

А. Г. БАГДОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЛАСТИНКИ В ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

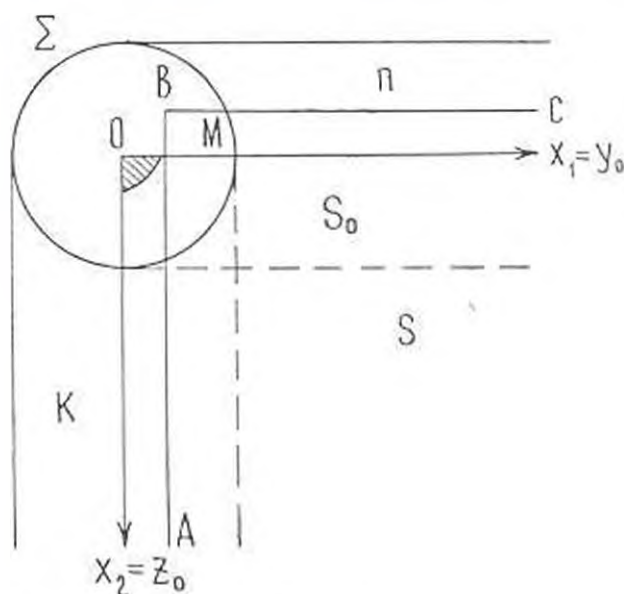
В настоящей работе рассматривается задача об отражении плоской слабой ударной волны от экрана в форме бесконечной треугольной пластинки с прямым углом в вершине, плоскость которого параллельна фронту ударной волны. Определено в линеаризованной задаче избыточное давление позади отраженной от пластинки волны. Найдено решение нелинейных уравнений коротких волн, описывающих окрестность точки B касания отраженной от экрана плоской волны S , сферической волны Σ , возникшей в момент $t = 0$ начала отражения в вершине угла, и цилиндрических волн K и Π , произведенных сторонами угла.

Пусть избыточное давление P' позади падающей плоской волны равно P_1 . Тогда в области перед пластинкой получится отраженная плоская волна S , параллельная экрану, позади которой течение постоянно и $P' = 2P_1$ согласно линейной теории. Волна S касается сферической волны Σ с центром в вершине O экрана и радиусом at и двух цилиндрических волн K и Π радиусом at и осями, направленными по сторонам угла, причем t есть время от начала отражения, a — скорость звука невозмущенной жидкости (перед фронтом отраженной волны). Для однородной жидкости в линеаризованной задаче избыточное по отношению к P_1 давление $P - P' - P_1$ позади отраженных от пластинки волн удовлетворяет волновому уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

Пусть требуется определить решение задачи вблизи волн, а точнее вблизи точки B , фиг. 1, касания волн K , Π , Σ и S . Поскольку полное решение задачи с начальными и граничными условиями представляет значительные трудности, здесь предположено, что при определении решения уравнения (1) для сформулированной выше задачи в окрестности точки касания волн можно заменить указанную задачу с граничными и начальными условиями задачей с начальными условиями, заданными на начальном положении отраженной от пластинки волновой картины. Формально возвращая волны Σ , K , Π и S к моменту начала отражения, убеждаемся, что начальным положением для Σ будет

точка O , для Π и K будут стороны угла, а начальным положением S_0 волны S будет экран. Таким образом, взяв экран в качестве начальной волны S_0 , получим из него в момент t нужную систему волн,



Фиг. 1.

фиг. 1, причем, полагая, что непосредственно позади S_0 $P = P_1$, а в остальной области позади плоскости экрана $P = 0$, получим, как показано далее из решения задачи о начальных условиях позади волны S_0 $P = P_1$, то есть нужное значение, а позади волн K и Π значения P совпадают с известными решениями плоской задачи, что подтверждает законность указанной выше замены постановки задачи. Заметим, что метод интегрирования по экрану при определении интенсивности волны известен в оптике, а использование постановки задачи о начальных условиях при определении лучевого решения на волне применялось в [1] и [3]. Указанная эквивалентность решения граничной задачи и решения задачи о начальных условиях при определении решения в окрестности волны проверена непосредственным вычислением в плоской задаче [2].

