ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 6, 1974 Механика

Н. А. ВЕКОВИЩЕВА

ИЗГИБ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЙ ПО ВСЕМУ КОНТУРУ

Рассмотрим краевую задачу об изгибе тонкой прямоугольной пьезоэлектрической пластинки, опертой (шарнирно закрепленной) по всему контуру. В работе [1] получено, что задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $w(x_1, x_2)$ — прогиба срединной плоскости и $V(x_1, x_2)$ — распределения потенциала срединной поверхности

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h} L_3 V = q, \qquad L_3 w - \frac{2}{h} L_2 V = 0 \tag{1}$$

Здесь линейные операторы с частными производными

$$L_4 = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 4B_{13}\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(B_{12} + 2B_{33})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} +$$

$$- 4B_{23}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + B_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

$$L_3 = B_{14}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{15} - 2B_{34})\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (B_{24} + 2B_{35})\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + B_{25}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \tag{2}$$

$$L_2 = B_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{45}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{55}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$q = q(x_1, x_2)$ — интенсивность распределенной нагрузки, действующей на пластинку нормально к срединной плоскости в ее недеформированном состоянии. B_{ij} — постоянные коэффициенты, связанные с толщиной h и материальными константами среды.

Краевая задача состоит в определении двух неизвестных функций w и V, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (1) и следующим граничным условиям:

при $x_1 = 0$, $x_1 = a$

$w = 0$

$$-(B_{11}w_{,11} + B_{12}w_{,22} - 2B_{13}w_{,12}) + \frac{2}{h}(B_{14}V_{,1} + B_{15}V_{,2}) = 0$$

$$B_{14}w_{,11} + B_{24}w_{,22} + 2B_{34}w_{,12} - \frac{2}{h}(B_{44}V_{,1} - B_{45}V_{,2}) = 0 \tag{3}$$

при $x_1 = 0,\ x_2 = h$

$w = 0$

$$-(B_{12}w''_{11} + B_{22}w''_{22} + 2B_{23}w''_{12}) - \frac{2}{h}(B_{24}V'_1 + B_{25}V'_2) = 0$$

$$B_{13}w''_{11} + B_{23}w''_{22} + 2B_{33}w''_{12} - \frac{2}{h}(B_{34}V'_1 + B_{35}V'_2) = 0 \qquad (4)$$

Функции со штрихами обозначают производные по аргументам, указываемым нижними индексами.

Для решения задачи применим метод малого параметра, известный в литературе и нашедший широкое распространение в работах В. С. Саркисяна [2]. Для этого перепишем систему (1) в виде

$$A_1[w] + \mu A_2[w,\ V] = q, \quad A_3[V] + \mu A_4[w,\ V] = 0 \qquad (5)$$

вводя новые обозначения для операторов

$$A_1 = B_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(B_{12} + 2B_{33})\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + B_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}$$

$$A_2 = \frac{4B_{13}}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3\partial x_2} + \frac{4B_{23}}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1\partial x_2^3} - \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h\mu}\Big[B_{14}\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} +$$

$$(B_{15} - 2B_{34})\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2\partial x_2} - (B_{24} - 2B_{35})\frac{\partial^3 V}{\partial x_1\partial x_2^2} - B_{25}\frac{\partial^3 V}{\partial x_2^3}\Big] \qquad (6)$$

$$A_3 = \frac{2}{h}\left(B_{44}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + B_{55}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right)$$

$$A_4 = \frac{4B_{45}}{h\mu}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{\mu}\Big[B_{14}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{15} + 2B_{34})\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\partial x_2} +$$

$$+ (B_{24} + 2B_{35})\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2} + B_{25}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}\Big]$$

Такое введение малого параметра в основные уравнения и граничные условия содержит в себе два физических предположения:

1) в матрице равновесных свойств коэффициенты, стоящие на главной диагонали, больше, чем соответствующие недиагональные значения упругих и диэлектритических коэффициентов.

