ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 1, 1975 Механика

Э. Н. ДАНОЯН

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Рассматривается плоская задача о распространении магнитоупругих колебаний в изотропной безграничной среде от точечного источника типа мгновенного импульса. Считается, что внешнее магнитное поле постоянно и параллельно плоскости движения.

Используя метод комплексных решений Смирнова-Соболева [1—3], строится решение, характеризующее магнитоупругие колебания от точечного источника типа мгновенного импульса. Проводится исследование полученных решений в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля.

На основе этих решений изучаются геометрические формы фронтов быстрых и медленных магнитоупругих волн в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля.

Аналогичные вопросы для анизотропных тел при отсутствии магнитного поля рассмотрены в [3—5].

§ 1. Постановка задачи, уравнения движения и их решения

Согласно [6—13] линеаризованные уравнения движения идеально проводящего упругого изотропного тела в постоянном однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности H_0 после пренебрежения токами смещения имеют вид

$$G\Delta u + (\lambda + G)\,\mathrm{grad\,div}\,u + R = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где u — вектор упругого смещения, μ — магнитная проницаемость, ρ — плотность, λ и G — упругие постоянные Ламэ среды, R — сила электромагнитного происхождения, определяемая следующим образом:

$$R = \frac{\mu}{c_0}(j \times H_0) = \frac{\mu}{4\pi}[\mathrm{rot\,rot}\,(u \times H_0)] \times H_0 \tag{1.2}$$

j — вектор плотности индуцированного тока, c_0 — скорость света в вакууме.

При этом векторы индуцированного электромагнитного поля выражаются через вектор перемещения u по следующим формулам:

$$E = -\frac{\mu}{c_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H_0\right), \qquad h = \mathrm{rot}\,(u \times H_0) \tag{1.3}$$

Отнеся упругую среду к прямоугольной системе координат x, y, z, рассмотрим случай, когда все искомые величины не зависят от одной из координат, например z, и упругое перемещение по направлению соответствующей координаты отсутствует, то есть

$$u_i = u_i(x, y, t), \quad u_3 = 0$$

$$h_i = h_i(x, y, t), \qquad E_i = E_i(x, y, t), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

Для существования решений вида (1.4) необходимо, чтобы вектор напряженности внешнего магнитного поля был либо перпендикулярен к плоскости движения xy $(H_{01} = H_{02} = 0)$, либо параллелен $(H_{03} = 0)$ [13]. Первый случай соответствует изотропному действию магнитного поля, второй случай — анизотропному.

В первом случае, то есть при изотропном действии магнитного поля, задача о распространении магнитоупругих колебаний от точечного источника решается совершенно аналогично случаю отсутствия внешнего магнитного поля.

Во втором случае $(H_{03} = 0)$, то есть когда влияние магнитного поля анизотропно, совмещая ось x с направлением вектора H_0, из (1.1) с учетом (1.2) и (1.4) получим

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ b_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\begin{gathered} a_1^2 = a^2 + \varkappa^2, \quad b_1^2 = b^2 + \varkappa^2, \quad \varkappa^2 = \mu H_0^2/4\pi\rho, \quad c^2 = a^2 - b^2 \\ a^2 = (\lambda + 2G)/\rho, \quad b^2 = G/\rho, \quad H_0^2 = H_{01}^2 + H_{02}^2 \end{gathered} \tag{1.6}$$

a и b — скорости продольных и поперечных упругих волн при отсутствии внешнего магнитного поля, $\varkappa$ — скорость Альфвена.

Согласно [3—4, 13], система уравнений имеет класс решений следующего вида:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Re} \left\{ \int^{\theta_k} p_k(\theta)\, W_k(\theta)\, d\theta \right\} \\ u_2(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Re} \left\{ \int^{\theta_k} q_k(\theta)\, W_k(\theta)\, d\theta \right\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$p_k(\theta) = c^2\theta\lambda_k(\theta), \quad q_k(\theta) = a^2\theta^2 + b^2\lambda_k^2(\theta) - 1 \tag{1.8}$$

Здесь комплексные переменные θ_k, как функции от x, y, t, определяются соотношениями

$$\delta_k \equiv t - \theta x + \lambda_k(\theta) y + \gamma(\theta) = 0 \tag{1.9}$$

где величины λ_k являются корнями дисперсионного уравнения системы (1.5)

$$a_1^2 b^2 \lambda^4 - A(\theta)\lambda^2 + B(\theta) = 0 \tag{1.10}$$

$\gamma(\theta)$ — произвольная аналитическая функция.

Коэффициенты уравнения (1.10) определяются следующим образом:

$$A(\theta) = K_1 - L\theta^2, \quad B(\theta) = (1 - a^2\theta^2)(1 - b_1^2\theta^2) \tag{1.11}$$

$$K_1 = a_1^2 + b^2, \quad L = a_1^2 b^2 + b_1^2 a^2$$

В решении (1.7) под λ_k следует понимать ветви алгебраической функции λ, однозначной на соответствующей римановой поверхности, а под W_k — ветви произвольной аналитической функции W, однозначной на указанной выше римановой поверхности.