Решение задачи о начальных условиях может быть, как и в [1], найдено по формуле Пуассона

$$P = tM_{a1}[\Phi_1] + \frac{\partial M_{a1}[\Phi_0]}{\partial t} \quad (2)$$

где Φ_0 , Φ_1 — значения P , $\frac{\partial P}{\partial t}$ при $t = 0$, $M_{a1}[\Phi]$ — поделенный на $4\pi a^2 t^2$ интеграл от Φ , взятый по поверхности сферы T радиуса at с центром в точке $M(x, y, z)$, в которой определяется решение.

Предположим для простоты, что экран образует прямой угол в точке O , фиг. 1, и выберем оси $x_1 = y$, $x_2 = z$ по сторонам угла, а ось $x_3 = x$ направим по нормали к экрану в сторону движения плоской волны S . Возвращая волну S в моменту $t = 0$ начала отражения, можно убедиться в том, что начальное положение волны S , то есть S_0 , совпадает с экраном. При определении решения в точке M , находящейся вблизи волны S , а точнее, вблизи точки B , фиг. 1, следует интегрировать по поверхности упомянутой сферы T , отсекаемой начальной волной S_0 . Проведем через точку $M(y_0, z_0, x_0)$ луч, нормальный волне S_0 , обозначим точку пересечения луча с S_0 через O' и проведем оси новой системы координат y', z', x_3 , причем оси y', z' параллельны осям y, z соответственно. Тогда уравнение сферы T примет вид

$$(x_3 - x_0)^2 = y'^2 + z'^2 = a^2 t^2$$

причем $y' = x_1 - y_0$, $z' = x_2 - z_0$. Для малых x_3 и $at = x_0 = a^2 |1|$

$$x_3 = -a^2 + \frac{y'^2 + z'^2}{2at}$$

и уравнение волны S_0 относительно сферы имеет вид

$$Z = a^2 - \frac{(x_1 - y_0)^2}{2at} - \frac{(x_2 - z_0)^2}{2at} \quad (3)$$

Взяв более общую задачу для неплоского экрана и для более общего вида уравнения или системы уравнений гиперболического типа и обозначая через k_1 , k_2 и k_3 , k_1 соответственно кривизны линий кривизны квазисферы T и начальной волны S_0 , можно показать [2], что формула для эйконала $\frac{1}{c}Z$, представляющая время пробега вдоль луча от квазисферы до S_0 , имеет вид

$$Z = ct = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)(x_1 - y_0)^2 + \frac{1}{2}(k_3 - k_1)(x_2 - z_0)^2 \quad (4)$$

где c есть нормальная скорость волны в точке O .

Для общности, далее рассматриваем запись Z в форме (4). Поскольку в момент $t = 0$ начальное положение S совпадает с экраном, условия позади волны S_0 можно взять в виде

$$\Phi_0 = P_1 z(Z) : (x_1) z(x_2), \quad \Phi_1 = P_1 c^2(Z) : (x_1) : (x_2) \quad (4')$$

где $z(x_1) = 1$ при $x_1 > 0$, $z(x_1) = 0$ при $x_1 < 0$, $\dot{z}(x_1) = \delta(x_1)$.

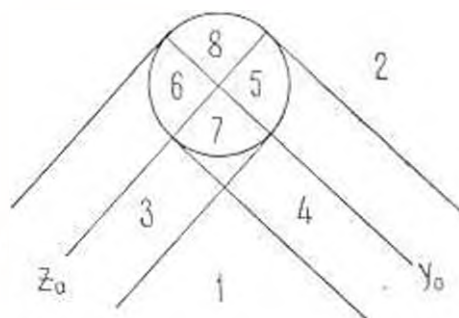
Подставляя (4') в (2), получим решение в окрестности точки B фиг. 1 в виде

$$P = \frac{1}{2at} \int_{\Sigma} P_1 z(Z) dx_1 dx_2 \quad (5)$$

где на область интегрирования в плоскости экрана S_0 наложены условия

$$Z = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad (6)$$

Разумеется, можно вместо (4) взять и более общие начальные условия [2]. Кроме того, можно показать, что (5) имеет место для произвольной системы уравнений [2], где перед интегралом следует поставить интенсивность лучевого решения.