2) основные процессы в пьезокристалле больше, чем процессы взаимодействия полей. Иными словами, при действии на пьезокристалл заданных деформаций возникающие механические усилия больше, чем усилия, вызываемые электрическим полем, происходящим от заданных деформаций. И обратно, при действии электрического поля возникающая поляризация больше, чем поляризация, вызываемая деформацией, определяемой электрическим полем.

Отметим, что второе предположение не говорит о слабой электромеханической связи. Такое соотношение будет иметь место в любых, в том числе и сильных, пьезоэлектриках.

Будем искать решение системы (5) в виде рядов по степеням малого параметра μ

$$w = w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \mu^m, \qquad V = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} V_m \mu^m \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5) и приравнивая выражения при одинаковых степенях μ, получим

$$\begin{matrix} A_1 [w_0] = q_0, & A_1 [w_m] = q_m \\ A_3 [V_0] = 0, & A_3 [V_m] = Q_m \end{matrix} \quad (m = 1, 2, \ldots, \infty) \tag{8}$$

вводя обозначения для правых частей

$$q_0 (x_1, x_2) = q (x_1, x_2)$$

$$\begin{matrix} q_m (x_1, x_2) = - A_2 [w_{m-1}, V_{m-1}] \\ Q_m (x_1, x_2) = - A_4 [w_{m-1}, V_{m-1}] \end{matrix} \quad (m = 1, 2, \ldots \infty) \tag{9}$$

Преобразуем граничные условия. Для этого запишем их в виде:

при $x_1 = 0$, $x_1 = a$ $w'_{12} = 0$, тогда

$$w = 0, \quad w'_{11} = \mu B_1, \quad V'_1 = \mu B_2 \tag{10}$$

где обозначены

$$B_1 = -\frac{2B_{13}}{\mu B_{11}} w'_{12} - \frac{2}{\mu h B_{11}} (B_{14} V'_1 + B_{15} V'_2) \tag{11}$$

$$B_2 = -\frac{h}{2B_{44}} \left(\frac{2B_{45}}{h\mu} V'_2 + \frac{B_{14}}{\mu} w'_{11} + \frac{2B_{34}}{\mu} w'_{12} \right) \tag{12}$$

при $x_2 = 0$, $x_2 = b$ $w'_{11} = 0$, тогда

$$w = 0; \quad w'_{22} = \mu B_3, \quad V'_2 = \mu B_4 \tag{13}$$

где обозначены

$$B_3 = -\frac{2B_{23}}{\mu B_{22}} w'_{12} - \frac{2}{\mu h B_{22}} (B_{24} V'_1 + B_{25} V'_2) \tag{14}$$

$$B_4 = -\frac{h}{2B_{55}} \left(\frac{2B_{45}}{\mu h} V'_1 + \frac{B_{25}}{\mu} w'_{22} + \frac{2B_{35}}{\mu} w'_{12} \right) \tag{15}$$

Принимая во внимание (7) и выполняя ряд преобразований, получим окончательно граничные условия при $x_1=0,\ x_1=a$

$$w_m=0 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\dots\ \infty)$$

$$\left.\begin{aligned} &(w_0)_{11}=0, \quad (w_m)_{11}=B_1[w_{m-1},\ V_{m-1}]\\ &(V_0)_1=0, \quad (V_m)_1=B_2[w_{m-1},\ V_{m-1}]\end{aligned}\right\} \quad (m=1,\ 2,\dots\ \infty) \tag{16}$$

при $x_2=0,\ x_2=b$

$$w_m=0 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\dots\ \infty)$$

$$\left.\begin{aligned} &(w_0)_{22}=0, \quad (w_m)_{22}=B_3[w_{m-1},\ V_{m-1}]\\ &(V_0)_2=0, \quad (V_m)_2=B_4[w_{m-1},\ V_{m-1}]\end{aligned}\right\} \quad (m=1,\ 2,\ \dots\ \infty) \tag{17}$$

Итак, решение поставленной задачи сводится к решению рекуррентных систем дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющих граничным условиям (16) и (17).

