

Г. И. АВАНЕСОВА

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
 ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
 ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В работе исследуются параметрические колебания замкнутой круговой изотропной цилиндрической оболочки при действии локальной осесимметричной нагрузки, вызывающей моментное начальное напряженное состояние.

В работах [1—3] показана необходимость учета неоднородности докритического состояния оболочек при исследовании областей устойчивости параметрических колебаний оболочек.

1. Исходные уравнения, связывающие нормальный прогиб W и силовую функцию Φ , взяты в виде [1, 3]

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(W; W) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho h \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + 2\varepsilon \rho h \frac{\partial W}{\partial t} + D \Delta^2 W - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(W; \Phi) = q$$

где обозначения общеприняты [1].

Начальное осесимметричное моментное состояние описывается системой уравнений

$$\frac{1}{Eh} \frac{\partial^4 \Phi_0}{\partial x^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} + 2\varepsilon \rho h \frac{\partial W_0}{\partial t} + D \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = q$$

Обозначив вариации функций W и Φ через W_1 и Φ_1 и принимая $W = W_0 + W_1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, приходим к следующим уравнениям устойчивости [3]:

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + 2\varepsilon \rho h \frac{\partial W_1}{\partial t} + D \Delta^2 W_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0$$

Последние следует рассматривать при однородных граничных условиях, соответствующих типу закрепления торцов оболочки.

При отсутствии продольных усилий систему (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} - 2\epsilon_1 \frac{\partial W_0}{\partial t} + \frac{D}{\rho h} \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} - \frac{E}{\rho R^2} W_0 = \frac{q_0}{\rho h} \cos \Omega t \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.4) представляется в виде

$$W_0 = \varphi_1(x) \cos \Omega t + \varphi_2(x) \sin \Omega t \quad (1.5)$$

то есть учитываются только члены, не затухающие по времени. Значения коэффициентов $\varphi_i(x)$ всегда могут быть найдены из (1.4) в зависимости от нагрузки.

Найденное решение $\varphi_1(x)$ представляется в виде ряда по косинусам [3-4]

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{1k} \cos kx; \quad \beta_{1k} = \frac{k\epsilon}{l} \quad (1.6)$$

Решение системы (1.3) ищется в виде [3-4]

$$W_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin \nu_m x \quad (1.7)$$

$$\Phi_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) \sin \nu_m x \quad \nu_m = \frac{m}{R}$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в систему (1.3), исключая $b_m(t)$ и пренебрегая нелинейными членами, получим для любого n следующее уравнение [3]:

$$E \frac{d^2 A}{dt^2} + 2\epsilon E \frac{dA}{dt} + (\Omega^2 - S_1 \cos \Omega t + S_2 \sin \Omega t) A = 0 \quad (1.8)$$

где n — число волн в окружном направлении

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad (1.9)$$

$$E \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad \Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \omega_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$S_i = \begin{vmatrix} 2S_0^i - S_{i-1}^i & S_{i-1}^i - S_{i+1}^i & S_{i+1}^i - S_{i+1}^i & \dots \\ S_{i-1}^i - S_{i+1}^i & 2S_0^i - S_{i+1}^i & S_{i+1}^i - S_{i+1}^i & \dots \\ S_{i-1}^i - S_{i+1}^i & S_{i+1}^i - S_{i+1}^i & 2S_0^i - S_{i+1}^i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

$$\omega_p = \frac{1}{\rho h} \left[D(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2} \right] \quad (1.11)$$

$$S_j^i = \frac{E\mu_n^2}{2\rho R} \left\{ 1 + \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} + \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2} \right] \lambda_j^2 \right\} \psi_j^i \quad (1.12)$$

($j = m - p; m + p; p - m$) см [4]

2. Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$, тогда уравнение (1.8) примет вид

$$E \frac{d^2 A}{dt^2} + (\Omega^2 + S_1 \cos bt) A = 0 \quad (2.1)$$

Решение уравнения (1.3) для нечетных областей динамической неустойчивости ищется в виде установившегося колебания с периодом $2T$, [1].

$$A(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\bar{a}_k \sin \frac{kbt}{2} + \bar{b}_k \cos \frac{kbt}{2} \right) \quad (2.2)$$