Фиг. 2

Вводя новые переменные x, y , причем

$$x = y_0 = \sqrt{\frac{2}{k_2 - k_1}} z c^2, \quad x = z_0 = \sqrt{\frac{2}{k_3 - k_1}} z c^2 \quad (7)$$

можно записать для области интегрирования (5)

$$1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} > 0, \quad \left| \frac{z_0 - y_0}{2c} \right| < \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}}, \quad \left| \frac{z_0 + y_0}{2c} \right| < \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \quad (8)$$

В зависимости от расположения точки $M(y, z, x)$ получится различный вид области интегрирования.

$$1. \quad \left| \frac{z_0 - y_0}{2c} \right| < \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}}, \quad \left| \frac{z_0 + y_0}{2c} \right| < \sqrt{\frac{k_3 - k_1}{2c^2}} \quad (9)$$

Обозначая $z_0 = t - t_{\text{доп}}$, где $t_{\text{доп}} \neq 0$ есть уравнение волны Σ (фиг. 1), можно показать, что в (4) при $x_1 = 0, x_2 = 0, Z = c t_{\text{доп}}$ откуда следует уравнение волны S относительно Σ [3]

$$y = z_0 + \frac{k_1 - k_2}{2c} z^2, \quad \frac{k_1 - k_2}{2c} z^2, \quad y = 0 \quad (10)$$

Кроме того, можно ввести величины

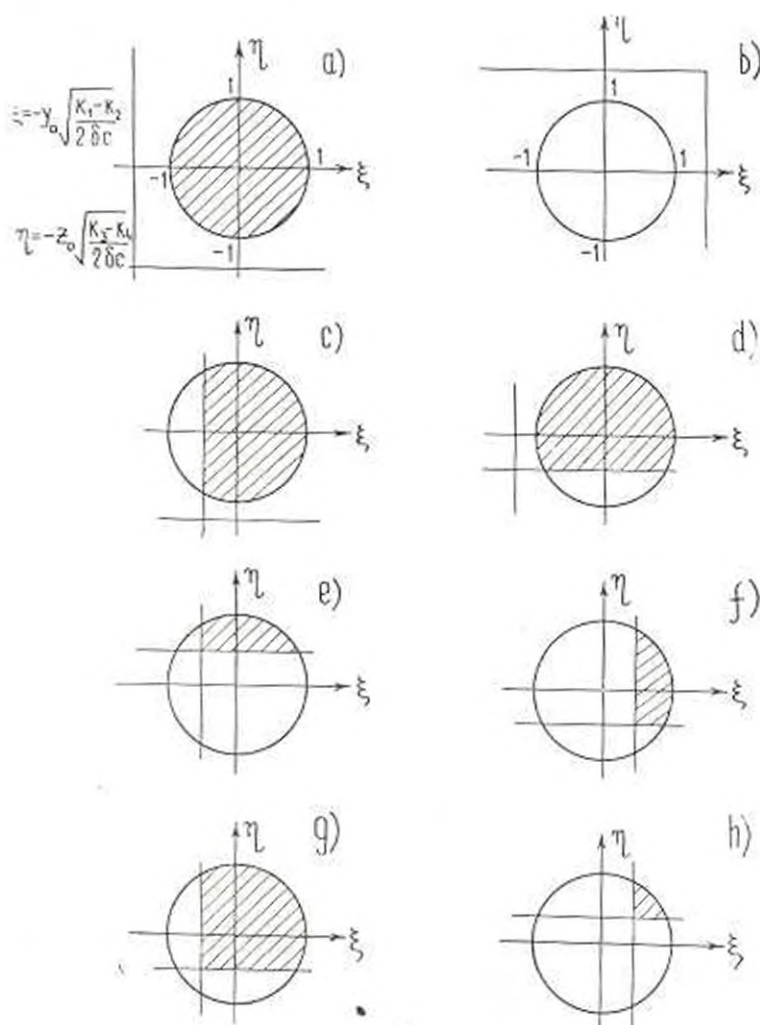
$$K_1 = z_0 + \frac{k_1 - k_2}{2c} z^2, \quad H_1 = z_0 + \frac{k_1 - k_2}{2c} y^2 \quad (11)$$

и условие (8) примет вид

$$y_0 > 0, \quad z_0 > 0, \quad K_1 < 0, \quad H_1 < 0$$

Здесь $K_1 = 0$ есть уравнение цилиндра K (фиг. 1), поскольку уравнение его образующих (в плоскостях $y = \text{const}$) относительно сферы ($z_0 = 0$) вблизи линии касания поверхностей K и Σ (на которой $z_0 = 0$,

$\bar{z}_0 = 0$) имеет вид $K_3 = 0$. Подобным же образом $\Pi_1 = 0$ представляет уравнение цилиндрической поверхности Π , касающейся сферы Σ вдоль линии $\mu_c = 0$, проходящей через точку B .



