

А. В. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ
 ДЛЯ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В работе рассматривается решение задачи о движении магнитоупругой среды под действием нестационарных нагрузок.

В динамических задачах теории упругости для однородной изотропной среды наиболее употребительным является метод Смирнова-Соболева [1], который применен к решению ряда граничных задач [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Для анизотропной упругой плоскости методом [1] ряд граничных задач решен в работах [8, 9]. В последнее время при решении динамических задач большее распространение получила метод интегральных преобразований в сочетании с методом Винера-Хопфа [10, 11, 12]. Следует отметить, что деформацией контура в обратном преобразовании Фурье можно для широкого класса задач решение, полученное методом интегральных преобразований, привести к эффективной записи решения в форме Смирнова-Соболева. Этот аппарат применяется в настоящей работе в применении к задаче магнитоупругости. Решение находится с помощью интегральных преобразований с последующим применением метода Винера-Хопфа и затем в нестационарном случае приводится к форме Смирнова-Соболева, что по идее близко к методу работ [13, 14].

Рассматривается задача о движении однородной изотропной магнитоупругой плоскости с разрезом, занимающим отрицательную полуось x , на границе которого приложены произвольные нормальные и касательные импульсы.

Уравнения движения магнитоупругой среды при начальном однородном магнитном поле B_0 , перпендикулярном плоскости движения (x, y) , имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — компоненты вектора перемещения по осям x, y , $a^2 = a^2 + \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$, ρ — плотность, a, b — скорости упругих волн. Для индуцированного магнитного поля имеется лишь составляющая $b = B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$.

Составляющие тензора магнитоупругих напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{yy} + \Pi_{yy} &= \gamma \left[a^2 \frac{\partial v}{\partial y} + (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ \tau_{xy} - \Pi_{xy} &= \gamma b^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где Π_{yy} , Π_{xy} — составляющие тензора максвелловских напряжений, причем в данной задаче $\Pi_{xy} = 0$.

Пусть на берегах разреза имеются нормальные и касательные импульсы $P_1^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$, $Q_1^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$ на верхнем и $P_2^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$, $Q_2^{\pm}(x \pm l) \exp(-i\omega t)$ на нижнем берегу разреза. Запишем

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{P_1^+ - P_1^-}{2}, & P_1' &= \frac{P_1^+ + P_1^-}{2} \\ Q_1 &= \frac{Q_1^+ - Q_1^-}{2}, & Q_1' &= \frac{Q_1^+ + Q_1^-}{2} \end{aligned}$$

Тогда задача распадается на две задачи — симметричную и антисимметричную, причем в первой задаче заданы импульсы $-P_1 = \frac{P_1^+ - P_1^-}{2}$,

$-Q_1 = \frac{Q_1^+ - Q_1^-}{2}$ на верхнем и $-P_1, Q_1$ на нижнем берегу, а во вто-

рой задаче импульсы будут $-P_1 = \frac{P_1^+ + P_1^-}{2}$, $-Q_1 = \frac{Q_1^+ + Q_1^-}{2}$ на верх-

нем и $P_1, -Q_1$ на нижнем берегу разреза. Так как в первой задаче $\tau_{yy} + \Pi_{yy}$ — четная, τ_{xy} — нечетная функция y , можно считать u_1 четной, v_1 — нечетной функцией y , где u_1, v_1 — вектор перемещений для симметричной задачи. Граничные условия симметричной задачи имеют вид ($y = 0$)

$$\begin{aligned} \tau_{yy} + \Pi_{yy} &= -P_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ \tau_{xy} &= -Q_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ u_1 &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (3)$$

$u_2 = O(r^{1/2}), v_2 = O(r^{1/2})$ при $r = |x^2 + y^2| \rightarrow 0$ (условие на ребре).