Если в соотношении (1.9) принять $\gamma(\theta) = 0$, то получим однородные, нулевого измерения, решения системы (1.5). При этом получим

$$\delta_k = 1 - \theta\xi + \lambda_k(\theta)\eta = 0, \quad \xi = x/t, \quad \eta = y/t \tag{1.12}$$

Можно доказать, что все однородные, нулевого измерения решения системы (1.5) выражаются формулой (1.7).

Из предыдущих рассуждений следует, что для того, чтобы построить решение, характеризующее колебания от точечного источника, помещенного в начале координат, следует исследовать алгебраическую функцию $\lambda(\theta)$, удовлетворяющую уравнению (1.10), ветви этой функции и соответствующую риманову поверхность.

Решения уравнения(1.10) представим в виде

$$\lambda = \pm\lambda_k, \quad \lambda_k = \sqrt{\frac{A(\theta) + (-1)^k\sqrt{Q(\theta)}}{2a_1^2 b^2}}, \quad k = 1, 2 \tag{1.13}$$

где

$$\begin{gathered} Q(\theta) = A^2(\theta) - 4a_1^2 b^2 B(\theta) = N^2\theta^4 - 2K_2 N\theta^2 + K_2^2 \\ K_2 = a_1^2 - b^2, \qquad N = \varkappa^2 c^2 \end{gathered} \tag{1.14}$$

Для выделения однозначных регулярных ветвей алгебраической функции $\lambda(\theta)$ найдем особые точки этой функции, которые являются корнями дискриминанта уравнения (1.10) [14], то есть корнями следующего уравнения:

$$D = 16\, a_1^2 b^2 B(\theta) Q^2(\theta) = 0 \tag{1.15}$$

(1.15) эквивалентно следующим уравнениям:

$$B(\theta) = 0, \quad Q(\theta) = 0 \tag{1.16}$$

Уравнения (1.16) имеют, соответственно, следующие корни [13]:

$$\theta = \pm\theta_3^0; \quad \theta = \pm\theta_4^0, \quad \theta_3^0 = b_1^{-1}, \quad \theta_4^0 = a^{-1} \tag{1.17}$$

$$\theta = \pm \theta_1^0; \quad \theta = \pm \theta_2^0, \quad \theta_{1,2}^0 = (a_1 \pm b)\, N^{-1/2} \tag{1.18}$$

Взаимное расположение точек (1.17) и (1.18) на вещественной оси комплексной плоскости θ в зависимости от величины $\varkappa$ изучено в работе [13] и имеет вид

$$
\begin{array}{lll}
1.\ 0 < \theta_4^0 < \theta_5^0 < \theta_2^0 \leqslant \theta_1^0 \leqslant +\infty & \text{при} & 0 < \varkappa \leqslant \varkappa_1 \\
2.\ 0 < \theta_4^0 < \theta_3^0 = \theta_2^0 \leqslant \theta_5^0 < \theta_1^0 < +\infty & \text{при} & \varkappa_1 \leqslant \varkappa < \varkappa_2 \\
3.\ 0 < \theta_4^0 = \theta_3^0 < \theta_2^0 < \theta_5^0 < \theta_1^0 < +\infty & \text{при} & \varkappa = \varkappa_2 \\
4.\ 0 < \theta_3^0 < \theta_4^0 \leqslant \theta_2^0 \leqslant \theta_5^0 < \theta_1^0 < +\infty & \text{при} & \varkappa_2 < \varkappa \leqslant \varkappa_3 \\
5.\ 0 \leqslant \theta_3^0 < \theta_5^0 < \theta_4^0 < \theta_2^0 \leqslant \theta_1^0 < +\infty & \text{при} & \varkappa_3 < \varkappa \leqslant +\infty
\end{array}
\tag{1.19}
$$

где $\pm\theta_5^0$ $(\theta_5^0 = L^{-1/2} K_1^{1/2})$ — корни уравнения $A(\theta) = 0$, а величины $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ определяются следующим образом:

$$\varkappa_1 = [2^{-1} b\, (\sqrt{4a^2 - 3b^2} - b)]^{1/2}, \qquad \varkappa_2 = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad \varkappa_3 = ab^{-1}\varkappa_2 \tag{1.20}$$

Так как точки $\pm\theta_1^0$, $\pm\theta_2^0$ суть простые нули $Q(\theta)$, то внутренний радикал, входящий в (1.13), будет однозначной функцией на плоскости θ с разрезами $(\pm\theta_2^0, \pm\theta_1^0)$ вдоль вещественной оси. Фиксируем значение данного радикала условием, чтобы он был положительным на верхней части мнимой оси, то есть при $\theta = il\ (l > 0)$.