где \bar{a}_k и \bar{b}_k — некоторые векторы, не зависящие от времени. При подстановке (2.2) в уравнение (2.1) и приравнивании коэффициентов при одинаковых $\sin \frac{kbt}{2}$ и $\cos \frac{kbt}{2}$, приходим к следующей системе матричных уравнений:

$$\left(\Omega^2 - \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{4} b^2 E \right) \bar{a}_1 + \frac{1}{2} S_1 \bar{a}_3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(\Omega^2 - \frac{k^2 b^2}{4} E \right) \bar{a}_k + \frac{1}{2} S_1 (\bar{a}_{k-2} + \bar{a}_{k+2}) = 0 \quad k = 3, 5, 7, \dots$$

$$\left(\Omega^2 + \frac{1}{2} S_1 - \frac{b^2 E}{4} \right) \bar{b}_1 + \frac{1}{2} S_1 \bar{b}_3 = 0$$

$$\left(\Omega^2 - \frac{k^2 b^2}{4} E \right) \bar{b}_k + \frac{1}{2} S_1 (\bar{b}_{k-2} + \bar{b}_{k+2}) = 0 \quad k = 3, 5, 7, \dots$$

Условием существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов этой системы. Уравнение критических частот для нечетных k в матричной форме имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 \pm \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{4} b^2 E & \frac{1}{2} S_1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \frac{9}{4} b^2 E & \frac{1}{2} S_1 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \frac{25}{4} b^2 E & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Аналогично определяются четные области неустойчивости, ограниченные периодическим решением с периодом T . В этом случае решение системы (2.1) представляется в виде

$$A(t) = \frac{1}{2} \bar{b}_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \left(\bar{a}_k \sin \frac{k\Omega t}{2} + \bar{b}_k \cos \frac{k\Omega t}{2} \right) \quad (2.5)$$

Уравнения критических частот в этом случае имеют вид

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \zeta^2 E & \frac{1}{2} S_1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - 4\zeta^2 E & \frac{1}{2} S_1 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - 16\zeta^2 E & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 & S_1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \zeta^2 E & \frac{1}{2} S_1 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - 4\zeta^2 E & \frac{1}{2} S_1 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - 16\zeta^2 E & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Все полученные определители относятся к классу нормальных определителей, что легко может быть доказано аналогично [1].

Приближенное выражение для границ главных областей неустойчивости получается при приравнении нулю определителя верхнего квазиэлемента матрицы

$$\left| \Omega^2 + \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{4} \zeta^2 E \right| = 0 \quad (2.8)$$

или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \frac{1}{4} \zeta^2 \pm \frac{1}{2} (2S_0^1 - S_1^1) & -\frac{1}{2} (S_1^1 - S_1^1) \\ -\frac{1}{2} (S_1^1 - S_1^1) & \omega_2^2 - \frac{1}{4} \zeta^2 \pm \frac{1}{2} (2S_0^1 - S_1^1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9)$$

Раскрыв определитель, получаем уравнение, решение которого дает выражение для границ двух главных областей неустойчивости.

Значения критических ζ могут быть получены из уравнения (2.9) при применении метода последовательных приближений, так как ζ входит и в выражение S .

Аналогичный подход к решению задачи сохраняется при определении четных областей неустойчивости.

Далее рассматривается задача определения критических частот в случае $\varepsilon \neq 0$ (уравнение (1.8)).

Для определения границ нечетных областей динамической неустойчивости получается следующее уравнение в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \frac{9}{4} \varepsilon^2 E & \frac{1}{2} S_1 & \frac{1}{2} S_1 & \frac{1}{2} S_2 & 3\varepsilon E^2 \\ \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \frac{\varepsilon^2 E}{4} & \frac{1}{2} S_1 & \frac{1}{2} S_2 - \varepsilon E^2 & -\frac{1}{2} S_2 \\ \frac{1}{2} S_1 & \frac{1}{2} S_2 + \varepsilon E^2 & \Omega^2 - \frac{\varepsilon^2 E}{4} & -\frac{1}{2} S_1 & \frac{1}{2} S_1 \\ 3\varepsilon E^2 & -\frac{1}{2} S_2 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \frac{9}{4} \varepsilon^2 E & \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

а для четных областей — уравнение

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - 4\varepsilon^2 E & \frac{1}{2} S_1 & 0 & \frac{1}{2} S_2 & -4\varepsilon E^2 \\ \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \varepsilon^2 E & \frac{1}{2} S_2 & -2\varepsilon E^2 & -\frac{1}{2} S_2 \\ 0 & S_2 & \Omega^2 E & S_1 & 0 \\ -\frac{1}{2} S_2 & 2\varepsilon E^2 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \varepsilon^2 E & \frac{1}{2} S_1 \\ 4\varepsilon E^2 & -\frac{1}{2} S_2 & 0 & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - 4\varepsilon^2 E \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

Так же, как и в случае $\varepsilon = 0$, определены приближенные значения критических частот параметрического резонанса.