Для антисимметричной задачи получим

$$\begin{aligned} \tau_{yy} + \Pi_{yy} &= -P_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ \tau_{xy} &= -Q_1 \delta(x-l) \exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \\ u &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (4)$$

$u = O(r^{1/2}), v = O(r^{1/2})$ при $r = |x^2 + y^2| \rightarrow 0$ (условие на ребре).

Здесь $\delta(x)$ есть дельта-функция Дирака, ω — частота, t — время.

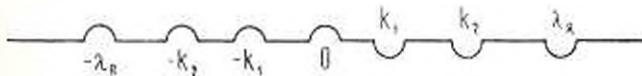
Вначале рассмотрим вторую задачу. Полагаем

$$u(x, y, t) = \bar{u}(x, y) \exp(-i\omega t), \quad v(x, y, t) = \bar{v}(x, y) \exp(-i\omega t) \quad (5)$$

Решение задачи (1), (4), (5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{i(\lambda x + y^2)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(k_1^2 - 2i^2)}{2i^2} A - \frac{iP_1 e^{i\lambda t}}{4\pi\gamma b^2 \beta_1} \right] e^{i(\lambda x - y^2 \beta_1)} d\lambda \\ \bar{v} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_2}{i} A e^{i(\lambda x - y^2 \beta_2)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{iP_1 e^{i\lambda t}}{4\pi\gamma b^2 \beta_2} - \frac{k_2^2 - 2i^2}{2i^2 \beta_2} \right] e^{i(\lambda x - y^2 \beta_2)} d\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta_j = |k_j^2 - i^2|$, $k_1 = \omega a$, $k_2 = \omega b$, $A(i)$ — неизвестная функция, функция $\sqrt{k^2 - i^2}$ аналитична в комплексной плоскости i с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси $(-\infty, -k)$ и (k, ∞) , подразумевается ветвь этой функции, действительная и положительная при $-k < i < k$, то есть положительно мнимая на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза. Контур интегрирования в (6) показан на фиг. 1. Учитывая что u есть нечетная функция y , можем в (1) заменить одновременно y на $|y|$ и u на $|u|$, что позволяет брать решение для всех y в виде (6), причем далее знак модуля отброшен.



Фиг. 1.

Решение в виде (6) удовлетворяет уравнениям (1) и граничному условию $\sigma_{xy} - \bar{\Pi}_{xy} = -P_1 \delta(x + l)$ при $y = 0$. Остальные граничные условия и условия на ребре определяют функцию $A(i)$. Подставляя (6) в (4), имеем при $y = 0$ уравнения, которые после применения обратного преобразования Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{i b^2 R(i) A(i)}{2i^2 \beta_2} - \frac{P_1 (k_1^2 - 2i^2)}{4\pi\gamma \beta_2} e^{i\lambda t} &= \Omega^-(i) \\ \frac{k_2^2 A(i)}{2i^2} - \frac{i P_1 e^{i\lambda t}}{4\pi\gamma b^2 \beta_2} &= \Omega^+(i) \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Omega^-(i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_{xy}}{i} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx, \quad \Omega^+(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{u})_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

$R(i) = 4i^2 \beta_1 \beta_2 + (k_1^2 - 2i^2)^2$ — функция Ралая, причем искомые функции $\Omega^-(i)$ и $\Omega^+(i)$ аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскости комплексного переменного i .

Исключая из (7) $A(t)$, приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$2ib^2 \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \beta_1 F(t) U^-(t) - \frac{P_1 [\bar{a}^2 \beta_1 - (\bar{a}^2 - 2b^2) \beta_2] e^{it}}{2\pi \bar{a}^2 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)} + \frac{Q_1 e^{it}}{2\pi \beta_2} = \Omega^-(t) \quad (8)$$

где

$$F(t) = \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left[t^2 + \frac{(k_2^2 - 2t^2)^2}{4\beta_1 \beta_2} \right]$$

Функции $F(t)$ и $\sqrt{k_2^2 - t^2}$ представим в виде

$$F(t) = F^+(t) F^-(t), \quad \sqrt{k_2^2 - t^2} = \sqrt{k_1 - t} \sqrt{k_2 - t} \quad (9)$$