Согласно работе [13], для внешних радикалов в зависимости от величины $\varkappa$ имеем следующие точки разветвления:

при $\quad 0 \leqslant \varkappa < \varkappa_1$ для $k = 1$ точки $\pm\theta_4^0$, для $k = 2$ точки $\pm\theta_1^0$

при $\quad \varkappa = \varkappa_1$ — $\pm\theta_4^0$, $\pm\theta_1^0 = \pm\theta_2^0\ (k = 1)$, $\pm\theta_3^0\ (k = 2)$

при $\quad \varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_3$ — $\pm\theta_4^0$, $\pm\theta_5^0\ (k = 1)$, не имеет $(k = 2)$

при $\quad \varkappa = \varkappa_3$ — $\pm\theta_4^0$, $\pm\theta_5^0\ (k = 1)$, $\pm\theta_4^0\ (k = 2)$

при $\quad \varkappa_3 < \varkappa < +\infty$ — $\pm\theta_5^0\ (k = 1)$, $\pm\theta_1^0\ (k = 2)$

при $\quad \varkappa = +\infty$ — не имеет $(k = 1)$, $\pm\theta_1^0\ (k = 2)$

На основании полученных результатов λ_1 и λ_2 нужно рассматривать как ветви алгебраической функции λ, однозначной на римановой поверхности, составленной из плоскостей θ_1 и θ_2, склеенных вдоль купюр, соединяющих точки разветвления $\pm\theta_1^0$ и $\pm\theta_2^0$. При этом, в зависимости от величины $\varkappa$ на плоскостях θ_1 и θ_2 вдоль вещественных осей следует провести следующие разрезы:

при $0 \leqslant \varkappa < \varkappa_1$ на плоскости θ_1 — $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$, на плоскости θ_2 — $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$.

при $\varkappa=\varkappa_1$ на θ_1 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$, на θ_2 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_2^0=\theta_3^0, +\theta_2^0=+\theta_3^0)$,

при $\varkappa_1<\varkappa<\varkappa_2$ на θ_1 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(\pm\theta_2^0, \pm\theta_3^0)$, $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$, на θ_2 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_2^0, +\theta_2^0)$,

при $\varkappa=\varkappa_2$ на θ_1 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(\pm\theta_2^0, \pm\theta_4^0=\pm\theta_3^0)$, $(-\theta_4^0=-\theta_3^0, +\theta_4^0=+\theta_3^0)$, на θ_2 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_2^0, +\theta_2^0)$,

при $\varkappa_2<\varkappa<\varkappa_3$ на θ_1 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(\pm\theta_2^0, \pm\theta_4^0)$, $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$, на θ_2 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_2^0, +\theta_2^0)$,

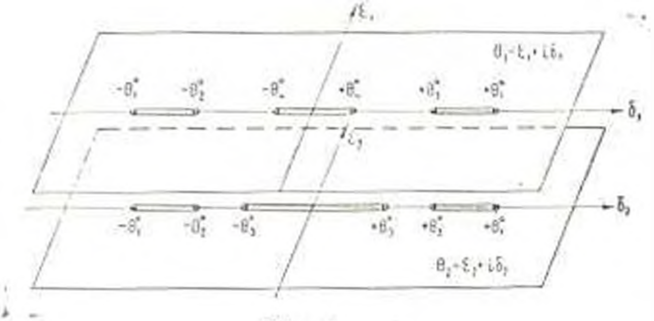
при $\varkappa=\varkappa_3$ на θ_1 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$, на θ_2 — $(\pm\infty, \pm\theta_1^0)$, $(-\theta_2^0=-\theta_4^0, +\theta_2^0=+\theta_4^0)$,

при $\varkappa_3<\varkappa<+\infty$ на θ_1 — $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$, на θ_2 — $(-\theta_2^0, +\theta_4^0)$,

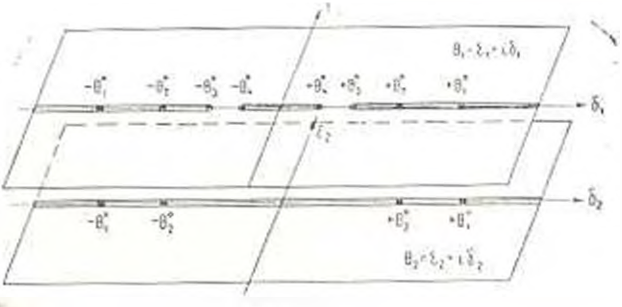
при $\varkappa=+\infty$ на θ_1 — разрезы отсутствуют, на θ_2 — $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$.

Остальные корни (1.10), отличающиеся от рассматриваемых θ_k знаком, будут относиться к другим римановым поверхностям, подобным указанным выше и соединяющимся с ними в соответствующих разрезах.

На фиг. 1 и 2 приведены римановы поверхности для случаев $0<\varkappa<\varkappa_1$ и $\varkappa_1<\varkappa<\varkappa_2$, соответственно.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Согласно [13], области вещественности функций λ_l на вещественных осях плоскостей θ_k римановой поверхности в зависимости от величины $\varkappa$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

(обозначения: $\theta^0_{2,3,5} = \theta_2^0 = \theta_3^0 = \theta_5^0$)