Фиг. 3.

Решение в указанной области (9) согласно (5) имеет вид

$$P = \frac{A}{\pi} \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta \quad (12)$$

где

$$A = \frac{P_1}{\alpha l} \sqrt{\frac{1}{(k_1 - k_2)(k_2 - k_4)}} \quad (13)$$

причем интегрирование ведется по области (8), которой в данном случае будет весь круг фиг. 3а.

Используя свойство дельта-функции

$$\delta\{F(x)\} = \sum \frac{\delta(x-a_i)}{|F'(a_i)|}, \quad \text{где } F'(a_i) \neq 0,$$

можно получить, что в этой области решение постоянно и по (12) имеет вид $P = A$. Для полного уравнения и плоской волны S имеет место

$$c = a, \quad k_2 = k_1 = 0, \quad k_3 = k_4 = \frac{1}{at}, \quad \text{и } P = P_1$$

Таким образом, указанная область (11) есть область постоянного решения и ограничена плоскостью отраженной волны S , поверхностями K и Π .

$$2. \quad -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c}} > 1, \quad -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} > 1$$

Тогда $y_0 < 0$, $z_0 < 0$, $K_1 < 0$, $\Pi_1 < 0$, причем по (8) и (12) из фиг. 3в следует, что $P = 0$. Указанная область находится вне сферы Σ фиг. 1.

$$3. \quad \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c}} > -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c}} > -1/\bar{c}_1, \quad -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} < -1/\bar{c}_1$$

Отсюда следует $z_0 > 0$, $\Pi_1 < 0$, $K_1 > 0$. Область интегрирования дается (8) и фиг. 3с, причем из (12) получится

$$P = \frac{1}{\pi} A \int_{-y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c}}}^1 \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1/\bar{K}_1 c}{-y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c}}} \quad (14)$$

Полученное решение верно в области внутри цилиндра K и вне поверхности Π (а также вне сферы Σ , где $z_0 = 0$).

$$4. \quad -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c}} < -1/\bar{c}_1, \quad 1/\bar{c}_1 > -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}} > -1/\bar{c}_1$$

Отсюда следует $y_0 < 0$, $K_1 < 0$, $\Pi_1 > 0$. Область интегрирования дается (8) и фиг. 3д, причем из (12) получится

$$P = \frac{1}{\pi} A \int_{-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}}}^1 \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1/\bar{\Pi}_1 c}{-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c}}} \quad (15)$$

Полученное решение верно в области внутри цилиндра Π и вне цилиндра K и сферы Σ . Следует отметить, что в (14) и (15) при $y_0 < 0$ и $z_0 < 0$ решение на K и Π соответственно обращается в нуль, тогда

как при $y_0 > 0$ и $z_0 > 0$, согласно соотношению $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$, решение на K и Π равно A , что соответствует части поверхностей K и Π , граничащей с областью (9).

$$5. \quad \left| -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1$$

$$y_0 > 0, \quad z_0 < 0$$

Отсюда следует $K_1 > 0$, $\Pi_1 > 0$. Область интегрирования дается (8) и фиг. 3е, причем из (12) получится

$$P = \frac{A}{2\pi} \int_{-y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}}}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} - \right.$$

$$\left. - \arcsin \left(-y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right) \right\} \quad (16)$$

$$6. \quad \left| -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1, \quad y_0 < 0, \quad z_0 > 0$$

Отсюда $K_1 > 0$, $\Pi_1 < 0$. Область интегрирования дается (8), а также фиг. 3г, причем по (12) получится

$$P = \frac{A}{2\pi} \int_{-z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}}}^{\sqrt{\frac{K_1}{\delta}}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{A}{2\pi} \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{K_1}{\delta}} + \right.$$

$$\left. + \arcsin \left(z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right) \right\} \quad (17)$$

$$7. \quad \left| -y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1$$

$$y_0 > 0, \quad z_0 > 0, \quad \delta_0 > 0$$

Отсюда $K_1 > 0$, $\Pi_1 > 0$.