где функции $F^+(t)$ и $F^-(t)$ — аналитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях $\text{Im} t > 0$ и $\text{Im} t < 0$. Согласно выбору ветви функции $\sqrt{k_1^2 - t^2}$ и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости t -плоскости, $\sqrt{k_2 - t}$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0, -k > t > -\infty$), $\sqrt{k_1 - t}$ — в нижней полуплоскости (разрез вдоль $y = 0, k < t < \infty$). Воспользуемся результатом факторизации функции $F(t)$, приведенным в [16]

$$F^-(t) = \frac{e^{i\epsilon_R t}}{\sqrt{k_2 - t} \sqrt{k_1 - t}} \exp \left[\frac{i}{2\pi i} \int_{k_1}^{k_2} \ln \frac{F(z)}{F(z) \sqrt{z - k_1}} dz \right] \quad (10)$$

$$\left(\epsilon_R = \frac{\pi}{c_R}; \quad c_R \leq b \right)$$

Здесь c_R^{-1} — корень функции Рэлея, и выбираются одновременно либо верхние, либо нижние знаки. Подставляя (10) и (9) в (8), получим

$$2b^2 i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \sqrt{k_1 - t} F^+(t) U^-(t) + \frac{f(t) e^{it}}{t - i c_R} = \frac{\Omega^-(t) \sqrt{k_2 - t}}{(t_R - t) X(t)} \quad (11)$$

где

$$f(t) = \frac{P_1 [\bar{a}^2 \beta_1 - (\bar{a}^2 - 2b^2) \beta_2] - Q_1 \bar{a}^2 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{2\pi \bar{a}^2 (\beta_1 + \beta_2) X(t) \sqrt{k_2 - t}}$$

$$X(t) = \frac{F^-(t) \sqrt{(k_2 - t)(k_1 - t)}}{t_R - t}$$

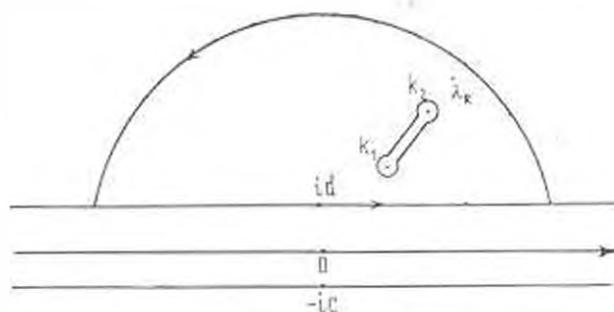
Для того, чтобы применить метод Винера-Хопфа, необходимо второй член левой части уравнения (11) представить как сумму двух функций, одна из которых аналитична в верхней полуплоскости плоскости t , а другая — в нижней полуплоскости:

$$f_1(i) = \frac{f(\lambda) \exp(i\lambda t)}{i - i_R} = f_1^+(i) + f_1^-(i) \quad (12)$$

Допустим, что λ — комплексное число, тогда легко показать, что $f_1(i)$ — аналитическая функция $i = z + it$ в полосе $-\operatorname{Im} k_1 < i < \operatorname{Im} k_2$ и такая, что $|f_1(z - it)| < C|z|^{-1/2}$ при $|z| \rightarrow \infty$, причем это неравенство выполняется равномерно для всех t в полосе $-\operatorname{Im} k_1 + \varepsilon < z < \operatorname{Im} k_2 - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Тогда можно утверждать [10], что при $-\operatorname{Im} k_1 < i < -\varepsilon < z < d < \operatorname{Im} k_2$

$$f_1^+(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi, \quad f_1^-(i) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi \quad (13)$$

Теперь вычислим $f_1^-(i)$. Для этого применим теорему Коши в разрезанной области фиг. 2, где разрез проведен между точками k_1 ,



Фиг. 2.