№№	Случаи	Для λ_1		Для λ_2
1	$\varkappa = 0$	$0 < \theta < \theta_4^0$	—	$0 < \theta < \theta_3^0$
2	$0 < \varkappa < \varkappa_1$	$0 < \theta < \theta_4^0$	—	$0 < \theta < \theta_3^0$
3	$\varkappa = \varkappa_1$	$0 < \theta < \theta_4^0$	$\theta = \theta^0_{2,3,5}$	$0 < \theta < \theta^0_{2,3,5}$
4	$\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2$	$0 < \theta < \theta_4^0$	$\theta_3^0 < \theta < \theta_2^0$	$0 < \theta < \theta_3^0$
5	$\varkappa = \varkappa_2$	$0 < \theta < \theta^0_{4,3}$	$\theta = \theta_2^0$	$0 < \theta < \theta_3^0$
6	$\varkappa_2 < \varkappa < \varkappa_3$	$0 < \theta < \theta_3^0$	$\theta_4^0 < \theta < \theta_2^0$	$0 < \theta < \theta_3^0$
7	$\varkappa = \varkappa_3$	$0 < \theta < \theta_3^0$	$\theta = \theta^0_{2,4,5}$	$0 < \theta < \theta^0_{2,4,5}$
8	$\varkappa_3 < \varkappa < +\infty$	$0 < \theta < \theta_3^0$	—	$0 < \theta < \theta_4^0$
9	$\varkappa = +\infty$	$\theta = \pm\theta_3^0,\ 0$	—	$0 < \theta < \theta_4^0$

Фиксируем значения λ_1 и λ_2 на римановой поверхности условием, чтобы они были положительными при $\theta = il\ (l > 0)$.

Следовательно, однородное решение системы (1.5) следует записать в следующей форме:

$$u_1(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Re}\left\{\int^{\theta_k} p_k(\zeta) W_k(\zeta)\, d\zeta\right\}$$
$$u_2(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{2} \operatorname{Re}\left\{\int^{\theta_k} q_k(\zeta) W_k(\zeta)\, d\zeta\right\} \tag{1.21}$$

где W_k — ветви произвольной аналитической функции W, однозначной на римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$, вид которой зависит от величины $\varkappa$, а переменные θ_k определяются соотношениями

$$1 - \theta_1\xi + \lambda_1\eta = 0, \quad 1 - \theta_2\xi + \lambda_2\eta = 0 \tag{1.22}$$

Подставляя значения λ_k из (1.13) в соотношения (1.22) и освобождаясь от радикалов, приходим к одному и тому же уравнению

$$A_0\theta_k^4 - A_1\theta_k^3 + A_2\theta_k^2 - A_3\theta_k + A_4 = 0 \tag{1.23}$$

где

$$A_0(\xi, \eta) = a_1^2 b^2 \xi^4 + L\xi^2\eta^2 + a^2 b^2 \eta^4$$
$$A_1(\xi, \eta) = -2\xi(2a_1^2 b^2 \xi^2 + L\eta^2)$$
$$A_2(\xi, \eta) = -(K_1\eta^4 + K_1\xi^2\eta^2 - 6a_1^2 b^2 \xi^2 - L\eta^2) \tag{1.24}$$
$$A_3(\xi, \eta) = 2\xi(K_1\eta^2 - 2a_1^2 b^2)$$
$$A_4(\xi, \eta) = \eta^4 - K_1\eta^2 + a_1^2 b^2$$

В каждой точке плоскости ξ, η уравнение (1.23) имеет четыре корня. При $\xi = 0,\ \eta = 0$ все корни уравнения (1.23) обращаются в бесконечность, что соответствует наличию источника колебаний в начале координат.

В случае точечного источника, помещенного в начале $\xi = 0$, $\eta = 0$, форма $A_0(\xi, \eta)$ из (1.24) должна быть определенной, что приводит к неравенству [3]

$$\varkappa^2[4a^4b^2 + \varkappa^2(a^2 - b^2)^2] > 0 \tag{1.25}$$

являющемуся условием вполне гиперболичности системы уравнений (1.5).

Как известно, фронты волн могут быть получены как огибающие прямых (1.22) при вещественных значениях θ_k и λ_k, связанных условием (1.10). Уравнения фронтов волн будут

$$\xi_k = -\lambda_k'/(\lambda_k - \theta_k\lambda_k'), \quad \eta_k = -1/(\lambda_k - \theta_k\lambda_k') \tag{1.26}$$

Нормальные скорости распространения волн имеют выражения [13]

$$v_k = 1/\sqrt{\theta_k^2 + \lambda_k^2}, \quad k = 1, 2 \tag{1.27}$$

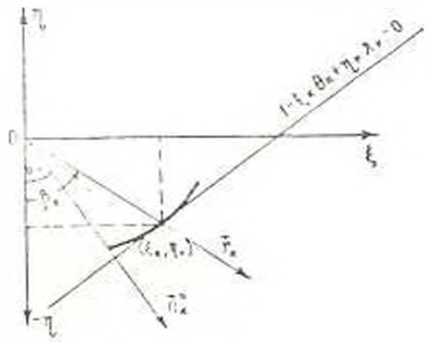
Очевидно, что если нужно получить решение, характеризующее упругие колебания от точечного источника при наличии магнитного поля, необходимо функцию W в (1.21) выбрать так, чтобы вещественные части W_1 и W_2 обращались в нуль на берегах разрезов, где соответственно λ_1 и λ_2 вещественны.