Уравнение критических частот для нечетных областей в матричной форме имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} E - \frac{1}{2} S_1 & \frac{1}{2} S_2 - \varepsilon E^2 \\ \frac{1}{2} S_2 + \varepsilon E^2 & \Omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} E - \frac{1}{2} S_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \frac{\theta^2}{4} - \frac{A_1}{2} & -\frac{C_1}{2} & \frac{A_2 - \varepsilon\theta}{2} & \frac{C_2}{2} \\ -\frac{C_1}{2} & \omega_2^2 - \frac{\theta^2}{4} - \frac{B_1}{2} & \frac{C_2}{2} & \frac{B_2 - \varepsilon\theta}{2} \\ \frac{A_3 + \varepsilon\theta}{2} & \frac{C_2}{2} & \omega_3^2 - \frac{\theta^2}{4} + \frac{A_1}{2} & \frac{C_1}{2} \\ \frac{C_2}{2} & \frac{B_2 + \varepsilon\theta}{2} & \frac{C_1}{2} & \omega_2^2 - \frac{\theta^2}{4} + \frac{B_1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= 2S_0^i - S_{i-1}^i \\ B_i &= 2S_0^i - S_{i-2}^i \\ C_i &= S_{i-1}^i - S_{i+1}^i \end{aligned} \quad (2.14)$$

то же для четных областей

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \theta^2 E & \frac{1}{2} S_2 & -2\varepsilon E\theta \\ S_2 & \Omega^2 E & S_1 \\ 2\varepsilon E\theta & \frac{1}{2} S_1 & \Omega^2 - \theta^2 E \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

3. В качестве примера рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с шарнирным опиранием у торцов.

Граничные условия для докритического состояния имеют вид:

$$W_0 = \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и } x = l \quad (3.1)$$

Функции $\varphi_i(x)$ и несимметричная локальная нагрузка $q = q_0 \cos \theta l$ представляются в виде рядов

$$\varphi_i(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{ir} \sin^{i_r} x \quad (3.2)$$

$$q_0 = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^q \sin^{i_r} x$$

где

$$a_{ir} = \frac{a_r^q v_r}{\mu h} \quad (3.3)$$

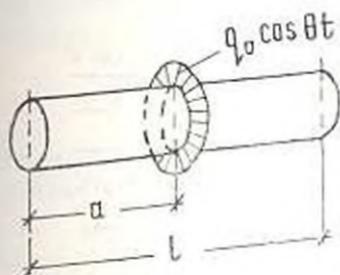
$$v_r = \frac{\left| \frac{D_r^4}{\rho h} + (\omega_0^2 - \theta^2) \right|}{\left| \frac{D_r^4}{\rho h} + (\omega_0^2 - \theta^2) \right|^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2} \quad (3.4)$$

$$\gamma_2 = \frac{2\beta_0}{\left| \frac{D_0^2}{\rho h} + (\omega_0^2 - \beta^2) \right|^2 + 4\beta^2 \omega_0^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{E}{\rho R^2} \quad (3.5)$$

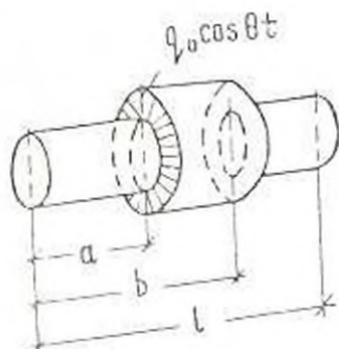
Ниже приведены коэффициенты разложения q в ряд по синусам для различных случаев осесимметричных нагрузок:

а) кольцевая обжимающая нагрузка

$$a_r^q = \frac{2q_0}{l} \sin^2 \frac{r\pi a}{l} \quad (3.6)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

б) нормальная к поверхности нагрузка, распределенная по части длины оболочки

$$a_r^q = \frac{2q_0}{r\pi} (\cos \frac{r\pi a}{l} - \cos \frac{r\pi b}{l}) \quad (3.7)$$

Коэффициенты разложения функций $\varphi_l(x)$ (1.6) в ряд по косинусам имеют вид

$$\Psi_k^l = \frac{1}{\rho h} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^q \gamma_{lr}}{r\pi} (1 - (-1)^r) \quad (3.8)$$

$$\Psi_k^l = \frac{1}{\rho h} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^q \gamma_{lr}}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^{r+k}}{r+k} + \frac{1 - (-1)^{r-k}}{r-k} \right)_{r \neq k}$$

Ниже приведен числовой пример. Рассмотрена круговая оболочка, имеющая следующие параметры: $l/R = 1; 0.3; R/h = 100$. Наименьшее значение парциальной частоты достигается при $p = 1, n = 7$ и равняется

0.06. Приведенные в табл. 1, 2 и 3 значения $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$ вычислены при

$n = 7$. В табл. 1 приведены значения критических $\bar{\omega}$ при кольцевой обжимающей нагрузке, в табл. 2 — при нормальной к поверхности на-

грузке, распределенной по всей длине оболочки, в табл. 3 — при нормальной нагрузке, распределенной от $x=0$ до $x = \frac{l}{3}$.