Отметим, что подынтегральное выражение (13) в этой области имеет единственный простой полюс в точке $i = i_R$. Тогда имеем

$$f_1^-(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_1}^{\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{k_2} \frac{f_1(\xi)}{\xi - i} d\xi - \frac{f(i_R) e^{i_R t}}{i_R - i} \quad (14)$$

Рассмотрим предельный случай равенства (14). Когда $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow 0$, разрез проведен уже вдоль вещественной оси от точки k_1 до ∞ . Считая, что на верхнем берегу разреза $|\frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i} - -i| \frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i}$, а на нижнем берегу разреза $|\frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i} - i| \frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i}$ и подставляя выражение $f_1(\xi)$ в (14), получим

$$f_1^-(i) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{f(\xi) e^{i\xi t}}{\xi - i} d\xi - \frac{f(i_R) e^{i_R t}}{i_R - i} \quad (15)$$

где

$$f(\xi) = \frac{P_1}{2\pi \sigma} \frac{1}{X(\xi)} \quad \text{при } k_0 < \xi < \infty, \quad \text{а при } k_1 < \xi < k_0$$

$$z(z) = \frac{[P_1(k_2^2 - 2z^2) - 2Q_1z]z | \overline{k_2 - z} | \overline{z^2 - k_1^2}}{2\gamma b^2 R(z) X^+(z) (z - z_R)}$$

а $X^+(z)$ суть граничные значения функции $X(z)$ сверху на участке $k_2 < z < k_1$. Из (15), (12), (11) имеем

$$2b^2 i \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) | \overline{k_2 - z} | F^-(z) U^+(z) - f_1^-(z) = \frac{z(z) | \overline{k_2 - z} |}{(z_R - z) X(z)} - f_1^-(z) \quad (16)$$

Так как точки k_1 , k_2 , z_R не принадлежат к нижней полуплоскости z , то правая часть уравнения (16) представляет собой функцию, аналитическую в нижней полуплоскости, а левая часть того же уравнения — функцию, аналитическую в верхней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями друг друга. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической по всей плоскости z , в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [10] и условие на ребре, нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости z .

Таким образом, получим

$$z^-(z) = \frac{f(z_R) X(z) e^{i\pi R}}{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} = \frac{(z_R - z) X(z)}{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} \int_{k_1}^{\infty} \frac{z(z) e^{i\pi z}}{z - z} dz \quad (17)$$

Из формул (17), (7) имеем

$$A(z) = i \left(a_1^{(1)} e^{i\pi z} + a_2^{(1)} e^{i\pi z^2} + a_3^{(1)} \int_{k_1}^{\infty} \frac{z(z) e^{i\pi z}}{z - z} dz \right) \quad (18)$$

где

$$a_1^{(1)} = \frac{i [P_1(k_2^2 - 2z^2) - 2z^2 Q_1]}{2\gamma b^2 R(z)}, \quad a_2^{(1)} = \frac{2f(z_R) i^2 X(z) | \overline{k_2 + z} |}{b^2 R(z)}$$

$$a_3^{(1)} = \frac{2i^2 (z_R - z) X(z) | \overline{k_2 - z} |}{b^2 R(z)}$$

Подставляя (18) в (6), получим

$$\bar{u} = i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| a_n^{(m)} e^{i\tau_n^{(m)}(z)} - \frac{1}{2} \int_{\frac{z}{a}}^{\infty} \frac{a_n^{(m)}(z) z(\tau) e^{i\tau_3^{(m)}(\tau, z)}}{\tau - \frac{z}{a}} d\tau \right| dz$$