Из (8) и фиг. 3г, а также по (12) имеет место

$$P = -\frac{A}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} + \frac{A}{2\pi} \arcsin \left(y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right) - \frac{1}{2} A \quad (18)$$

$$8. \quad \left| y_0 \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < 1, \quad \left| -z_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < 1, \quad y_0 < 0, \quad z_0 < 0$$

Здесь $K_1 > 0$, $\Pi_1 > 0$. Из фиг. 3л и (12)

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{A}{2\pi} \int_{-y_0 \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}}}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}} \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right| - \\
 &\quad - \frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \left(-y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| \right) = \\
 &= \frac{A}{2\pi} \operatorname{arcsin} \frac{\left| \frac{\Pi_1}{\delta} \right| - \frac{y_0 z_0}{2c} \sqrt{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)}}{1} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Точки M , в которой находится решение, находится вблизи участка сферы Σ , граничащего с постоянным течением $P = 0$ за падающей волной, решение на Σ равно нулю, а вблизи нее

$$P = \frac{A}{2\pi} z_0 \frac{c}{y_0 z_0 \sqrt{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)}}$$

Как показывает фиг. 3е, решение (16) имеет место при

$$-z_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|, \quad y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right| \quad \text{то есть } z_0 > 0.$$

Точно так же решение (17) имеет место при $-y_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|$,

$z_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| < \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|$, $z_0 > 0$. Можно получить решение в областях,

где знаки неравенств обратные, а именно:

$$4'. \quad -z_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| > \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|, \quad y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| > \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|, \quad z_0 < 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}}} \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{A}{\pi} \operatorname{arcsin} \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right| = \\
 &= \frac{A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|}{z_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right|}
 \end{aligned}$$

то есть решение совпадает с (15), и

$$3'. \quad z_0 \left| \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{2c^2}} \right| > \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|, \quad -y_0 \left| \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right| > \left| \sqrt{\frac{\Pi_1}{\delta}} \right|, \quad z_0 < 0$$

где решение совпадает с (14). Наконец, решение (7), согласно фиг. 3г, имеет место при $-z_0 \left\{ \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} > - \sqrt{\frac{K_1}{2}} \right\}$, $z_0 > 0$, причем при

$$-z_0 \left\{ \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} < - \sqrt{\frac{K_1}{2}} \right\} - y_0 \left\{ \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} < - \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right\}, \quad z_0 < 0$$

получится решение в области 7' фиг. 2

$$P = \frac{A}{\pi} \int_{-1}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{2}}} \frac{d\eta}{1 - \eta^2} = \frac{A}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right]_{-1}^{\sqrt{\frac{\Pi_1}{2}}} =$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\arcsin \eta_0 \left\{ \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} - \arcsin \left\{ \sqrt{\frac{\Pi_1}{2}} \right\} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y_0 \left\{ \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right\}}{1 - 2cK_1} - \operatorname{arctg} \frac{1 - 2c\Pi_1}{z_0 \left\{ \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{2c^2}} \right\}} \right) \quad (20)$$

Таким образом, получаются 6 различных областей решения: 1; 2; 3; 3'; 4; 4'; 5-8; 7.

Таким образом, определено линейное решение для однородной сжимаемой жидкости (годное для произвольной недиссипативной среды) в окрестности точки B касания волн, фиг. 1.

Для определения нелинейного решения в указанной окрестности сначала можно рассмотреть определение нелинейного решения в областях 3 и 4 вблизи цилиндрических волн, где решение двумерное, причем в области 3 оно определяется переменными K_1, y_0 , а в области 4 — Π_1, z_0 . Нелинейное решение в области 3, то есть вблизи линии AB касания волн K и S , можно найти из решения коротких волн [4], заменяя в нем

$$K = -\frac{K_1}{t} \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad Y = -\frac{y_0}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}},$$

$$v = -\frac{v_0}{a} \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad \varphi = \frac{v_0}{a}, \quad z = \frac{P_1}{2a^2}$$

Здесь v_n, v_t — проекции скорости частицы на нормаль и касательную к волне K ; a — плотность и скорость звука в жидкости. Через y_0 и z_0 обозначены $\frac{H_0}{at}, \frac{z_0}{at}$, причем на линии касания K и S в нелинейной задаче имеет место

$$y_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{K_1}{t} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{z_0^2}{2} = \frac{K_1}{t} \quad (21)$$

Здесь n есть показатель адиабаты.