Для нахождения первого приближения ($m=0$) нужно решить две краевые задачи

I. $$A_1[w_0]=q \tag{18}$$

при $\quad x_1=0,\ \ x_1=a \quad w_0=0,\ \ (w_0)_{11}=0$

при $\quad x_2=0,\ \ x_2=b \quad w_0=0,\ \ (w_0)_{22}=0$

II. $$A_3[V_0]=0 \tag{19}$$

при $\quad x_1=0,\ \ x_1=a \quad (V_0)_1=0$

при $\quad x_2=0,\ \ x_2=b \quad (V_0)_2=0$

Решение задачи I ищем в виде

$$w_0=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}A_{pq}\sin\frac{p\pi x_1}{a}\sin\frac{q\pi x_2}{b} \tag{20}$$

удовлетворяющем всем граничным условиям. Для определения коэффициентов A_{pq} разложим функцию $q(x_1,\ x_2)$ в двойной ряд Фурье

$$q(x_1,\ x_2)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}\sin\frac{p\pi x_1}{a}\sin\frac{q\pi x_2}{b} \tag{21}$$

где

$$a_{pq}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x_1,\ x_2)\sin\frac{p\pi x_1}{a}\sin\frac{q\pi x_2}{b}\,dx_1dx_2 \tag{22}$$

Подставляя (20) и (21) в (18) и сравнивая коэффициенты, находим A_{pq}

$$A_{pq}=\frac{a_{pq}}{\pi^4\left[B_{11}\left(\frac{P}{a}\right)^4+2(B_{12}+2B_{33})\left(\frac{P}{a}\right)^2\left(\frac{q}{b}\right)^2+B_{22}\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]}=\frac{a_{pq}}{\pi^4} \tag{23}$$

Тогда для $w_0(x_1, x_2)$ будем иметь

$$w_0(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{pq}}{\pi^4} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \tag{24}$$

Задача II представляет собой однородное уравнение (уравнение Лапласа) с однородными граничными условиями для производных. Такая задача имеет решение

$$V_0(x_1, x_2) = 0 \tag{25}$$

Приступим к построению второго приближения ($m = 1$). Из (8) с учетом (6) и (24) следует

$$A_1[w_1] = q_1[w_0, V_0], \quad A_3[V_1] = Q_1[w_0, V_0] \tag{26}$$

где

$$q_1 = \sum_p \sum_q b_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \cos \frac{q\pi x_2}{b}$$

$$b_{pq} = \frac{4a_{pq}^2}{\mu} \frac{pq}{ab} \left| B_{13} \left(\frac{p}{a} \right)^2 + B_{23} \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right|$$

$$Q_1 = \sum_p \sum_q \left(\alpha_{pq} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \sin \frac{q\pi x_2}{b} + \beta_{pq} \sin \frac{p\pi x_1}{a} \cos \frac{q\pi x_2}{b} \right)$$

$$\alpha_{pq} = \frac{h}{2\mu\pi} a_{pq}^2 \left| B_{14} \left(\frac{p}{a} \right)^3 + (B_{24} + 2B_{35}) \frac{p}{a} \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right|$$

$$\beta_{pq} = \frac{h}{2\mu\pi} a_{pq}^2 \left| (B_{15} + 2B_{34}) \left(\frac{p}{a} \right)^2 \frac{q}{b} + B_{25} \left(\frac{q}{b} \right)^3 \right|$$

a_{pq} — обозначение постоянной, введенное в (23). Из (9) с учетом (24) будем иметь граничные условия для функций w_1 и V_1

при $x_1 = 0$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{11}'' = f_1(x_2), \quad (V_1)_1' = F_1(x_2)$$

при $x_1 = a$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{11}'' = f_2(x_2), \quad (V_1)_1' = F_2(x_2)$$

при $x_2 = 0$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{22}'' = \varphi_1(x_1), \quad (V_1)_2' = \Phi_1(x_1)$$