§ 2. Геометрия волновых фронтов. Условия существования остроугольных кромок

Рассмотрим геометрическую форму фронтов волн в зависимости от величины $\varkappa$ на плоскости $\xi\eta$.

Поскольку волновые фронты симметричны относительно координатных осей ξ, η, достаточно изучить их участки, соответствующие симметричным участкам разрезов плоскостей θ_1 и θ_2.

Пусть точкам θ_1 и θ_2, находящимся на берегах разрезов вещественности функций λ_1 и λ_2, соответствуют точки (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) на фронтах волн (фиг. 3).



Фиг. 3.

Обозначив через α_k углы между отрицательной полуосью η и нормалями к фронтам в выбранных точках, будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \theta_1/\lambda_1, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \theta_2/\lambda_2 \tag{2.1}$$

Обозначив через β_k углы между отрицательной полуосью ξ и лучами, соединяющими выбранные точки на фронтах с началом координат, получим

$$\operatorname{tg}\beta_1 = -\lambda_1, \qquad \operatorname{tg}\beta_2 = -\lambda_2 \tag{2.2}$$

Изучение геометрических форм фронтов волн требует исследования поведения функций для различных значений $\varkappa$, полученных из (2.1) — (2.2)

$$\lambda_k' = \frac{\theta_k \mu_k}{2a_1^2 b^2 \nu_k}, \qquad \mu_k = L + (-1)^k \frac{N(N\theta_k^2 - K_1)}{\sqrt{Q}} \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\theta_k}{\nu_k}\right)' = \frac{\varphi_k}{2a_1^2 b^2 \nu_k^3}, \qquad \varphi_k = K_1 + (-1)^k \frac{K_1^2 - K_1 N\theta_k^2}{\sqrt{Q}} \tag{2.4}$$

$$\lambda_k'' = \frac{D_k}{4a_1^4 b^4 \nu_k^3}, \qquad D_k = 2a_1^2 b^2 (\mu_k + \theta_k \mu_k') \nu_k^2 - \theta_k^2 \mu_k^2 \tag{2.5}$$

$$\mu_k' = \frac{(-1)^k 8a_1^2 b^2 N^2 \theta_k^2}{\sqrt{Q^3}} \tag{2.6}$$

$$D_k = -(-1)^k 48a_1^4 b^4 N^2 \theta_k \nu_k^2 \frac{K_1^2 - K_1 N\theta_k^2}{\sqrt{Q^3}} \tag{2.7}$$

1. Пусть $0 < \varkappa < \varkappa_1$.

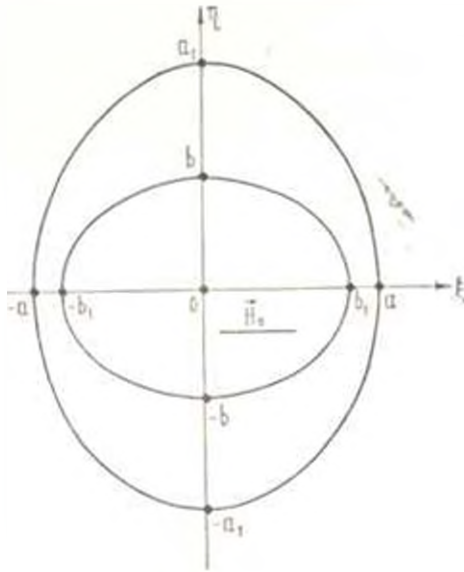
В этом случае функция ν_1 имеет вещественные значения на берегах разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1, функция ν_2 — на берегах разреза $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$ плоскости θ_2 (фиг. 1).

Изучим участки фронтов волн, соответствующие значениям верхних берегов разрезов

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_1^0 \text{ и } 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_3^0 \tag{2.8}$$

Точкам $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 0$, согласно (1.26), соответствуют точки волновых фронтов $\tau_1 = -a_1$ и $\tau_2 = -b$ на оси τ, точкам $\theta_1 = \theta_1^0$ и $\theta_2 = \theta_3^0$ — точки $\xi_1 = a$ и $\xi_2 = b_1$ на оси ξ. Промежуткам (2.8) соответствуют участки фронтов, границами которых будут указанные точки на координатных осях.

Согласно [3—5], основываясь на (2.1—2.7), можно доказать, что в этом случае углы β_1, β_2, β_3 монотонно возрастают от 0 до 90°. Следовательно, участкам (2.8) верхних берегов разрезов римановой поверхности соответствуют участки фронтов волн в четвертом квадранте плоскости $\xi\tau_1$, представляющие собой выпуклые кривые, концы которых подходят к координатным осям под углом 90°. Фронты волн представляют собой выпуклые замкнутые кривые с центром в начале координат. Внешний фронт, соответствующий $k = 1$, будет фронтом быстрой магнитоупругой волны. Внутренний, соответствующий $k = 2$, — фронтом медленной магнитоупругой волны (фиг. 4).



Фиг. 4.

2. Пусть $\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2$.

Ввиду того, что в этом случае форма фронтов волн существенно изменяется, следует провести более детальный анализ.