Решение [4] вблизи линии AB имеет вид

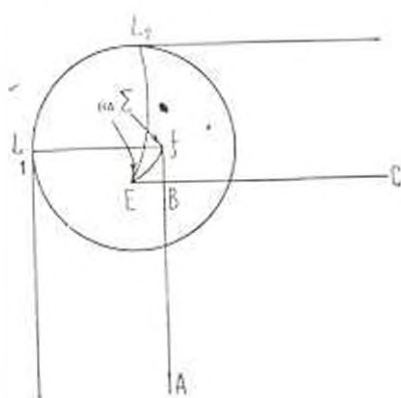
$$-\frac{K_1}{t} = -\frac{y_0^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{v_x}{\gamma a} \right) + \frac{n+1}{2} \gamma \left(\frac{v_x}{\gamma a} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi v_x}{\gamma a} + B \sin^2 \frac{\pi v_x}{\gamma a} \right) \\ v_y = \left(\frac{1}{2} \gamma a \operatorname{tg} \frac{\pi v_x}{\gamma a} - v_x \right) y_0 \quad (22)$$

где B постоянная. Условие на ударной волне в области 3 имеет вид [4] $\frac{d\tilde{z}}{dy} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ и дает вблизи линии AB $\frac{K_1}{t} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma y_0$, а решение (22) имеет вид

$$y_0 \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma, \quad z_0 = -\frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma y_0 \\ v_x = \gamma a \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma y_0, \quad v_y \approx -\gamma a y_0, \quad v_z = -z_0 v_x \quad (23)$$

Подобно этому решение в области 4 вблизи линии BC касания нелинейных волн II и S, вблизи которой $z_0 \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma, \quad z = -\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma z_0$, имеет вид

$$v_x = \gamma a \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma + z_0, \quad v_y \approx -\gamma a z_0, \quad v_z = -y_0 v_x \quad (24)$$



Фиг. 4.

Линии L_1, L_2 фиг. 4 пересечения волн (23), (24) с точечной нелинейной волной Σ или параболической поверхностью, на которой

$$z = -\frac{n+1}{2} \frac{v_x}{a}, \text{ имеют вид}$$

$$\begin{aligned}
 z_0^2 &= \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} - y_0 \right) \\
 \tau &= -\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} + y_0 \right) \\
 y_0^2 &= \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} - z_0 \right) \\
 \tau &= -\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma} - z_0 \right)
 \end{aligned} \quad (25)$$

Эти линии проходят соответственно через точки

$$y_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}, \quad z_0 = 0, \quad \tau = -\frac{n+1}{2}\gamma$$

и

$$z_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}, \quad y_0 = 0, \quad \tau = -\frac{n+1}{2}\gamma \quad (25')$$

Уравнения движения однородной жидкости вблизи точки B касания волн в нелинейной задаче могут быть получены из уравнений коротких волн [5, 6, 7] для трехмерной постановки в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial z_0} + \frac{n+1}{2} \frac{v_x}{a^2} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{v_x}{a^2} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= 0 \\
 \frac{\partial v_x}{\partial y_0} = \frac{\partial v_y}{a^2 \tau}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z_0} = \frac{\partial v_z}{a^2 \tau}
 \end{aligned} \quad (26)$$

причем y_0, z_0 имеют первоначальный смысл, $at\tau_1 = dx$, x — координата по нормали к волне. Введя, как и ранее, обозначения $\frac{y_0}{at} = y_0$,

$\frac{z_0}{at} = z_0$, $\frac{\tau}{t} = -\tau$, и учитывая соотношения однородности решения

по t $\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\tau}{t} \frac{\partial v_x}{\partial \tau}$, уравнения (26) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y_0} - \frac{\partial v_z}{\partial z_0} \right) + v_x - \frac{n+1}{2} \frac{v_x}{a^2} \frac{\partial v_x}{\partial \tau} &= 0 \\
 \frac{\partial v_x}{\partial y_0} = -\frac{\partial v_y}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z_0} = -\frac{\partial v_z}{\partial \tau}
 \end{aligned} \quad (27)$$

а уравнение ударной волны для (27) — в виде

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial y_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z_0} \right)^2 = -2\tau - \frac{n+1}{2} \frac{v_x}{a^2} \quad (28)$$

причем условия на ударной волне с учетом того, что впереди нее решение равно нулю, будут

$$v_y = v, \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}, \quad v_z = v, \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \quad (24)$$

Ударная волна S , ограничивающая область 1, есть плоскость с уравнением

$$\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = \frac{n-1}{4} \quad (30)$$

В точке B имеет место

$$y_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad z_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \quad \tau = -\frac{3}{4}(n-1), \quad \frac{v_y}{a} = \quad (31)$$