при $x_2 = b$

$$w_1 = 0, \quad (w_1)_{22}'' = \varphi_2(x_1), \quad (V_1)_2' = \Phi_2(x_1)$$

Обозначим предварительно

$$\pi^2 \mu a b = \frac{1}{c}, \qquad a_{pq} pq \cos \frac{p\pi x_1}{a} = c_{pq}^{(1)}$$

$$a_{pq} pq \cos \frac{q\pi x_2}{b} = c_{pq}^{(2)}$$

Тогда можно записать

$$f_1(x_2) = \frac{2B_{13}c}{B_{11}}\sum_p\sum_q c^{(2)}_{pq}, \qquad F_1(x_2) = \frac{hB_{31}c}{B_{11}}\sum_p\sum_q c^{(2)}_{pq}$$

$$f_2(x_2) = \frac{2B_{13}c}{B_{11}}\sum_p\sum_q c^{(2)}_{pq}(-1)^p, \qquad F_2(x_2) = \frac{hB_{31}c}{B_{11}}\sum_p\sum_q c^{(2)}_{pq}(-1)^p \quad (27)$$

$$\varphi_1(x_1) = \frac{2B_{23}c}{B_{22}}\sum_p\sum_q c^{(1)}_{pq}, \qquad \Phi_1(x_1) = \frac{hB_{32}c}{B_{22}}\sum_p\sum_q c^{(1)}_{pq}$$

$$\varphi_2(x_1) = \frac{2B_{23}c}{B_{22}}\sum_p\sum_q c^{(1)}_{pq}(-1)^q, \qquad \Phi_2(x_1) = \frac{hB_{32}c}{B_{22}}\sum_p\sum_q c^{(1)}_{pq}(-1)^q$$

Для решения этих задач применим метод сведения неоднородных задач к однородным. Для этого сформулируем и решим четыре вспомогательные задачи

IIIа. $$A_1[\bar{w}_1] = \frac{1}{2}q_2[w_0, V_0] \qquad (28)$$

при

$$x_1 = 0 \quad \bar{w}_1 = 0, \qquad (\bar{w}_1)_{11} = f_1(x_2)$$

$$x_1 = a \quad \bar{w}_1 = 0, \qquad (\bar{w}_1)_{11} = f_2(x_2)$$

$$x_2 = 0 \quad \bar{w}_1 = 0, \qquad (\bar{w}_1)_{22} = 0$$

$$x_2 = b \quad \bar{w}_1 = 0, \qquad (\bar{w}_1)_{22} = 0$$

IIIб $$A_1[\bar{\bar{w}}_1] = \frac{1}{2}q_1[w_0, V_0] \qquad (29)$$

при

$$x_1 = 0 \quad \bar{\bar{w}}_1 = 0, \qquad (\bar{\bar{w}}_1)_{11} = 0$$

$$x_1 = a \quad \bar{\bar{w}}_1 = 0, \qquad (\bar{\bar{w}}_1)_{11} = 0$$

$$x_2 = 0 \quad \bar{\bar{w}}_1 = 0, \qquad (\bar{\bar{w}}_1)_{22} = \varphi_1(x_1)$$

$$x_2 = b \quad \bar{\bar{w}}_1 = 0, \qquad (\bar{\bar{w}}_1)_{22} = \varphi_2(x_1)$$

IVа $$A_2[\bar{V}_1] = \frac{1}{2}Q_1[w_0, V_0] \qquad (30)$$

при

$$x_1 = 0 \qquad (\bar{V}_1)_1 = F_1(x_2)$$

$$x_1 = a \qquad (\bar{V}_1)_1 = F_2(x_2)$$

$$x_2 = 0 \qquad (\bar{V}_1)_2 = 0$$

$$x_2 = b \qquad (\bar{V}_1)_2 = 0$$

IVб
$$A_3[\overline{V}_1] = \frac{1}{2} Q_1[w_0, V_0] \tag{31}$$

при

$$x_1 = 0 \quad (\overline{V}_1)_1 = 0$$

$$x_1 = a \quad (\overline{V}_1)_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \quad (\overline{V}_1)_2 = \Phi_1(x_1)$$

$$x_2 = b \quad (\overline{V}_1)_2 = \Phi_2(x_1)$$

Решение задачи IIIа ищем в таком виде, чтобы удовлетворить однородным условиям

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \tag{32}$$

Представим правую часть уравнения (28) в виде тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2} q_1[w_0, V_0] = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{b} \tag{33}$$