Таблица 1

l/R	$q_0/E\lambda$	$\varepsilon=0$	
		$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
1		$\bar{b}_1=0.470, \bar{b}_2=0.485$	$\bar{b}_1=0.456, \bar{b}_2=0.500$
		$\bar{b}_3=1.082, \bar{b}_4=1.213$	$\bar{b}_3=1.001, \bar{b}_4=1.224$
0.3		$\bar{b}_1=1.022, \bar{b}_2=1.645$	$\bar{b}_1=0.972, \bar{b}_2=1.983$
		$\bar{b}_3=3.330, \bar{b}_4=3.363$	$\bar{b}_3=3.030, \bar{b}_4=3.371$

Таблица 2

l/R	q_0/E	$\varepsilon=0$	
		$1.5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
1		$\bar{b}_1=0.391, \bar{b}_2=0.547$	$\bar{b}_1=0.283, \bar{b}_2=0.593$
		$\bar{b}_3=1.020, \bar{b}_4=1.108$	$\bar{b}_3=1.012, \bar{b}_4=1.224$
0.3		$\bar{b}_1=0.785, \bar{b}_2=0.976$	$\bar{b}_1=0.648, \bar{b}_2=0.909$
		$\bar{b}_3=3.007, \bar{b}_4=3.032$	$\bar{b}_3=2.847, \bar{b}_4=2.996$

Таблица 3

l/R	$q_0'E$	$\varepsilon=0, a=0, b=l/3$	
		$1.5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
1		$\bar{b}_1=0.3625, \bar{b}_2=0.584$	$\bar{b}_1=0.216, \bar{b}_2=0.685$
		$\bar{b}_3=0.982, \bar{b}_4=1.109$	$\bar{b}_3=0.986, \bar{b}_4=0.991$
0.3		$\bar{b}_1=1.568, \bar{b}_2=1.573$	$\bar{b}_1=1.532, \bar{b}_2=1.545$
		$\bar{b}_3=3.330, \bar{b}_4=3.351$	$\bar{b}_3=3.025, \bar{b}_4=3.361$

Первые две величины \bar{b} определяют область главного параметрического резонанса. Последние — побочную область резонансных колебаний.

Таблица 4

q	l/R	1	
		\bar{b}^2 из ур-ня (2.9)	\bar{b}^2 из раб. [4]
$q=0.6 \cdot 10^{-5}$		$\bar{b}_1^2=0.15, \bar{b}_2^2=0.311$	$\bar{b}_1^2=0.17, \bar{b}_2^2=0.33$
		$\bar{b}_3^2=1.04, \bar{b}_4^2=1.18$	$\bar{b}_3^2=0.91, \bar{b}_4^2=1.10$

В табл. 4 приведено сравнение результатов для оболочки, нагруженной нормальной нагрузкой, распределенной по всей длине оболочки.

ки, полученных при данной постановке задачи и в предположении безмоментного докритического состояния [3]:

Как видно из табл. 4, приведенные решения несколько отличаются (4—7%).

Вычисления, приведенные в данной работе, осуществлены в Вычислительном центре Института физики АН Арм. ССР.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 13 III 1974

Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՐԵՏՐԻԿ ՏԵՂԱԿԱՆ ԲԵՌԻ ԱՁԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՓՈՒՄ
ՊԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԻՆԱՄԵՐԻԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԻՄԱՍԻՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Դիտարկվում են փակ շրջանային զլանային թաղանթի պարամետրական առանումները՝ նրա վրա առանցքասիմետրիկ տեղական բեռի ազդեցության դեպքում:

Թաղանթի մինչկրիտիկական վիճակը բնորոշված է մոմենտային և առանցքասիմետրիկ էայնական իներցիոն ուժերը հաշվի առնելու և մինչկրիտիկական վիճակը պարամետրերը Ֆուրյեի շարքի վերածնելու դեպքում խնդիրը բերում է հայտնի մատրիցային հավասարման:

ON DYNAMIC STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER AXISYMMETRIC LOCAL LOAD

G. I. AVANESOVA

S u m m a r y

Parametric oscillations of a closed circular cylindrical shell under axisymmetric local loads are examined.

Precritical condition of the shell is assumed to be instantaneous and axisymmetric. Taking into account transverse forces and expanding the parameters of precritical condition into the Fourier series, the problem is reduced to a familiar matrix equation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. ГИИТА, М, 1956.
2. Болотин В. В. () взаимодействия вынужденных параметрически возбуждаемых колебаний. Изв. АН Арм. ССР, ОТН, № 4, 1956.
3. Гяни В. Ц. Динамическая устойчивость моментных состояний цилиндрической оболочки с учетом инерции докритического состояния. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 2, 1972.
4. Гяни В. Ц., Мовсисян А. А. Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Прикл. механика, т. V, вып. 6, 1969.