлов В. Т. Реакционизирующее движение жидкости в русле с переменным уклоном дна. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, вып. 52. Изд. "Энергия", Ленинградское отд., 1969.
  16. Курьян Р. Уравнения с частными производными. Изд. "Мир", М., 1964.
  17. Курьян Р., Фридрихе О. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М., 1950.
  18. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравномерных и разрывных течений. ПММ, т. 28, вып. 2, М., 1964, стр. 280-285.
  19. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Изд. "Наука", М., 1973.