где

$$\overline{q}_n(x_1) = \sum_{p=1}^{\infty} b_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a}$$

$$b_{pn} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \frac{b_{pq}}{n^2 - q^2} [1 - (-1)^{n+q}]$$

Подставляя (32) и (33) в (28) и сравнивая коэффициенты, получим для $\overline{X}_n(x_1)$ обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\overline{X}_n^{IV} - 2\frac{B_{12} + 2B_{33}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \overline{X}_n'' + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \overline{X}_n = \frac{\overline{q}_n(x_1)}{B_{11}} \tag{34}$$

Общее решение уравнения (34) состоит из суммы

$$\overline{X}_n = \overline{X}_n^0 + \overline{X}_n^* \tag{35}$$

где

$$\overline{X}_n^* = \sum_{p=1}^{\infty} \overline{M}_{pn} \cos \frac{p\pi x_1}{a} \tag{36}$$

$$\overline{M}_{pn} = \frac{b_{pn}}{\pi^4 \left[\left(\frac{p}{a}\right)^4 + \frac{2(B_{12} + 2B_{33})}{B_{11}} \left(\frac{p}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{n}{b}\right)^4\right]}$$

является частным решением неоднородного дифференциального уравнения (34), а $\bar X_n$ — общим решением соответствующего однородного уравнения. Характеристическое уравнение

$$r^4 - \frac{2(B_{12}+2B_{33})}{B_{11}}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 r^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = 0 \tag{37}$$

может иметь четыре корня одного из типов: 1) $\pm\frac{n\pi}{b}s_1$, $\pm\frac{n\pi}{b}s_2$, $s_1>0$, $s_2>0$ — вещественные разные, 2) $\pm s$ ($s>0$) — вещественные равные, 3) $\pm s\pm it$ ($s>0$, $t>0$) — комплексные. В дальнейшем будем рассматривать только первый тип, так как случаи 2) и 3) можно получить из 1) путем предельного перехода или отделения вещественной и мнимой частей

$$\bar X_n = \bar A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}s_1x_1 + \bar B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}s_1x_1 + \bar C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}s_2x_1 + \bar D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}s_2x_1 \tag{38}$$

Подставляя (36) и (38) в (32), находим

$$\bar w_1(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\bar A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}s_1x_1 + \bar B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}s_1x_1 + \bar C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}s_2x_1 +$$

$$+ \bar D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}s_2x_1 + \sum_{p=1}^{\infty} M_{pn}\cos\frac{p\pi x_1}{a}\Big)\sin\frac{n\pi x_2}{b} \tag{39}$$

Для определения постоянных интегрирования представим функции $f_1(x_2)$ и $f_2(x_2)$, заданные выражениями (27), в виде

$$f_1(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}\sin\frac{n\pi x_2}{b}; \qquad f_2(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}\sin\frac{n\pi x_2}{b} \tag{40}$$

где

$$f_{1n} = \frac{4B_{13}n}{\pi B_{11}\pi^2 ab}\sum_p\sum_q \frac{a_{pq}pq}{q^2-n^2}\left[1-(-1)^{q+n}\right]$$

$$f_{2n} = \frac{4B_{13}n}{\pi B_{11}\pi^2 ab}\sum_p\sum_q \frac{a_{pq}pq(-1)^p}{q^2-n^2}\left[1-(-1)^{q+n}\right]$$

Удовлетворяя условиям задачи (28), составим систему четырех уравнений для определения четырех постоянных интегрирования

$$0 = \bar A_n + \bar C_n + \bar X_n^*(0)$$

$$0 = \bar A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}s_1a + \bar B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}s_1a + \bar C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}s_2a + \bar D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}s_2a + \bar X_n^*(a)$$

$$f_{1n} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(\bar A_n s_1^2 + \bar C_n s_2^2) + [\bar X_n^*(0)]'' \tag{41}$$

$$
I_{2n} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \left(\bar{A}_n s_1^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_1 a + \bar{B}_n s_1^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_1 a + \bar{C}_n s_2^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} s_2 a + \right.
$$

$$
\left. + \bar{D}_n s_2^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} s_2 a \right) - [\bar{X}_2'' (a)]
$$

Методика решения задач (29), (30), (31), а также соответствующих задач третьего и более высоких приближений никаких принципиальных отличий от изложенной выше не имеет.