Функция ζ_1 имеет вещественные значения на берегах разрезов $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$ и $(\pm\theta_3^0, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1, функция ζ_2 — на берегах разреза $(-\theta_2^0, +\theta_2^0)$ плоскости θ_2 (фиг. 2).

Сначала изучим участок фронта волны, соответствующий значениям $0 < \theta_2 < \theta_2^0$ верхнего берега разреза плоскости θ_2. Точкам $\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \theta_2^0$ соответствуют точки фронта $(0, -b)$ и $(1/\theta_2^0, 0)$, расположенные на координатных осях η и ξ. Так как $\zeta_2(\theta_2) > 0$, $\zeta_2'(0) = 2a_1^2 > 0$, $(\theta_2/\zeta_2)' > 0$, то $\theta_2/\zeta_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ монотонно возрастает от нуля до конечного значения $\theta_2^0/\zeta_2(\theta_2^0)$, угол α_2 монотонно возрастает от нуля до значения $\alpha_2(\theta_2^0) < 90°$. С другой стороны, так как точка θ_* находится за пределами участка $(0, \theta_2^0)$, то $D_2 < 0$. Имеем также

$$D_2(0) = -\frac{2a_1^2(LK_2 + NK_1)}{K_2} < 0, \quad D_2(\theta_2^0) =$$

Следовательно, $D_2(\theta_2) < 0$ и $\zeta_2''(\theta_2) < 0$. Тогда, согласно (2.2), угол β_2 монотонно возрастает от 0 до 90°.

Таким образом, при $\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2$ участку $(0, \theta_2^0)$ верхнего берега разреза плоскости θ_2 соответствует участок фронта волны в четвертом квадранте, представляющий собой выпуклую кривую, которая выходит из точки $(0, -b)$ под прямым углом к оси η и подходит к оси ξ в точке $(1/\theta_2^0, 0)$ под острым углом $\alpha_2(\theta_2^0) < 90°$.

Согласно [3—5] легко показать, что участку $(0, \theta_2^0)$ верхнего берега разреза плоскости θ_1 соответствует участок фронта волны в четвертом квадранте, представляющий собой выпуклую кривую, концы которой подходят к координатным осям ξ, η под прямым углом, соответственно, в точках $(a, 0)$ и $(0, -a_1)$.

Установим, какой участок фронта волны соответствует значениям $\theta_3^0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2^0$ нижнего берега разреза плоскости θ_1. Очевидно, что на этом берегу разреза функция λ_1 имеет положительные значения. Точкам $\theta_1 = \theta_3^0$ и $\theta_1 = \theta_2^0$ соответствуют точки фронта волны $(b_1, 0)$ и $(1/\theta_2^0, 0)$, расположенные на положительной полуоси ξ. Так как $\alpha < \alpha_2 = c$, $\varphi_1'(\theta_1) < 0$,

$$\varphi_1(\theta_3^0) = -2b^2a_1^2(c^2-\alpha^2)/(\theta_3^2K_1 - L) < 0$$

то $\varphi_1(\theta_1) < 0$ на участке (θ_3, θ_2^0), следовательно, на этом участке $(\theta_1/\lambda_1)' < 0$ и θ_1/λ_1 монотонно убывает от $+\infty$ до значения $(\theta_2^0/\lambda_1(\theta_2^0)) = (\theta_2^0/\lambda_2(\theta_2^0))$, угол α_1 монотонно убывает от $90°$ до значения $\alpha_1(\theta_2^0) = \alpha_2(\theta_2^0) < 90°$.

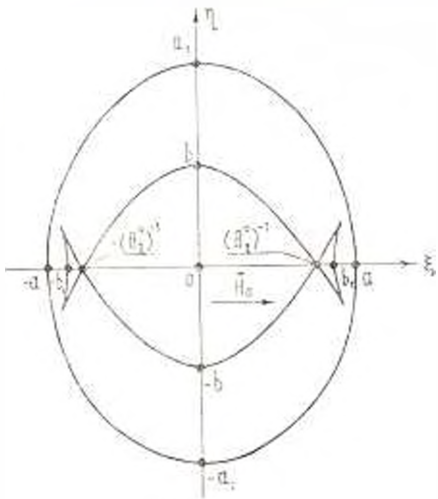
С другой стороны, так как точка $\theta_0 > \theta_3^0$, то $D_1 > 0$ и $D_1(\theta_3^0) = -(\theta_3^0)^2[\varphi_1(\theta_3^0)]^2 < 0$, $D_1(\theta_2^0) = +\infty$. Следовательно, в точке θ^* из участка (θ_3^0, θ_2^0) функции D_1 и λ_1 меняют знак с минуса на плюс.

В интервале (θ_3^0, θ^*) правая часть первого равенства (2.2) монотонно возрастает от $-\infty$ до значения $-\lambda_1(\theta^*) < 0$, $\operatorname{tg}\beta_1$ также монотонно возрастает от $-\infty$ до значения $-\lambda_1'(\theta^*) < 0$, угол β_1 монотонно возрастает от $90°$ до $\beta_1(\theta^*)$.