$$\bar{v} = i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| b_n^{(m)} e^{i\tau_n^{(m)}(z)} + \frac{1}{2} \int_{\frac{z}{a}}^{\infty} \frac{b_n^{(m)}(z) z(\tau) e^{i\tau_3^{(m)}(\tau, z)}}{\tau - \frac{z}{a}} d\tau \right| dz \quad (19)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{[Q_1(k_2^2 - 2v^2) - 2P_1 v \frac{\partial \xi_1}{\partial x}] \xi_2}{2\pi i b^2 R(i)}$$

$$a_2^{(2)} = \frac{f(i_1) (k_2^2 - 2v^2) X(i_1) | \overline{k_2 + i}}{b^2 R(i)} \quad (19)$$

$$a_3^{(2)} = \frac{(k_2^2 - 2v^2) (i_2 - i) X(i_1) | \overline{k_2 + i}}{b^2 R(i)}, \quad b_n^{(2)} = \frac{\xi_1}{i} a_n^{(1)}$$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} = -\frac{k_2^2}{2} a_2^{(2)}, \quad \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial x^2} = -i(l - x) - y \xi_m, \quad \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} = -i_2 l - i x + y \xi_m$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial y^2} = -i_2 l - i x + y \xi_m$$

Таким образом, получено решение второй задачи, периодическое по времени. Обратное преобразование по t , соответствующее решение нестационарной задачи, для которой в (4) вместо $\exp(-i\omega t)$ стоит $\delta(t)$, имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{i\omega t} u ds, \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{i\omega t} v ds \quad (20)$$

где $s = -i\omega$.

При применении обратного преобразования Лапласа по t введем вместо t переменную τ , $t = \tau \varepsilon$, $s = \varepsilon - i\tau$, где $\varepsilon > 0$ и мало. Существенными оказываются окрестности точек $\varepsilon = \varepsilon_n^{(m)}$, для которых выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$f_n^{(m)}(\varepsilon_n^{(m)}) = \tau - \frac{\varepsilon_n^{(m)}}{\varepsilon} (\varepsilon_n^{(m)}) = 0, \quad (n = 1, 2, 3; m = 1, 2) \quad (21)$$

причем сопряженные значения $\overline{\varepsilon_n^{(m)}}$ также удовлетворяют (21). Для определенности вычислим один из шести интегралов, содержащих указанные экспоненты

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} i a_1^{(1)}(\varepsilon) e^{s f_1^{(1)}(\varepsilon)} d\varepsilon \quad (22)$$

где в силу однородности произведено сокращение на ω , причем в множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено $\omega = 1$, что даст новые формулы для $a_1^{(1)}(\varepsilon)$, $f_1^{(1)}(\varepsilon)$.

Пусть $\omega > 0$.

В силу малости ε , можно условно контуры по ε проводить по действительной оси ε с обходом особых точек в верхней и соответственно нижней полуплоскости [10].

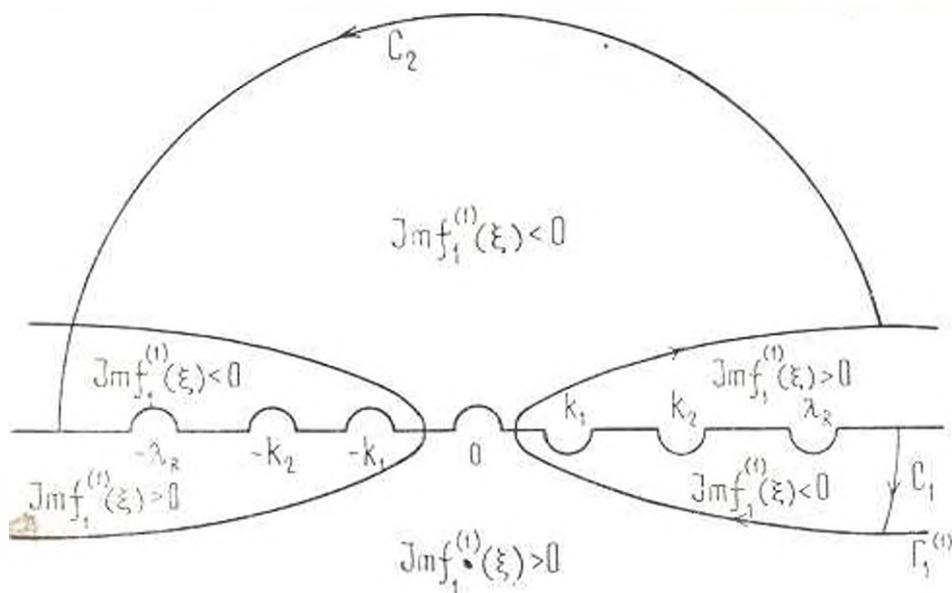
Заменим контур интегрирования $-\infty < \varepsilon < \infty$ на контур $\Gamma_1^{(1)}$, проходящий через указанные точки $\varepsilon_1^{(1)}$, $\overline{\varepsilon_1^{(1)}}$ в направлении $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\varepsilon) = 0$. Для этого нужно найти области постоянного знака $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\varepsilon)$. Обозна-