Рассмотрим конкретный пример прямоугольной пластинки с размерами $a \times b$, вырезанной из кристалла бифталата калия [3]. Исходная система (1) имеет вид

$$
(0.1505\, w_{,1111}^{IV} + 0.452\, w_{,1122}^{IV} + 0.128\, w_{,2222}^{IV}) \cdot 10^{12} -
$$

$$
- \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{h} (0.118\, V_{,11} + 0.339\, V_{,22}) \cdot 10^{6} = q,
\qquad (42)
$$

$$
(0.118\, w_{,11} + 0.339\, w_{,22}) \cdot 10^{6} - \frac{2}{h} (4.08\, V_{,11} + 5.98\, V_{,22}) = 0
$$

с граничными условиями согласно (3) и (4)

при

$$
x_1 = 0, \quad x_1 = a \quad w = 0
$$

$$
(0.1505\, w_{,11} + 0.0745\, w_{,22}) \cdot 10^{12} + \frac{2}{h} 0.118\, V_{,2} \cdot 10^{6} = 0
$$

$$
(0.118\, w_{,11} - 0.585\, w_{,22}) \cdot 10^{6} + \frac{2}{h} 4.08\, V_{,1} = 0
\qquad (43)
$$

при

$$
x_2 = 0, \quad x_2 = b \quad w = 0
$$

$$
-(0.0745\, w_{,11} + 0.128\, w_{,22}) \cdot 10^{12} - \frac{2}{h} 0.585\, V_{,1} \cdot 10^{6} = 0
$$

$$
-0.246\, w_{,12} \cdot 10^{6} - \frac{2}{h} 5.98\, V_{,2} = 0
\qquad (44)
$$

Вводя малый параметр, получим системы рекуррентных дифференциальных уравнений

$$
0.1505\, (w_m)_{,1111}^{IV} + 0.452\, (w_m)_{,1122}^{IV} + 0.128\, (w_m)_{,2222}^{IV} = q_m
$$

$$
4.08\, (V_m)_{,11} + 5.98\, (V_m)_{,22} = Q_m
\qquad (45)
$$

где

$$
q_m = \frac{10^{-6}}{2h} [0.118\, (V_{m-1})_{,11} + 0.339\, (V_{m-1})_{,22}]
\qquad (m = 1, 2, \ldots) \quad (46)
$$

$$
Q_m = \frac{10^{6}}{2h} [0.118\, (w_{m-1})_{,11} + 0.339\, (w_{m-1})_{,22}]
$$

и граничные условия при $x_1 = 0,\ x_1 = a$

$$w_m = 0; \qquad (w_m)_{11} = \frac{1.57}{\mu} \cdot 10^{-5} (V_{m-1})_1; \qquad (V_m)_1 = -\frac{1.45}{\mu} \cdot 10^3 (w_{m-1})_{11}$$

при $x_2 = 0,\ x_2 = b$

$$w_m = 0; \qquad (w_m)_{22} = \frac{9.15}{\mu} \cdot 10^{-5} (V_{m-1})_1; \qquad (V_m)_2 = \frac{2.06}{\mu} \cdot 10^3 (w_{m-1})_{12}$$