Теперь нужно найти решение на ударной волне S , непрерывно переходящее в решение на цилиндрических ударных волнах вдоль линий L_1 и L_2 (фиг. 4). Определим нелинейное решение вблизи S с помощью линейного решения в области 8, которое в новых обозначениях имеет вид

$$v_i = \frac{\gamma a}{2\pi} \arcsin \frac{\sqrt{z + \frac{y_0^2}{2}} \sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}} - \frac{1}{2} y_0 z_0}{z + \frac{y_0^2}{2} - \frac{z_0^2}{2}} \quad (32)$$

Из (32) и (29) получится с использованием условий $\tau = 0, v_r = 0, v_z = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{\gamma a} v_y &= y_0 \arctg \frac{\sqrt{z + \frac{y_0^2}{2}} + \sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}}}{-z_0} + \sqrt{2} \sqrt{z + \frac{z_0^2}{2}} \\ &+ y_0 \arctg \frac{\sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}} + \sqrt{z + \frac{y_0^2}{2}}}{-y_0} + z_0 - y_0 \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2\pi}{\gamma a} v_z &= z_0 \arctg \frac{\sqrt{z + \frac{y_0^2}{2}} + \sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}}}{-z_0} + \sqrt{2} \sqrt{z + \frac{z_0^2}{2}} \\ &+ z_0 \arctg \frac{\sqrt{z + \frac{y_0^2}{2}} + \sqrt{z - \frac{z_0^2}{2}}}{-y_0} + y_0 - z_0 \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (33)$$

Определяя из (32) τ в виде

$$\tau = \tau_0, \quad 2\tau_0 \cos^2 v, \frac{2\pi}{\gamma a} = (y_0^2 - z_0^2) \sin^2 v, \frac{2\pi}{\gamma a} + 2y_0 z_0 \sin v, \frac{2\pi}{\gamma a}$$

и подставляя в (33), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\gamma a} v_0 - y_0 v_1 \frac{2\pi}{\gamma a} - \frac{z_0 - y_0 \sin v_1}{\cos v_1} \frac{2\pi}{\gamma a} = z_0 \\ - \frac{2\pi}{\gamma a} v_2 - z_0 v_3 \frac{2\pi}{\gamma a} - \frac{y_0 - z_0 \sin \left(v_1, \frac{2\pi}{\gamma a} \right)}{\cos \left(v_1, \frac{2\pi}{\gamma a} \right)} = y_0 \end{aligned} \quad (34)$$

Далее предполагается, что (34) верны и для нелинейной задачи [4]. В уравнениях (27) меняются ролями переменные τ , v , и получаются уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{n-1}{2} \frac{1}{a} \frac{v_1}{v_2} - v_1 \frac{\partial \tau}{\partial v_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_0} \frac{\partial \tau}{\partial v_1} - \frac{\partial v_0}{\partial v_1} \frac{\partial \tau}{\partial y_0} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z_0} \frac{\partial \tau}{\partial v_2} - \frac{\partial v_1}{\partial v_2} \frac{\partial \tau}{\partial z_0} \right) = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \tau}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{\partial \tau}{\partial z_0} \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя (34) во второе и третье уравнения (35), можно получить решение через произвольную функцию $\tau = \tau_0 = F(v_1)$ и после подстановки в первое уравнение (35) получится уравнение для $F'(v_1)$ в виде

$$F'(v_1) - \frac{n+1}{2} v_1 - F'(v_1) \frac{\gamma a}{2\pi} \lg \left(v_1, \frac{2\pi}{\gamma a} \right) = 0$$

и окончательное решение примет вид (34), к которому следует присоединить уравнение

$$\tau = \tau_0 = \frac{n-1}{2a} v_1 = \frac{n+1}{2} \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi v_1}{\gamma a} \ln \lg \frac{2\pi v_1}{\gamma a} + C \sin \frac{2\pi v_1}{\gamma a} \quad (36)$$

где C — постоянная. Такие же решения получаются из линейного решения в областях $\bar{7}$ и $\bar{7}'$ с заменой $\sin \frac{2\pi v_1}{\gamma a}$ на $\cos \frac{2\pi v_1}{\gamma a}$ и $\cos \frac{\pi v_1}{\gamma a}$ соответственно.