чая $f_1^{(1)}(\xi) = B$, где величина B вещественна, $\xi = z + i0$, можно убедиться, что в плоскости (ξ, η) линия $f_1^{(1)}(\xi) = B$ состоит из двух ветвей гиперболы

$$\frac{a^2 \xi^2}{x_1^2} - \frac{a^2 \eta^2}{y^2} = 1, \quad \xi_1^2 = x_1^2 + y^2, \quad x_1 = x + l$$

а также из отрезков действительной оси $|\xi| < a^{-1}$.

Пусть $x > 0$. Тогда, предполагая, что на мнимой оси $|\alpha^{-2} - \xi^2| > 0$, можно показать, что $\text{Im} f_1^{(1)}(\xi) < 0$ в областях фиг. 3, где проходят дуги окружностей c_1 и c_2 . Тогда при $\mu > 0$, можно заменить интегрирование по действительной оси ξ на интегрирование по $\Gamma_1^{(1)}$. При $\mu < 0$ вместо c_1, c_2 берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых $\text{Im} f_1^{(1)}(\xi) > 0$. Тогда интегрирование по действительной оси ξ заменится на интегрирование по $\Gamma_1^{(1)}$ в обратном предыдущему направлении. Весь внутренний интеграл в (22) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при $\mu > 0$. При



Фиг. 3.

$x < 0$ точки $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}$ лежат на левых ветвях гиперболы фиг. 3. Контуры c_1, c_2 заменяются симметричными относительно начала координат, и решение не изменяется. Итак, при любых μ, x, y из (22) получим

$$H_1^{(1)} = \frac{i}{2-j} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{\Gamma_1^{(1)}} a_1^{(1)}(\xi) e^{s f_1^{(1)}(\xi)} d\xi \quad (23)$$

Вычисляя интеграл по z , окончательно получим

$$f_1^{(1)} = i \int_{\Gamma^{(1)}} a_1^{(1)}(\xi) \delta(f_1^{(1)}(\xi)) d\xi \quad (24)$$

Полагая вблизи точки $\xi_1^{(1)}$ $f_1^{(1)}(\xi) = f_1^{(1)'}(\xi_1^{(1)})(\xi - \xi_1^{(1)})$ и вычисляя интеграл от дельта-функции в точках $\xi_1^{(1)}$, $\bar{\xi}_1^{(1)}$, получим

$$f_1^{(1)} = 2 \operatorname{Re} i \frac{a_1^{(1)}(\xi_1^{(1)})}{f_1^{(1)'}(\xi_1^{(1)})} \quad (25)$$

При $t < \frac{r_1}{a}$ решение $f_1^{(1)}$ равно нулю. Аналогично (22) вычисляя остальные интегралы и подставляя в (20), получим

$$u = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\frac{a_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{a_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right]$$

$$v = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\frac{b_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{b_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right] \quad (26)$$