В интервале (θ^*, θ_2^0) правая часть первого равенства (2.2) монотонно убывает от значения $-\lambda_1(\theta^*)$ до $-\infty$, угол β_1 монотонно убывает от значения $\beta_1(\theta^*)$ до $90°$. Следовательно, нижнему берегу разреза $(-\theta_3^0, -\theta_2^0)$ плоскости θ_1 соответствует участок фронта волны в первом квадранте.

Один отрезок рассматриваемого участка, соответствующий интервалу (θ_2^0, θ^*), представляет выпуклую кривую, которая выходит из точки $(1/\theta_2^0, 0)$ под острым углом к оси ξ и будет продолжением выпуклого участка фронта волны, соответствующего интервалу $(0, \theta_2^0)$ верхнего берега разреза плоскости θ_2, так как $\alpha_1(\theta_2^0) = \alpha_2(\theta_2^0)$. Другой отрезок, соответствующий интервалу (θ^*, θ_3^0), представляет вогнутую кривую, один конец которой соединен точкой возврата первого рода с первым отрезком, другой конец подходит к оси ξ в точке $(b_1, 0)$ под прямым углом.

Таким образом, в случае $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ внешний фронт будет фронтом быстрой магнитоупругой волны, соответствующим берегам разреза $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$ плоскости θ_1 и представляющим выпуклую замкнутую кривую, пересекающую координатные оси в точках $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm a_1)$. Внутренний фронт будет фронтом медленной магнитоупругой волны, состоящим из кусочно-гладких кривых, образующих остроугольные кромки у оси ξ, выражающимся формулами (1.26) при $k = 2$ на берегах разреза $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$ плоскости θ_2 и формулами (1.26) при $k = 1$ на берегах разрезов $(\pm\theta_3^0, \pm\theta_2^0)$ плоскости θ_1 римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$ (фиг. 5).



Фиг. 5.

При $\varkappa \to 0$ из первого случая получается, что волновые фронты представляют собой окружности с центром в начале координат с радиусами $b_1 = b$, $a_1 = a$.

При $\varkappa \to \varkappa_1$ участки $(\pm\theta_3^0, \pm\theta_2^0)$ вещественности функции λ_1 вырождаются в точки $\pm\theta_3^0 = \pm\theta_2^0$, причем треугольные части фронта медленной волны исчезают, превращаясь в точки. Фронт становится замкнутой выпуклой кривой, пересекаясь с осью ξ в двойных точках, которые получаются из формул (1.26) при $\theta = \pm\theta_3^0 = \pm\theta_2^0$, когда $k = 1$ и $k = 2$.

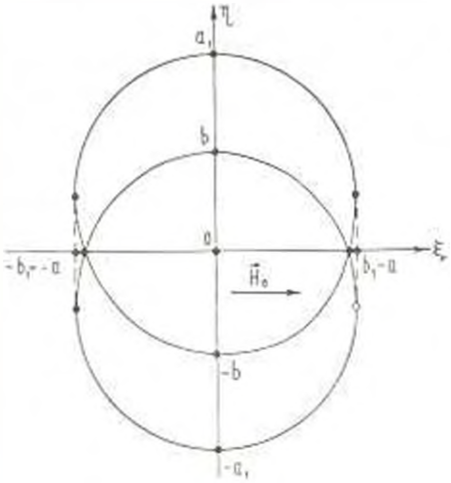
3. Пусть $\varkappa = \varkappa_2 = c$.

В этом случае λ_1 имеет вещественные значения на берегах разреза $(-\theta_4^0 = -\theta_3^0, +\theta_4^0 = +\theta_3^0)$ и в точках $\pm\theta_2^0$ плоскости θ_1, а функция λ_2 — на берегах разреза $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$ плоскости θ_2.

Этот случай аналогичен конической рефракции в кристаллооптике [15]. Основываясь на кристаллооптической аналогии, как это делается в [12], на фиг. 6 приведены волновые фронты, соответствующие этому случаю. Отметим, однако, что случай рефракции требует специального исследования.

4. Пусть $x_2 < x < x_3$.

В этом случае функция λ_1 имеет вещественные значения на берегах разрезов $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$ и $(\pm\theta_4^0, \pm\theta_2^0)$ плоскости θ_1, функция λ_2 — на берегах разреза $(-\theta_2^0, +\theta_2^0)$ плоскости θ_2.



Фиг. 6.

Чтобы получить риманову поверхность функции $\lambda(\theta)$, следует на фиг. 2 поменять местами точки $\pm\theta_3^0$ и $\pm\theta_4^0$.

Проводя аналогичные рассуждения, как в случае $x_1 < x < x_2$, получаем, что внешний фронт будет фронтом быстрой волны, соответствующим берегам разреза $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$ плоскости θ_1 и представляющим выпуклую замкнутую кривую, пересекающую координатные оси ξ, η в точках $(\pm b_1, 0,)$ и $(0, \pm a_1)$. Внутренний фронт будет фронтом медленной волны, состоящим из кусочно-гладких кривых, образующих остроугольные кромки у оси ξ и выражающихся формулами (1.26) при $k = 2$ на берегах разреза $(-\theta_2^0, +\theta_2^0)$ плоскости θ_2 и формулами (1.26) при $k = 1$ на берегах разрезов $(\pm\theta_4^0, \pm\theta_2^0)$ плоскости θ_1 римановой поверхности функции $\lambda(\theta)$.