Следуя изложенной выше методике, ограничиваясь первыми тремя приближениями, получим решение

$$w = \sum_p \sum_q \left\{ \frac{0.197\, q_0 \cdot 10^{-3} \sin \dfrac{p\pi x_1}{a} \sin \dfrac{q\pi x_2}{b}}{pq \left[0.1505 \left(\dfrac{p}{a} \right)^4 + 0.452 \left(\dfrac{p}{a} \right)^2 \left(\dfrac{q}{b} \right)^2 + 0.128 \left(\dfrac{q}{b} \right)^4 \right]} \right\} +$$

$$+ \mu^2 \sum_n \left\{ \left[A_{2n} \operatorname{ch} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + B_{2n} \operatorname{sh} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + \left(\sum_q C_{2nq} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \right) + \right. \right.$$

$$+ D_{2n} \operatorname{ch} 1.76 \frac{n\pi x_2}{a} + E_{2n} \operatorname{sh} 1.76 \frac{n\pi x_2}{a} + G_{2n} \operatorname{ch} 0.67 \frac{n\pi x_2}{a} +$$

$$\left. \left. + H_{2n} \operatorname{sh} 0.67 \frac{n\pi x_2}{a} \right] \sin \frac{n\pi x_1}{a} \right\}$$

$$V = \mu \sum_n \left\{ \left[A_{1n} \operatorname{ch} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + B_{1n} \operatorname{sh} 0.826 \frac{n\pi x_2}{a} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\sum_q C_{1nq} \sin \frac{q\pi x_2}{b} \right) \right] \cos \frac{n\pi x_1}{a} \right\} \tag{47}$$

Если рассмотреть в полученных рядах первые приближения, то прогиб центра пластинки имеет значения для пластинки с размерами $a = 1$ *см*, $b = 1$ *см*, $h = 0.1$ *см*

$$w = 23.5\, q_0 \cdot 10^{-5} \quad (\textit{см})$$

для пластинки с размерами $a = 2$ *см*, $b = 1$ *см*, $h = 0.1$ *см*

$$w = 28.15\, q_0 \cdot 10^{-5} \quad (\textit{см})$$

В заключение сделаем важное замечание об оценке величины малого параметра μ. Сравнивать операторы с помощью сравнения их коэффициентов не представляется возможным, так как эти коэффициенты имеют разную размерность.

Характеристический определитель исходной системы (42)

$$\begin{vmatrix} 0.128\,\lambda^4 - 0.452\,\lambda^2 + 0.1505 & -\dfrac{1}{2\pi}(0.339\,\lambda^2 - 0.118) \\ \dfrac{\pi}{2}(0.339\,\lambda^2 - 0.118) & 5.98\,\lambda^2 - 4.08 \end{vmatrix} = 0 \tag{48}$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i1.77; \quad \lambda_{3,4} = \pm i0.827; \quad \lambda_{5,6} = \pm i0.615 \tag{49}$$

Характеристические уравнения приближенных уравнений

$$0.128\lambda^4 + 0.452\lambda^2 + 0.1505 = 0; \quad 5.98\lambda^2 + 4.08 = 0 \tag{50}$$

имеют корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i1.755; \quad \lambda_{3,4} = \pm i0.67; \quad \lambda_{5,6} = \pm i0.59 \tag{51}$$

Сравнение корней (49) и (51) позволяет считать, что приближенная совокупность дифференциальных уравнений действительно мало отличается от исходной системы. Таким образом, подтверждается правомерность введения малого параметра μ. Оценка малого параметра μ, величина которого лежит в пределах

$$0.0085 \leqslant \mu < 0.19$$

получается из относительной погрешности в значениях корней (51) по сравнению с (49).

Ի. Ա. ՎԵԿՈՎԻՇՉԵՎԱ

ԵԶՐԱԳԾՈՎ ԱԶԱՏ ՀԵՆՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Փոքր պարամետրի եղանակով լուծվում է եզրագծով ազատ հենված պյեզոէլեկտրական բարակ սալի ծռման վերաբերյալ եզրային խնդիրը: Տրված են թվային օրինակ և փոքր պարամետրի մեծության գնահատականը:

THE BENDING OF A THIN RECTANGULAR PIEZOELECTRIC PLATE SUPPORTED THROUGHOUT ITS BOUNDARIES

I. A. VEKOVISHCHEVA

Summary

Small parameter technique solves the boundary problem of bending a thin piezoelectric plate supported throughout its boundaries. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вековищева И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 4, 1972.
2. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, Ереван, 1970.
3. *Беляев Л. М.* и др. Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства. Кристаллография, т. 14, вып. 4, 1969.