Аналогичным образом решается первая задача, решение которой дается формулами

$$u_1 = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\frac{A_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{A_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right]$$

$$v_1 = 2 \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\frac{B_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{n-1}}^{\infty} \frac{B_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) \delta(\gamma) d\gamma}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)}(\gamma)) (\gamma - \xi_n^{(m)}(\gamma))} \right] \quad (27)$$

где

$$A_1^{(1)} = \frac{Q_1 \xi_1}{b^2 R(i)}, \quad A_2^{(1)} = -\frac{f_1(i, x) X(i) (k_2^2 - 2i^2)}{b^2 R(i) |k_1 - i|}$$

$$A_1^{(2)} = \frac{(i k_2 - i) (k_2^2 - 2i^2) X(i, i)}{b^2 R(i) |k_1 - i|}, \quad A_2^{(2)} = \frac{Q_1 \xi_2 (k_2^2 - 2i^2)}{2ab^2 R(i)}$$

$$A_3^{(1)} = -\frac{2\xi_1 \xi_2 A_1^{(1)}}{k_1^2 - 2i^2}, \quad A_3^{(2)} = -\frac{2\xi_1 \xi_2 A_3^{(1)}}{k_2^2 - 2i^2}, \quad B_1^{(1)} = \frac{\xi_1 A_1^{(1)}}{i} \quad (28)$$

$$B_2^{(1)} = -\frac{i}{2} A_2^{(2)}, \quad B_1^{(2)} = \frac{[2Q_1 \xi_2 + P, (k_2^2 - 2i^2) |k_2^2 - 2i^2|, i, k_1]}{2ab^2 (i - i_0) R(i) X'(i)}$$

A SOLUTION TO THE UNSTEADY BOUNDARY PROBLEM FOR MAGNETOELASTIC MEDIUM

A. N. MARTIROSIAN

S u m m a r y

The problem on motion of a homogeneous isotropic magnetoelastic plane with a cut, to whose boundaries are applied certain arbitrary normal and tangential impulses, is considered. The solution is found by integral transformations with subsequent application of the Winner-Hopf technique and later, for the unsteady case, it is reduced to the Smirnov-Sobolev form. The formulae for stress distribution throughout the medium as well as the coefficient of stress intensity are derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фрэнк Ф., Миесс Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, А.—М., 1937.
2. Зволлинский Н. В. Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Изв. АН СССР, серия геофизическая, № 10, 1957.
3. Бабич В. М. и др. Линейные уравнения математической физики. М., Наука, 1964.
4. Афанасьев Е. Е., Черенинов Г. П. Некоторые динамические проблемы теории упругости, ПММ, т. 37, № 4, 1973.
5. Зволлинский и др. Некоторые задачи дифракции упругих волн. Приложения теории функций и механике сплошной среды. Изд. Наука, М., 1965.
6. Кистров В. М. Асимптотические динамические задачи о взаимодействии жесткого штампа в упругом полупространстве. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
7. Свекло В. А. Задача Лэмба при смешанных граничных условиях. Докл. АН СССР, т. XCV, № 4, 1954.
8. Свекло В. А. Смешанные задачи для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.
9. Осипов И. О. О волновых полях и остроугольных краях на волновых фронтах. ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
10. Дуба Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.
11. Черенинов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе. В кн. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К 50-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., Наука, 1972.
12. Baker В. R. Dynamic stresses created by a moving crack. Trans ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., vol. 29, № 3, 1962.
13. Флитман А. М. Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошности упругой среды. ПММ, т. 27, № 4, 1963.
14. Cagniard L. Reflexion et réfraction des ondes sismiques progressives. Paris, Gauthier Villars, 1939.
15. Kulski S. and Petgkieteloz I. Dynamical equations for elastic and inelastic, anisotropic bodies in magnetic field. Proc. Vibr. probl., 1959, № 2, Warsaw.
16. Münc A. W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. ZAMM, Bd. 34, H. 1-2, 1954.