В пределе, когда $x \to x_1$, участки $(\pm\theta_4^0, \pm\theta_2^0)$ вырождаются в точки $\pm\theta_4^0 = \pm\theta_2^0$, фронт медленной волны становится выпуклой замкнутой кривой, которая пересекается с осью ξ в двойных точках, координаты которых определяются из формул (1.26) при $\theta = -\theta_2^0$, $\theta = +\theta_2^0$, когда $k = 1$ и $k = 2$.

5. Пусть $x_3 < x < +\infty$.

В этом случае функция λ_1 вещественна на берегах разреза $(-\theta_3^0, +\theta_3^0)$ плоскости θ_1, а функция λ_2 — на берегах разреза $(-\theta_4^0, +\theta_4^0)$ плоскости θ_2.

Рассуждая точно так же, как в случае $0 < \varkappa < \varkappa_1$, можно показать, что фронты волн представляют собой выпуклые замкнутые кривые с центром в начале координат; внешний фронт, соответствующий $k = 1$, будет фронтом быстрой волны, внутренний, соответствующий $k = 2$, — фронтом медленной волны.

При $\varkappa \to +\infty$ внешний фронт, то есть фронт быстрой волны, вырождается в бесконечно удаленную точку.

Выполненные исследования дают возможность установить условия существования или отсутствия остроугольных кромок на фронтах магнитоупругих волн: когда $0 < \varkappa \leq \varkappa_1$ и $\varkappa_2 \leq \varkappa < +\infty$, кромки отсутствуют, когда $\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2$ $(\varkappa \neq \varkappa_0)$ кромки существуют, когда $\varkappa = \varkappa_0$ — имеет место коническая рефракция магнитоупругих волн.

Заметим, что, в отличие от сказанного, в магнитной газодинамике наличие остроугольных кромок обязательно [16]. Это объясняется влиянием поперечных упругих волн, так как при $b \to 0$ области отсутствия кромок в магнитоупругости исчезают $(\varkappa_1 \to 0,\ \varkappa_2 \to +\infty)$.

Автор благодарит участников семинара „Электродинамика деформируемых сплошных сред" Института механики АН АрмССР за обсуждение работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 IV 1974

Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻՑ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Դիտարկված է իզոտրոպ անվերջ միջավայրում ակնթարթային իմպուլսի բնույթի կետային աղբյուրից մագնիսաառաձգական տատանումների տարածման հարթ խնդիրը: Սկզբնական մագնիսական դաշտը ենթադրված է համասեռ և զուգահեռ միջավայրի շարժման հարթությանը:

Սմիրնով-Սոբոլևի կոմպլեքս լուծումների մեթոդի հիման վրա ստացված են լուծումներ, որոնցով բնութագրվում են կետային աղբյուրից տարածվող մագնիսաառաձգական տատանումները:

Բերված է ստացված լուծումների հետազոտումը և նրա հիման վրա ուսումնասիրված են արագ և դանդաղ մագնիսաառաձգական ալիքների ճակատների երկրաչափական ձևերը՝ կախված սկզբնական մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից:

ON A PLANE PROBLEM OF PROPAGATION OF MAGNETOELASTIC VIBRATION FROM A POINT SOURCE

Z. N. DANOIAN

S u m m a r y

A plane problem of propagation of magnetoelastic vibration in anisotropic infinite medium from a point source of an instantaneous impulse type is considered. The primary magnetic field is assumed to be constant and parallel to the plane of propagation.

The solutions, characterizing the magnetoelastic vibration from a point source, are obtained on the basis of Smirnov-Sobolev's complex solutions.

The solutions derived are analysed, and in their terms the geometry of fronts of fast and slow magnetoelastic waves are examined, depending upon the strength of the primary magnetic field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф. и Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. 12. ОНТИ, М.-Л., 1937.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, часть 2. Изд. „Наука", М., 1969.
3. *Свекло В. А.* Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
4. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, т. 33, вып. 3, 1969.
5. *Осипов И. О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
6. *Кейлис-Борок В. И., Монин А. С.* Магнитоупругие волны и граница земного ядра. Изв.АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1959.
7. *Kaliski S.* The propagation of a non-linear loading wave in a magnetic field for a perfect conductor. Proc. Vibr. Probl., № 5, 1960.
8. *Когачевский Л. Я.* Об отражении магнитозвуковых волн. ПММ, т. 26, вып. 5, 1962.
9. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* Распространение упругих волн в анизотропном полупространстве при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
10. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
11. *Селезов И. Т.* Распространение магнитоупругих волн напряжения от цилиндрической полости в проводящей среде. ПМТФ, № 2, 1969.
12. *Buzer J.* Geometrical magnetoelasticity. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., № 1, 1971.
13. *Даноян З. Н.* К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально проводящих изотропных средах. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVII, № 5, 1974.
14. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. Изд. „Наука", М., 1968.
15. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Изд. „Мир", М., 1964.
16. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. Изд. „Мир", М., 1967.