При $y_0 = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma$, $\tau = -\frac{z_0^2}{2} - \frac{n+1}{2} \gamma$, $v_1 = \gamma a$ и решение (36) дает $\tau = -\frac{n+1}{2} \gamma$. При $z_0 = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \gamma$, $\tau = -\frac{y_0^2}{2} - \frac{n-1}{2} \gamma$, $v_1 = \gamma a$ решение (36) дает $\tau = -\frac{n-1}{2} \gamma$.

Таким образом, решение (36) приближенно удовлетворяет условиям перехода к решениям (23), (24) около волн K и Π вдоль линий (25), причем в точках этих линий E и F (фиг. 4), определяемых по (25), имеет место $v_1 = \gamma a$. Вместо удовлетворения условий в точке B можно взять условия на линии EF , принадлежащей волне S и определяемой уравнениями $y_0^2 + z_0^2 = \frac{n+1}{2} \gamma$, $\tau = -\frac{n-1}{2} \gamma$. На линии EF

положено $u_0 = \gamma a$, что дает непрерывный переход к постоянному течению позади волны S , в котором имеет место $u_0 = -\gamma a$, $v_0 = -\gamma a z_0$. Из решения (34), (36) видно, что эти условия удовлетворяются.

Таким образом, получено нелинейное решение (34), (36), удовлетворяющее приближению условиям перехода вдоль линии EF фиг. 4 и постоянное течение позади волны S , условиям перехода (25) и решению на цилиндрических ударных волнах и условиям (28), (29) на ударной волне Σ . Точное решение можно находить, численно решая систему уравнений (27) при условиях (28), (29) на ударной волне Σ , при условиях сопряжения с решениями двумерных уравнений, определяемых вблизи волн K и II , и при условии асимптотического перехода в линейное решение или в решения вида (32).

Отметим, что полученное здесь линейное решение годится также для описания окрестности точки касания плоской, цилиндрической и конической волн к задаче отражения плоской волны от вершины многогранного угла.

Таким образом, можно обобщением полученных результатов на случай волны произвольного профиля получить более общие по сравнению с [2, 4] соотношения, поскольку в указанных работах определяется решение линейной системы уравнений в окрестности точки (линии) касания волн при наличии особенности в двух (в трех) направлениях. Ряд линейных задач по определению структуры решения в окрестности волн при дифракции от углов решен в [7].

Институт механики АН

Армянской ССР

Поступила 10 XII 1973

Ա. Պ. ՍԵՐԳԵՅԵՎ

ՀԵՂԻՆԻ ՀԱՐԻՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԻԵՐԵՂԻՑ ՀԱՐԿԱՅԵՐԻ ԱՇԽԵՒԱԴԱՐՁՈՒՆ ԿԱԹՈՒՄԸ ՎՅԱՅԻՆ ԵՎ ԱՉ ՎՅԱՅԻՆ ԴԵՐՈՒՄՆԵՐՈՎ

Ա. մ. Ս. Ս. Ս. Ս.

Որոշվում է հնչման բաշխումը տիպատիկ ալիքի շրջափախում աղբահանման թիթեղից հարթ ալիքի տեղադրման խնդրում: Որոշվում է նաև մատավոր ոչ շաղին լուծումը նշված շրջափախում: Հարժանային ալիքի պայմանները բաշխվում են մատավոր ձևով:

DETERMINATION OF PARAMETERS OF FLUID MOTION IN THE PROBLEM ON REFLECTION OF SHOCK WAVE FROM A PLATE IN LINEAR AND NON-LINEAR STATEMENT

A. G. BAGDOLOV

S u m m a r y

A problem on reflection of a plane acoustic wave from a rectangle screen is considered. The distribution of pressure in the vicinity of junction point of the reflected plane wave, cylindrical wave and spherical wave is determined. The solution to the linear problem is of different form in different parts of the above vicinity. The non-linear solution in the vicinity is found for weak shock waves both in the vicinity of cylindrical shock waves and in that of a point wave, approximately satisfying the shock wave conditions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фредендерс Д. Звуковые импульсы. ИЛ, М., 1962.
2. Багдолов А. Г., Давыдов В. Н. Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", т. 12, № 6, 1972, 1512-1529.
3. Яблич Е. М. Ряд пространств нестационарных волн и акустики. Ученые записки АГУ, № 32, 1958.
4. Багдолов А. Г. Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1967.
5. Рыжов Ю. С., Христиненко С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, № 5, 1958, 586-599.
6. Шеффер Г. М. Учет вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости. ПММ, т. 33, № 1, 1969, 162-168.
7. Борзиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. Изд. "Мир", М., 1966.